

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Ю. В. Денисов
Н. А. Клиньских

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Допущено учебно-методическим объединением в качестве
учебника для студентов*

Екатеринбург
УрФУ
2013

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.213я73
Д33

Рецензенты: кафедра графики и деталей машин Уральского аграрного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А. Н. Красовский);
д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов (Институт математики и механики УрО РАН)

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. С. А. Берестова

Денисов, Ю. В.

Д33 Теоретическая механика: учебник / Ю. В. Денисов, Н. А. Клиньских. – Екатеринбург: УрФУ, 2013. – 474 с.
ISBN 978-5-321-02306-8

В учебнике изложены три раздела теоретической механики – статика, кинематика, динамика. В разделе *Статика* приведено решение двух задач, в разделе *Кинематика* наряду с традиционными вопросами рассмотрена кинематика системы тел. В разделе *Динамика* приведены общие теоремы динамики, их приложение. В аналитической механике рассматриваются принцип Даламбера, принципы возможных перемещений, общее уравнение динамики; условия равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах. В заключение описаны малые колебания механических систем; приведено большое количество примеров и задач с методикой их решения.

Учебник написан в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами, содержащими вопросы механики; может быть использован при модульном построении курса с различным числом зачетных единиц и для организации самостоятельной работы студентов.

Библиогр.: 7 назв. Табл. 6. Рис. 406.

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.213я73

ISBN 978-5-321-02306-8

© Уральский федеральный
университет, 2013

© Денисов Ю. В., Клиньских Н. А., 2013

Оглавление

Предисловие	9
Часть 1. Статика	11
Введение	11
Глава 1. Основные понятия, определения и аксиомы статики твердого тела	13
1.1. Основные понятия и определения	13
1.2. Аксиомы статики	26
Глава 2. Первая задача статики. Приведение системы сил к простейшему виду	29
2.1. Теоремы о свойствах сил и пар сил	29
2.2. Лемма о переносе силы в заданную точку	33
2.3. Теорема Пуансо о приведении системы сил к центру	34
2.4. Теорема Вариньона (теорема о моменте равнодействующей)	36
Глава 3. Частные случаи приведения системы сил к центру. Инварианты системы сил	39
3.1. Анализ частных случаев приведения	39
3.2. Инварианты системы сил	45
Глава 4. Вторая задача статики. Условия равновесия произвольной системы сил	49
4.1. Условия равновесия различных систем сил	50
4.2. Три вида аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил	52
4.3. Равновесие системы тел	54
4.4. Примеры решения задач на равновесие твердых тел	56
Глава 5. Равновесие при наличии сил трения	60
5.1. Трение, препятствующее скольжению	60
5.2. Трение ремня о цилиндрическую поверхность	64
5.3. Трение, препятствующее качению	66

Глава 6. Центр тяжести.....	69
6.1. Координаты центра тяжести тела.....	70
6.2. Координаты центров тяжести однородных тел.....	71
6.3. Способы определения положения центров тяжести тел.....	73
6.4. Центры тяжести некоторых однородных тел	74
Часть 2. Кинематика	79
Введение.....	79
Глава 7. Кинематика точки. Способы задания движения точки.....	81
7.1. Векторный способ	81
7.2. Координатный способ.....	81
7.3. Естественный способ. Естественные оси координат	85
7.4. Скорость и ускорение точки.....	89
7.5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения	91
7.6. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения	93
7.7. Частные случаи движения точки.....	99
Глава 8. Простейшие движения твердого тела	104
8.1. Введение в кинематику твердого тела	104
8.2. Поступательное движение твердого тела	106
8.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.....	107
8.4. Скорости и ускорения точек вращающегося тела (поля скоростей и ускорений).....	111
Глава 9. Сложное движение точки.....	120
9.1. Основные понятия и определения.....	120
9.2. Теоремы о сложении скоростей и ускорений.....	122
9.3. Вычисление ускорения Кориолиса	127
9.4. Причины появления кориолисова ускорения	130
9.5. Решение задач на сложное движение точки	132
Глава 10. Сложное движение тела	143

Глава 11. Плоскопараллельное движение тела	156
11.1. Уравнение движения плоской фигуры. Разложение движения на простейшие движения	157
11.2. Скорости точек плоской фигуры.....	158
11.3. Мгновенный центр скоростей (МЦС). Использование МЦС для определения скоростей точек	159
11.4. Ускорения точек тела при плоском движении	164
11.5. Основные способы определения угловой скорости и углового ус- корения при плоском движении.....	166
Глава 12. Сферическое движение тела. Движение свободного тела	175
12.1. Уравнение сферического движения тела. Углы Эйлера	175
12.2. Угловая скорость при сферическом движении тела	177
12.3. Угловое ускорение при сферическом движении тела.....	178
12.4. Скорость и ускорение точки при сферическом движении тела ...	182
12.5. Движение свободного тела	189
Глава 13. Кинематика системы тел.....	192
Часть 3. Динамика	205
Введение.....	205
Глава 14. Динамика материальной точки.....	207
14.1. Основные понятия и определения	207
14.2. Законы механики Галилея–Ньютона (аксиомы динамики).	208
14.3. Основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета – уравнение относительного движения точки	212
14.4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки ..	213
14.5. Первая задача динамики точки.....	215
14.6. Вторая задача динамики точки.....	218
Глава 15. Колебания материальной точки.....	228
15.1. Свободные (собственные) прямолинейные колебания материальной точки.....	229
15.2. Вынужденные колебания материальной точки	236

Глава 16. Введение в динамику механической системы. Теорема о движении центра масс.....	255
16.1. Центр масс системы	255
16.2. Внешние и внутренние силы. Свойства внутренних сил.....	256
16.3. Основное уравнение динамики точек системы	258
16.4. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс	260
16.5. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции	270
Глава 17. Меры механического движения, меры действия сил.....	276
17.1. Количество движения материальной точки и системы	276
17.2. Момент количества движения материальной точки, кинетический момент системы	278
17.3. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	279
17.4. Кинетическая энергия материальной точки, механической системы и твердого тела.....	280
17.5. Меры действия сил. Импульс силы.....	286
17.6. Работа и мощность силы.....	287
17.7. Потенциальная энергия. Полная механическая энергия.....	296
Глава 18. Общие теоремы динамики. Динамика твердого тела.....	298
18.1. Теорема об изменении количества движения.....	298
18.2. Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов).....	302
18.3. Теорема об изменении кинетической энергии	308
18.4. Динамика твердого тела.....	317
Глава 19. Применение общих теорем динамики в элементарной теории удара, приближенной теории гироскопа, движении сплошной среды	328
19.1. Явление удара. Основные определения и допущения. Действие ударной силы на материальную точку.....	328

19.2. Удар о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе	330
19.3. Теорема об изменении количества движения системы при ударе	333
19.4. Теорема об изменении кинетического момента системы при ударе	335
19.5. Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно.....	341
19.6. Приближенная теория гироскопа. Виды гироскопов, основные допущения, основное уравнение приближенной теории гироскопа	347
19.7. Основные свойства гироскопа с тремя степенями свободы. Регулярная прецессия оси гироскопа	351
19.8. Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический эффект, гироскопический момент.....	354
19.9. Применение теорем об изменении количества движения и кинетического момента к сплошной среде – уравнение Эйлера, турбинное уравнение Эйлера.....	357
Глава 20. Принцип Даламбера	361
20.1. Сила инерции материальной точки	361
20.2. Принцип Даламбера	363
20.3. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду.....	366
Глава 21. Моменты инерции твердого тела. Определение динамических реакций подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси.....	378
21.1. Центробежные моменты инерции	378
21.2. Момент инерции тела относительно оси заданного направления.....	379
21.3. Эллипсоид инерции.....	381
21.4. Главные оси инерции и главные моменты инерции	382

21.5. Определение динамических реакций подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси.....	385
Глава 22. Принцип возможных перемещений	393
22.1. Связи и их классификация	394
22.2. Возможные или виртуальные перемещения точек механической системы	398
22.3. Идеальные связи	401
22.4. Принцип возможных перемещений	403
Глава 23. Общее уравнение динамики системы (принцип Даламбера–Лагранжа)	411
Глава 24. Условия равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах	418
24.1. Обобщенные координаты и число степеней свободы.....	418
24.2. Обобщенные силы и способы их вычисления	421
24.3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах	428
24.4. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, или уравнения Лагранжа II рода	428
24.5. Уравнения Лагранжа II рода для консервативной системы	435
24.6. Циклические координаты, циклические интегралы.....	437
Глава 25. Колебания механических систем с одной или двумя степенями свободы.....	443
25.1. Определение устойчивости положения равновесия. Теорема Лагранжа–Дирихле	443
25.2. Колебания механической системы с одной степенью свободы ...	448
25.3. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы в среде без сопротивления.....	456
25.4. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы в среде без сопротивления.....	468
Библиографический список.....	473

Предисловие

В предлагаемом учебнике изложены все разделы теоретической механики – статика, кинематика и динамика.

Содержание раздела **Статика** отличается от содержания существующих учебников и учебных пособий последовательностью изложения материала. Вначале приводятся основные понятия и определения статики, с использованием которых получено решение первой и второй задач статики. Вынесение определений в отдельную главу позволяет удобно пользоваться ими при изучении всего курса теоретической механики. На базе основных понятий и определений с помощью аксиом статики в традиционной форме достаточно последовательно рассмотрены вопросы приведения системы сил к центру, частные случаи приведения, инварианты систем сил (первая задача статики), а также условия равновесия различных систем сил (вторая задача статики). Разделы трения, центра тяжести приведены в традиционном изложении.

В разделе **Кинематика**, содержащем большое количество примеров, в полном объеме излагаются вопросы кинематики движущихся объектов. Содержание раздела также отличается от содержания существующих учебников методологией представления материала.

Наиболее трудные разделы кинематики – теория плоскопараллельного движения тела, сферического движения, движения свободного твердого тела – излагаются на базе теории сложного движения тела. Это позволяет более четко представить физические основы рассматриваемых движений, сделать изложение материала более доступным с сохранением необходимой строгости.

Практически впервые в раздел "Кинематика" включены вопросы кинематики механических систем и механизмов. Это существенно расширяет область рассматриваемых движущихся объектов, позволяет более четко установить преемственность кинематики с динамикой и следующей дисциплиной "Теория механизмов и машин".

В разделе **Динамика** приводится изложение классической механики Ньютона, в основе которой лежат законы механики Галилея–Ньютона, принципы механики и колебаний механических систем. Большое внимание уделяется строгости, логичности рассуждений и доказательств, выполняется анализ физических основ механических явлений. Вместе с тем делается попытка использовать современные программные продукты, например Matematica 7.0, Pro / ENGINEER Wild fire 3.0. В разделе рассматриваются меры механического движения – количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия для материальной точки, механической системы, различных видов движения твердого тела; приводят-

ся соответствующие примеры. Далее излагаются меры действия сил – импульс силы, работа и мощность, потенциальная энергия.

При установлении зависимостей между мерами механического движения и действия сил отмечается, что общие теоремы динамики точки представляют собой преобразованное к тому или иному виду основное уравнение динамики точки (второй закон Ньютона). Дифференциальные уравнения движения твердых тел позволяют выполнять динамический анализ любых механических систем, расчленяя последние на отдельные тела. В компактной форме показано применение общих теорем динамики в теории удара, приближенной теории гироскопов, в механике сплошной среды. Эти разделы достаточно часто встречаются при проведении многочисленных инженерных расчетов и вызывают определенные трудности у специалистов.

При изложении принципа Даламбера обращается внимание на то, что метод кинемостатики, основанный на принципе Даламбера, широко используется в динамике механизмов при проведении силовых расчетов. При изложении методов аналитической механики показывается эффективность их применения для решения многих инженерных задач, в особенности связанных с исследованием систем с несколькими степенями свободы.

Большое количество примеров и разнообразных задач, приведенных в учебнике, ориентировано не только на более глубокое усвоение теории, но и на получение необходимых сведений по методике и навыкам решения задач. Можно надеяться, что, разобравшись с многочисленными примерами, читатели смогут самостоятельно решить многие задачи по теоретической механике. Вопросы для самопроверки позволяют организовать соответствующий контроль усвоения материала.

В основу учебника положен многолетний опыт преподавания авторами теоретической механики в Уральском федеральном университете им. первого Президента России Б.Н. Ельцина (ранее УГТУ-УПИ).

Учебник в целом обеспечивает удовлетворение определенных компетенций, может быть использован при модульном построении курса с различным числом зачетных единиц и для организации самостоятельной работы.

Учебник не подменяет, а в иной форме передает изложение материала, приведенного в классических учебниках по теоретической механике [1–4, 6, 7], или дополняет изложение материала по инженерной механике [5].

Авторы благодарны научному редактору учебника профессору, доктору физико-математических наук С.А. Берестовой за сделанные замечания, улучшившие изложение материала, и с пониманием примут критические высказывания и пожелания от читателей данной работы.

Часть 1. Статика

Введение

Огромное количество задач, решаемых инженерами различных специальностей, связано с исследованием механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела. Под механическим взаимодействием понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). Всякое механическое движение тел или их частей происходит по отношению к некоторой системе отсчета, т.е. является относительным.

Система отсчета – это система координат, связанная с твердым телом, по отношению к которому определяется положение других тел в разные моменты времени. Иногда системой отсчета называют само твердое тело, с которым связывают координатные оси. В большинстве задач систему отсчета связывают с Землей.

Механика – наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел. В широком смысле этого слова механика охватывает целый ряд научных дисциплин: теоретическую (или общую) механику, механику твердого деформируемого тела, механику жидкостей и газов, механику машин и механизмов, строительную механику и т.д.

Теоретическая механика – это раздел механики, в котором изучаются общие законы движения материальных тел и общие свойства этих движений. Будучи по существу одним из разделов физики, теоретическая механика выделилась в отдельную дисциплину и получила широкое самостоятельное развитие благодаря своим обширным и важным приложениям в естествознании и технике, одной из основ которых она является. Беря свое начало от техники и развиваясь вместе с ней, теоретическая механика особенно тесно связана с техническими дисциплинами, в которых законы и методы теоретической механики используются как в обосновании ряда

исходных положений, так и при проведении многочисленных инженерных расчетов.

Теоретическая механика изучает простейшую форму движения материи – механическое движение. Поскольку состояние равновесия (покоя) тела есть частный случай механического движения, то в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия (покоя) материальных тел.

Следует отметить, что инженер любой специальности в своей работе повседневно сталкивается с механическим движением. В каждой машине происходит движение различных тел: твердых, жидких, газообразных. Теоретическая механика является теоретической базой многих областей современной техники. В теоретической механике широко используются различные математические методы исследования. Для выделения главного в изучаемом явлении применяют методы абстракции и идеализации. Так, например, при изучении механического движения тех или иных объектов реальные тела заменяют их моделями. В теоретической механике используются три вида моделей тел: материальная точка, механическая система, абсолютно твердое тело.

Материальная точка – точка, имеющая массу. Это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях решаемой задачи (например, искусственный спутник при его движении вокруг Земли).

Механическая система – любая совокупность материальных точек. Любое материальное тело (твердое, жидкое, газообразное) или систему тел можно рассматривать как механическую систему, образованную непрерывной совокупностью материальных точек. Разбив мысленно тело на частицы и трактуя каждую из них как материальную точку, получаем механическую систему, составленную из совокупности взаимодействующих материальных точек.

Абсолютно твердое тело – материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками всегда остается неизменным (отсутствует деформация).

В основе теоретической механики лежат хорошо известные из физики законы Галилея-Ньютона. Курс теоретической механики обычно делят на три раздела: статику, кинематику, динамику.

Глава 1. Основные понятия, определения и аксиомы статики твердого тела

Статика – раздел механики, в котором изучается равновесие материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Равновесием материального тела (механической системы) называют такое состояние, при котором все точки тела остаются в покое по отношению к рассматриваемой системе отсчета. Подробнее вопрос о равновесии в различных (инерциальных и неинерциальных) системах отсчета рассматривается в динамике.

Статика рассматривает две основные проблемы:

- сложение сил и приведение систем сил, действующих на твердое тело, к простейшему виду;
- определение условий равновесия действующих на твердое тело систем сил.

1.1. Основные понятия и определения

К основным понятиям статики относятся два – изучаемое тело (или система тел) и сила. В том случае, когда деформациями тела можно пренебречь, реальное материальное тело можно заменить моделью – *абсолютно твердым телом*. Статика, использующая эту модель, называется статикой твердого тела или геометрической статикой. В аналитической статике (она будет изучаться позднее) в качестве модели реальных тел используется механическая система (изменяемая или неизменяемая).

В сопротивлении материалов и теории упругости в качестве модели тела используется идеально упругая сплошная среда (идеально упругое тело).

Твердое тело может находиться в состоянии равновесия (покоя) или некоторого движения. Каждое из этих состояний условимся называть кинематическим состоянием тела.

Вторым основным понятием является сила.

Сила – векторная величина, являющаяся количественной мерой механического действия одного тела на другое. Различают сосредоточенные и распределенные силы. Сила, приложенная к телу в одной его точке, является сосредоточенной (рис. 1.1). Она задается модулем, направлением и точкой приложения. Обозначается большими буквами латинского алфавита: \vec{F} , \vec{N} , \vec{S} ... $|\vec{F}| = F$ – модуль силы. Через F_x , F_y , F_z (либо X , Y , Z) обозначают проекции вектора силы на оси координат, которые являются алгебраическими величинами (могут

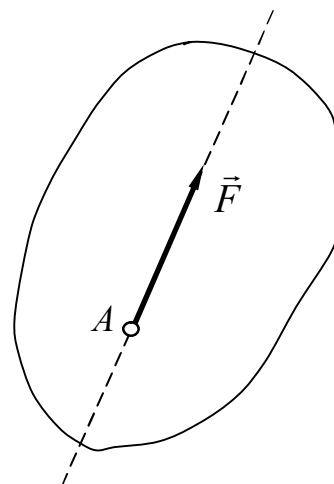


Рис. 1.1

быть положительными, отрицательными, равными нулю).

Распределенные силы действуют на все точки заданного объема, поверхности или отрезка тела (например, давление грунта на подпорную стену, давление ветра на парус яхты, сила тяжести тела и т.д.). Распределенные силы задаются интенсивностью q , т.е. величиной силы, приходящейся на единицу объема, поверхности или отрезка. На рис. 1.2,а показана равномерно распределенная нагрузка по отрезку AB , а на рис. 1.2,б – нагрузка, распределенная по линейному закону на отрезке AB .

Распределенную нагрузку можно заменить одной сосредоточенной силой, которая является равнодействующей распределенной нагрузки (системы параллельных сил).

Рассмотрим далее некоторые определения.

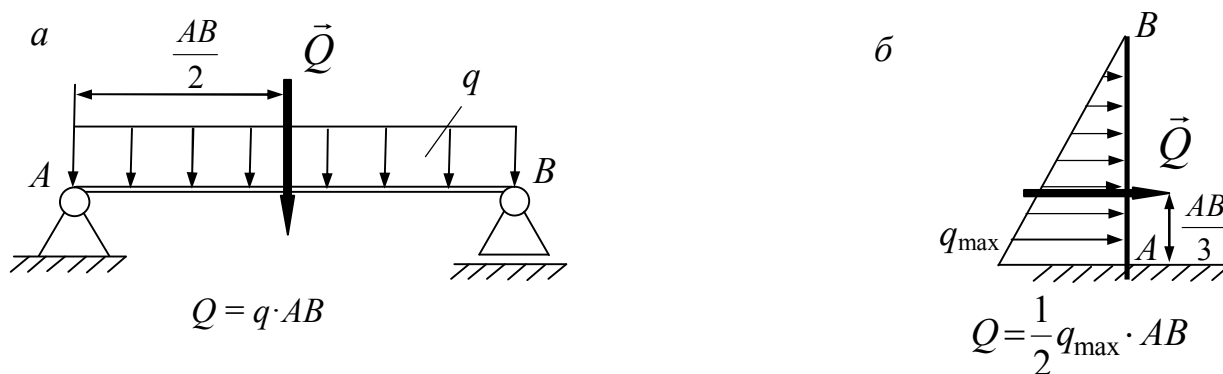


Рис. 1.2

1. *Система сил*. Совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело (или систему тел), называют системой сил. Характеризуя систему сил, нужно отметить, прежде всего, является она плоской (линии действия всех сил – в одной плоскости) или пространственной. Затем указать, сходятся силы в одной точке или нет, являются параллельными или же произвольно расположены в плоскости или пространстве. Обозначение системы сил

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}.$$

2. *Свободное тело*. Если телу можно сообщить любое (хотя бы сколь угодно малое) перемещение из рассматриваемого положения, то такое тело называют свободным. Можно также сказать, что свободное тело – это тело, на перемещения которого не наложено никаких ограничений.

3. *Эквивалентные системы сил*. Если одну систему сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу, можно заменить другой системой и состояние тела (покой или движение) при этом не изменится, то такие системы сил называются эквивалентными.

Обозначение эквивалентных систем сил

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m\}, \quad \text{причем } m \neq n$$

4. *Равнодействующая.* Сила, эквивалентная данной системе сил, называется равнодействующей этой системы сил:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{F},$$

где \vec{F} – равнодействующая системы сил.

Не всегда систему сил можно заменить равнодействующей. Как будет показано далее, существуют системы сил, не имеющие равнодействующей.

5. *Уравновешенная система сил.* Если система сил, приложенная к покоящемуся свободному телу, не выводит его из этого состояния, то систему сил называют уравновешенной. Простейшей уравновешенной системой сил является, как показывает опыт, система двух равных по модулю, противоположно направленных и лежащих на одной прямой сил (рис. 1.3):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad F_1 = F_2.$$

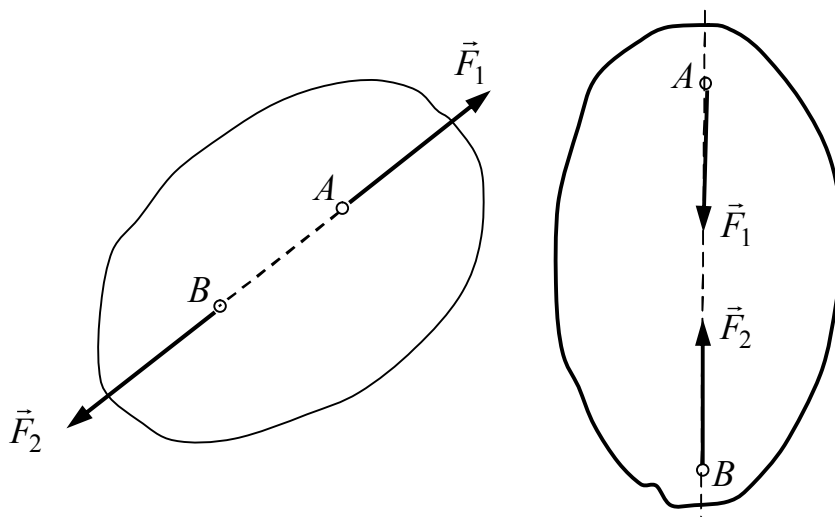


Рис. 1.3

6. *Момент силы относительно точки.* Это понятие определяет меру действия силы и вводится для характеристики способности силы повернуть тело вокруг заданной точки. При изучении плоской системы сил используется понятие *алгебраического* момента, при изучении пространственной системы – *векторного* момента силы.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют взятое со знаком "плюс" или "минус" произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки (рис. 1.4). Плечо силы h – кратчайшее расстояние между точкой и линией действия силы:

$$m_0(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (1.1)$$

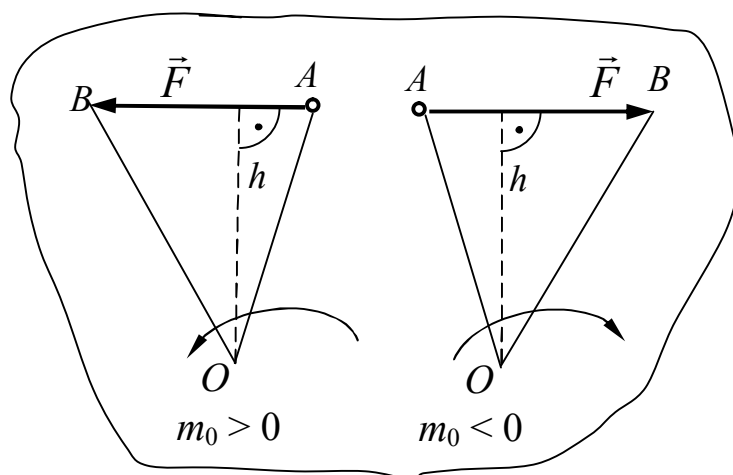


Рис. 1.4

Численно момент равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе и точке O :

$$|m_0(\vec{F})| = 2S_{\triangle OAB}.$$

Правило знаков указано на рисунке.

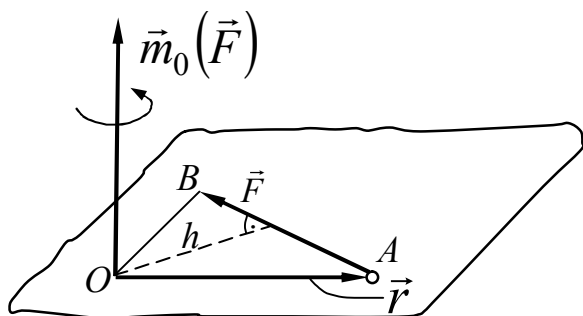


Рис. 1.5

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на плечо. Он направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и точка, так, что с его конца можно видеть стремление силы вращать тело против хода часовой стрелки (рис. 1.5).

Векторный момент $\vec{m}_0(\vec{F})$ можно выразить через вектор силы \vec{F} , используя правило векторного произведения

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.2)$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки приложения силы.

Модуль момента $|m_0(\vec{F})|$ определяется прежней формулой

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = Fh = 2S_{\triangle OAB}.$$

Если сила задается проекциями на оси координат $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, а положение точки приложения силы – ее координатами $A(x, y, z)$ (рис. 1.6), то векторный момент можно найти по формуле

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.2')$$

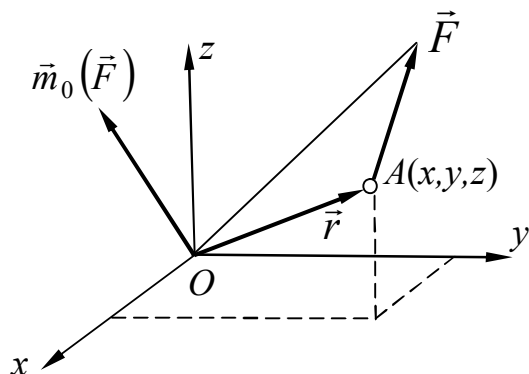


Рис. 1.6

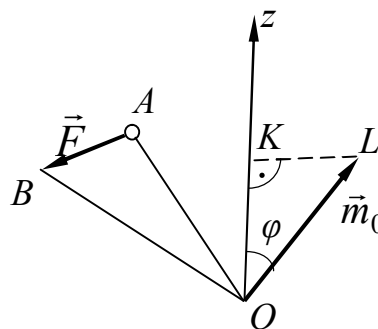


Рис. 1.7

7. *Момент силы относительно оси.* Это понятие используется при изучении пространственных систем сил.

Моментом силы относительно оси называют величину, равную проекции на эту ось вектора момента силы относительно любой точки оси. Рассмотрим силу \vec{F} , приложенную в точке A тела (рис. 1.7). Проведем произвольную ось, например Oz . Момент силы относительно точки O есть вектор $\vec{OL} = \vec{m}_0(\vec{F})$, перпендикулярный плоскости треугольника OAB . Моментом силы относительно оси Oz будет проекция вектора \vec{OL} на эту ось, т.е. отрезок $OK = OL \cos \varphi$. Обозначим момент силы относительно оси через $m_z(\vec{F})$. Тогда

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_0(\vec{F})| \cos \varphi.$$

Знак момента $m_z(\vec{F})$ определяется углом φ . При $\varphi < 90^\circ$ момент силы относительно оси положителен, при $\varphi > 90^\circ$ – отрицателен.

Если выразить модуль момента $|\vec{m}_0(\vec{F})|$ через площадь треугольника OAB , то

$$m_z(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB} \cos \varphi = 2S_{\triangle Oab},$$

т.к. треугольник Oab является проекцией треугольника OAB на плоскость, перпендикулярную оси Oz (рис. 1.8). Легко показать, что момент силы относительно оси не зависит от выбора точки на оси. Действительно, возьмем на оси Oz другую точку, например O_1 (см. рис. 1.8). По-

строим момент силы \vec{F} относительно этой точки – вектор $\vec{O_1L_1}$, перпендикулярный плоскости треугольника O_1AB , и спроецируем его на ось Oz :

$$O_1K_1 = O_1L_1 \cos \varphi_1 = 2S_{\Delta O_1AB} \cos \varphi_1 = 2S_{\Delta Oab}.$$

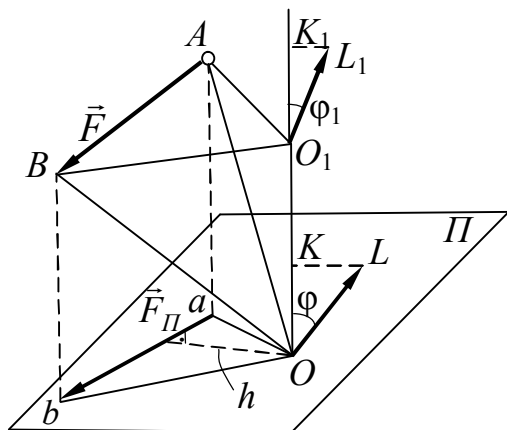


Рис. 1.8

Следовательно, $O_1K_1 = OK = m_z(\vec{F})$. Отсюда вытекает правило для вычисления момента силы относительно оси:

1) построить плоскость Π перпендикулярно оси z и показать точку пересечения оси с плоскостью – точка O (рис. 1.9);

2) спроецировать силу \vec{F} на плоскость и найти проекцию \vec{F}_Π : $F_\Pi = F \cdot \cos \alpha$, где α – угол между силой и плоскостью, параллельной Π ;

3) определить кратчайшее расстояние между точкой пересечения оси с плоскостью и линией проекции силы – плечо h ;

4) вычислить произведение модуля проекции силы $|\vec{F}_\Pi|$ на плечо h и поставить знак ("плюс" или "минус"):

$$m_z(\vec{F}) = \pm F \cos \alpha h. \quad (1.3)$$

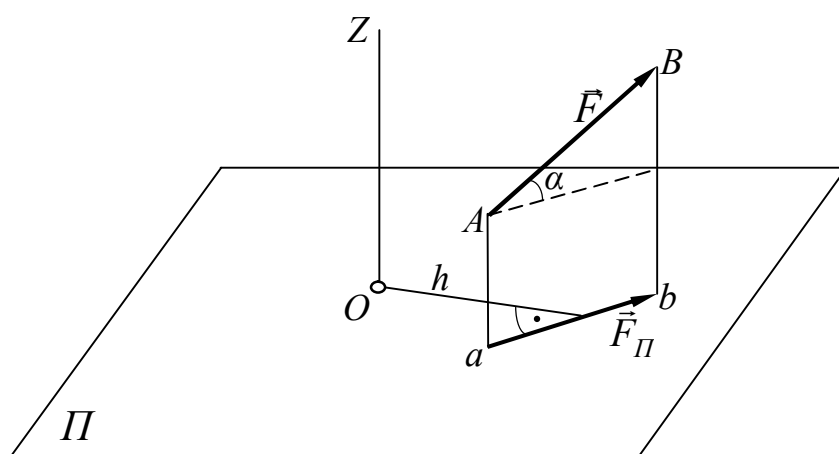


Рис. 1.9

Момент будет положительным, когда сила (или \vec{F}_Π) стремится повернуть тело против движения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси, в противном случае – отрицательным.

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях: когда сила параллельна оси ($F_{\Pi} = 0$) и когда пересекает ось ($h = 0$), или, иначе, если сила и ось компланарны.

8. *Главный вектор и главный момент системы сил.* Пусть дана система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. Главным вектором системы сил называют величину, равную векторной сумме всех этих сил. Обозначим главный вектор через \vec{R} :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.4)$$

Главный вектор равен замыкающей стороне силового многоугольника (рис. 1.10).

Главным моментом системы сил относительно центра называют величину, равную сумме моментов всех сил относительно этого центра. Обозначим главный момент через \vec{M}_0 , где индексом указан центр, относительно которого вычисляются моменты:

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k). \quad (1.5)$$

Главный момент также можно изобразить замыкающей стороной многоугольника, построенного из моментов сил (рис. 1.11).

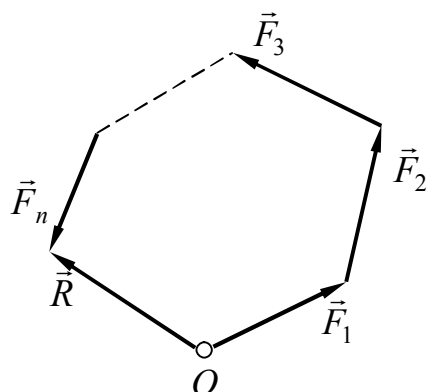


Рис. 1.10

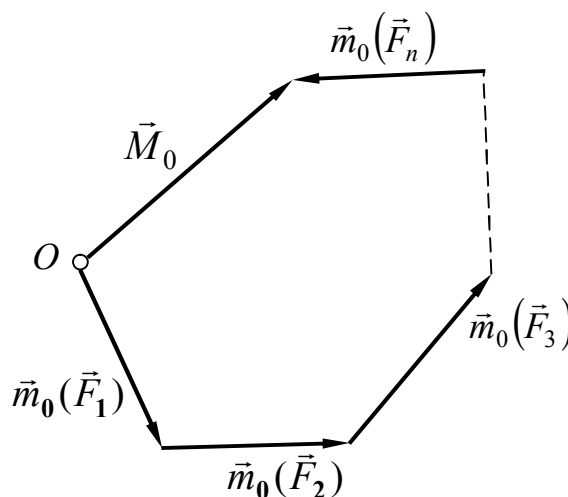


Рис. 1.11

Главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M}_0 являются основными характеристиками системы сил.

Приведем формулы вычисления \vec{R} и \vec{M}_0 вначале для пространственной, а затем плоской систем сил. Разложим эти векторы на составляющие, параллельные координатным осям:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}, \\ \vec{M}_0 &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Вычислим проекции главного вектора и главного момента на оси координат, проецируя равенства (1.4) и (1.5) на эти оси:

$$\begin{aligned}R_x &= \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}, \\ M_x &= \sum m_x(\vec{F}_k), \quad M_y = \sum m_y(\vec{F}_k), \quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_k),\end{aligned}\quad (1.7)$$

где M_x, M_y, M_z – главные моменты относительно координатных осей, а $m_x(\vec{F}_k), m_y(\vec{F}_k), m_z(\vec{F}_k)$ – моменты заданных сил относительно этих осей, т.к. проекция момента силы относительно точки на ось является моментом силы относительно оси. Модули R и M_0 определяются по найденным проекциям:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.8)$$

Если задана плоская система сил (например, силы лежат в плоскости Oxy), то формулы (1.7) и (1.8) упрощаются, т.к. $R_z \equiv 0, M_x \equiv 0, M_y \equiv 0$ – все силы лежат в одной плоскости с осями координат Ox, Oy :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j}, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \\ M_0 &= M_z = \sum m_0(\vec{F}_k).\end{aligned}\quad (1.9)$$

В этом случае главный момент равен сумме алгебраических моментов сил относительно точки O .

Пример 1.1. К вершинам квадрата со стороной $a = 0,5$ м приложены три равные по модулю силы $F = 20$ Н (рис. 1.12,а). Вычислить главный вектор и главный момент данной плоской системы сил относительно точки O .

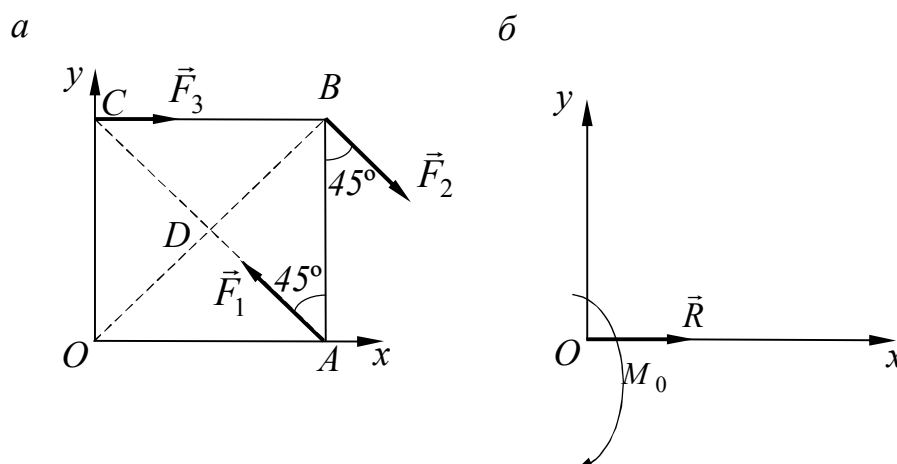


Рис. 1.12

Главный вектор, его проекции на оси координат, главный момент для плоской системы сил вычисляем по формулам (1.9):

$$R_x = \sum F_{kx} = -F_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 45^\circ + F_3 = 20 \text{ Н},$$

$$R_y = \sum F_{ky} = F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\vec{R} = \vec{R}_x \vec{i} + \vec{R}_y \vec{j} = 20 \vec{i},$$

$$M_0 = \sum m_0(\vec{F}_k) = F_1 h_1 - F_2 h_2 - F_3 h_3,$$

где $h_1 = OD = a \cdot \cos 45^\circ = 0,35 \text{ м}$, $h_2 = OB = 2a \cdot \sin 45^\circ = 0,7 \text{ м}$,
 $h_3 = OC = a = 0,5 \text{ м}$. Тогда $M_0 = -17 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Главный вектор и главный момент показаны на рис. 1.12,б.

Пример 1.2. К вершинам A, C, D прямоугольного параллелепипеда приложены четыре равные по модулю силы $F = 100 \text{ Н}$ (рис. 1.13,а). Стороны параллелепипеда: $OA = 1 \text{ м}$, $OF = OC = 2 \text{ м}$.

Найти главный вектор и главный момент системы сил относительно точки O .

Для пространственной системы сил главный вектор, главный момент, их проекции на оси координат вычисляем по формулам (1.6)-(1.8):

$$R_x = 0, \quad M_x = -F_2 \cdot OC + F_3 \cdot OC = 0,$$

$$R_y = F_4 = 100 \text{ Н}, \quad M_y = -F_1 \cdot OA + F_2 \cdot OA = 0,$$

$$R_z = F_1 - F_2 + F_3 = 100 \text{ Н}, \quad M_z = F_4 \cdot OA = 100 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 100 \sqrt{2} = 141 \text{ Н}, \quad \vec{R} = 100 \vec{j} + 100 \vec{k},$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad \vec{M}_0 = 100 \vec{k}.$$

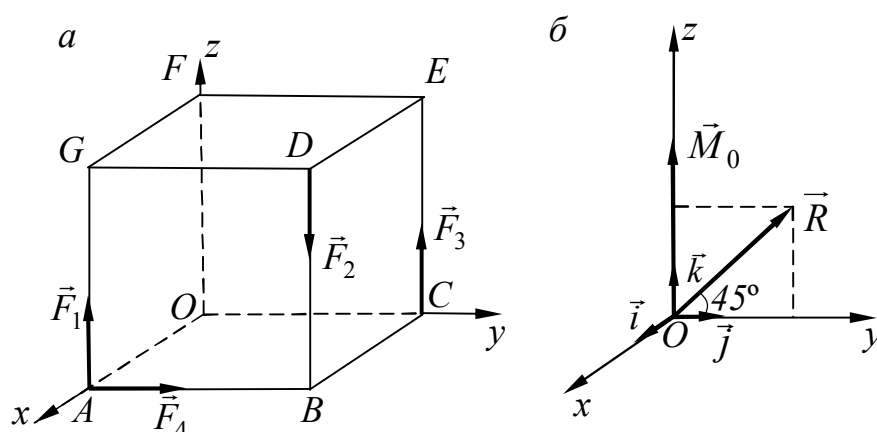


Рис. 1.13

Главный вектор \vec{R} лежит в плоскости Oyz , главный момент \vec{M}_0 направлен по оси Oz (рис. 1.13,б).

9. *Пара сил.* Парой сил называется система двух параллельных сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой (рис. 1.14):

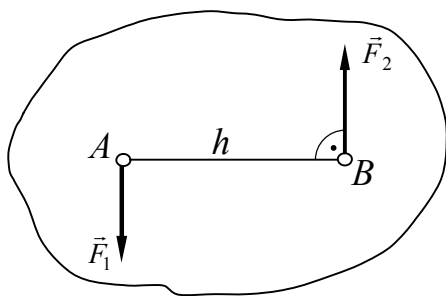


Рис. 1.14

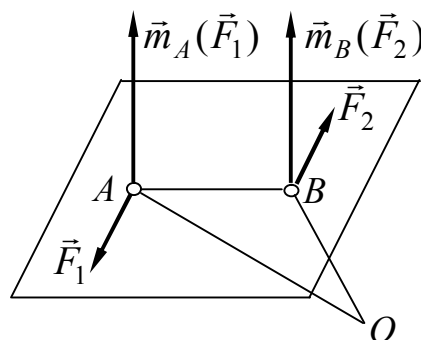


Рис. 1.15

Вычислим главный вектор и главный момент пары сил относительно любой точки (рис. 1.15):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) = \vec{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{OB} \times \vec{F}_2 = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F}_1$$

Из рисунка видно, что $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$, тогда

$$\vec{M}_0 = -\vec{AB} \times \vec{F}_1 = \vec{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{AB} \times \vec{F}_2.$$

Но $\vec{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{m}_B(\vec{F}_1)$ и $\vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{m}_A(\vec{F}_2)$ — моменты одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Итак, главный вектор пары сил равен нулю, а главный момент относительно любой точки пространства равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы и, следовательно, не зависит от выбора точки O :

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_B(\vec{F}_1) = \vec{m}_A(\vec{F}_2). \quad (1.10)$$

10. *Момент пары сил.* Пара сил является такой системой сил, которую упростить нельзя; она не имеет равнодействующей. Для количественной характеристики действия пары сил на твердое тело введем понятие момента пары. Моментом пары называют величину, равную моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы. Обозначим этот момент через \vec{m} (рис. 1.16):

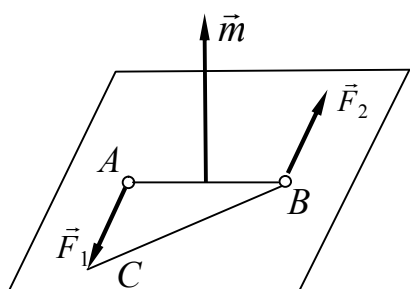


Рис. 1.16

$$\vec{m} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2 = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1. \quad (1.11)$$

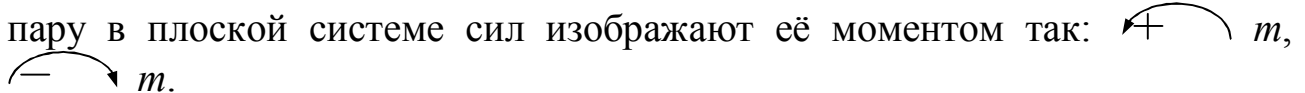
Условимся пока момент пары прикладывать к середине плеча. Далее будет показано, что момент пары можно прикладывать в любой точке тела. Модуль момента пары определяется произведением модуля силы на плечо пары:

$$m = F \cdot h = 2S_{\Delta ABC}, \quad (1.12)$$

где $F = F_1 = F_2$ – модуль силы;

h – кратчайшее расстояние между линиями действия сил (плечо пары).

Вектор \vec{m} направлен перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда вращение плоскости кажется происходящим против хода часовой стрелки.

В частном случае, когда изучается плоская система сил, моменты пар можно считать алгебраическими величинами. Правило знаков моментов такое же, что и для алгебраического момента силы относительно точки. Если пара поворачивает свою плоскость против хода часовой стрелки, то ее момент положителен, по ходу часовой стрелки – отрицателен. Часто пару в плоской системе сил изображают её моментом так: 

Сформулируем последнее определение.

11. *Связи, реакции связей.* Если изучаемое тело является несвободным, то некоторые перемещения ему запрещены вследствие ограничений, накладываемых скрепленными или соприкасающимися с ним телами. Связями называют всё то, что ограничивает перемещения изучаемого тела. Ограничения реализуются какими-нибудь телами, например опорными поверхностями, шарнирами, нитями и др. Большинство окружающих нас тел являются несвободными. Изучаемое тело взаимодействует со связями. Сила (иногда и система сил), с которой тело, осуществляющее связь, действует на изучаемое тело, называется реакцией связи. Она направлена в сторону, противоположную той, куда запрещает перемещаться телу эта связь.

На рис. 1.17 показаны основные типы связей и их реакции:

- a* – гладкая опорная поверхность и опорная точка (ребро);
- б* – нерастяжимая нить (трос, канат, цепь, ремень);
- в* – цилиндрический шарнир (подшипник): шарнирно-неподвижная опора *A* и шарнирно-подвижная опора *B*;
- г* – невесомый стержень с шарнирами на концах;
- д* – сферический (шаровой) шарнир;

- e — подпятник;
 $жс$ — жесткая заделка (реакции показаны для плоской системы сил);
 $з$ — скользящая заделка.

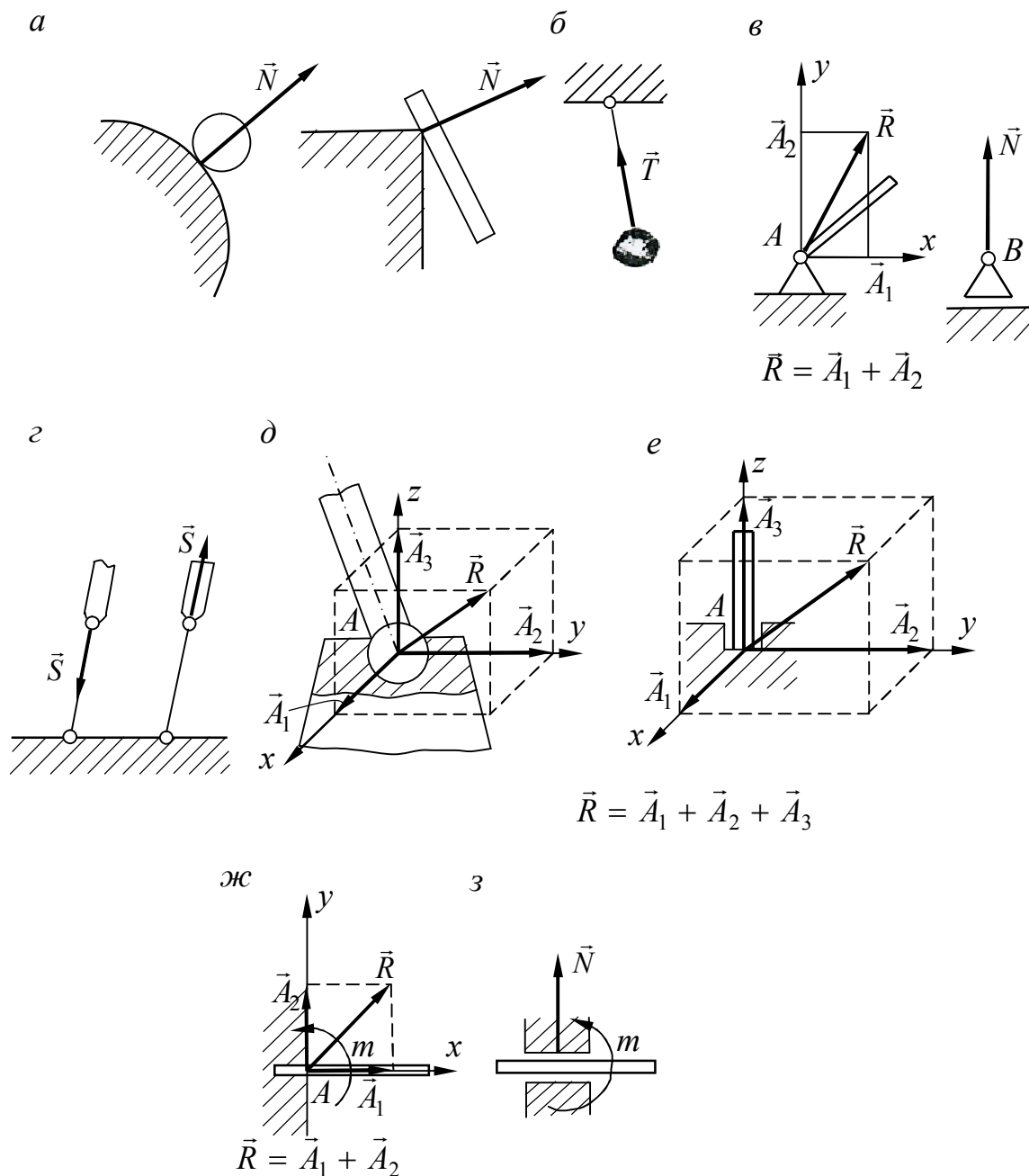


Рис. 1.17

На рис. 1.17, в, д, е, жс реакции разложены на составляющие, направленные вдоль координатных осей.

Для рассмотренных выше связей можно сделать необходимые пояснения.

а. Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно пренебречь. Реакция гладкой поверхности направлена по нор-

мали к этой поверхности и приложена к рассматриваемому телу. Реакция гладкого ребра направлена по нормали к поверхности тела.

б. Реакция \vec{T} растянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса и приложена к рассматриваемому телу.

в. В цилиндрическом шарнире имеем вал (цапфу) и втулку (обойму) (рис. 1.18).

Тело, жестко скрепленное с валом, может только вращаться вокруг оси шарнира, перпендикулярной плоскости чертежа, и свободно перемещаться вдоль оси шарнира.

Реакция \vec{R} цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, и проходит через центр шарнира.

Для силы \vec{R} в этом случае неизвестны ни модуль (R), ни направление этой реакции. Реакция цилиндрического шарнира раскладывается по двум взаимно перпендикулярным направлениям вдоль осей Ox и Oy , так что $\vec{R} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

г. Реакция растянутого стержня направлена вдоль оси стержня от узла и приложена к рассматриваемому телу, реакция сжатого стержня – направлена к узлу и приложена к рассматриваемому телу.

д. При сферическом шарнире тело может перемещаться так, что центр шарнира остается неподвижным, реакция \vec{R} сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. В этом случае для реакции \vec{R} неизвестны ни модуль реакции R , ни углы, образуемые ею с осями координат x , y , z . Реакция раскладывается по трем взаимно перпендикулярным направлениям вдоль осей Ox , Oy , Oz , так что $\vec{R} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$.

е. При использовании подпятника (подшипника с упором) тело также не может совершать никаких поступательных перемещений в пространстве.

ж. Реакция жесткой заделки состоит из силы, которая неизвестна ни по величине, ни по направлению, и пары сил с моментом m , называемым реактивным моментом. Неизвестная реакция \vec{R} раскладывается по двум взаимно перпендикулярным направлениям, так что $\vec{R} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

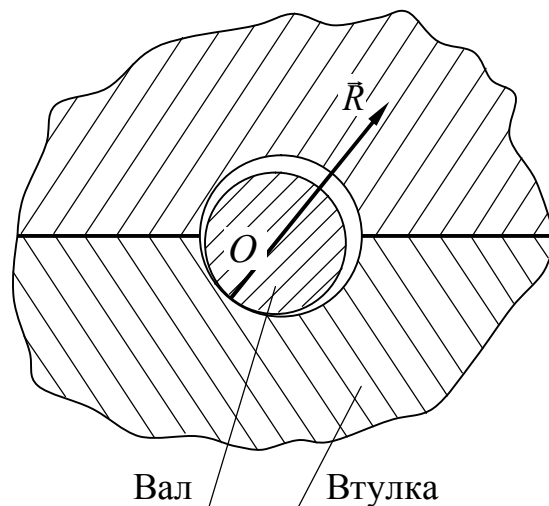


Рис. 1.18

3. Для показанной скользящей заделки реакция состоит из силы \vec{N} и пары сил с моментом m .

1.2. Аксиомы статики

Как было отмечено выше, в основе классической механики лежат законы Галилея-Ньютона, или аксиомы механики. На базе этих аксиом строится динамика, формируются и доказываются теоремы о движении (равновесии) материальных объектов. Поскольку статика излагается ранее динамики, то в ее основу положено несколько основных принципов, принимаемых без доказательства, которые называются аксиомами статики.

1. *Аксиома уравнивания двух сил.* Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей точки их приложения, в противоположные стороны: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $F_1 = F_2$. Такая система сил изображена на рис. 1.3 и названа простейшей уравновешенной системой сил.

2. *Аксиома добавления или снятия уравновешенной системы сил.* Не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, можно добавить к этой системе или отнять от нее уравновешенную систему сил.

Пусть система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \propto 0$, $\{\vec{S}_1, \vec{S}_2\} \propto 0$.

Содержание аксиомы показано на рис. 1.19.

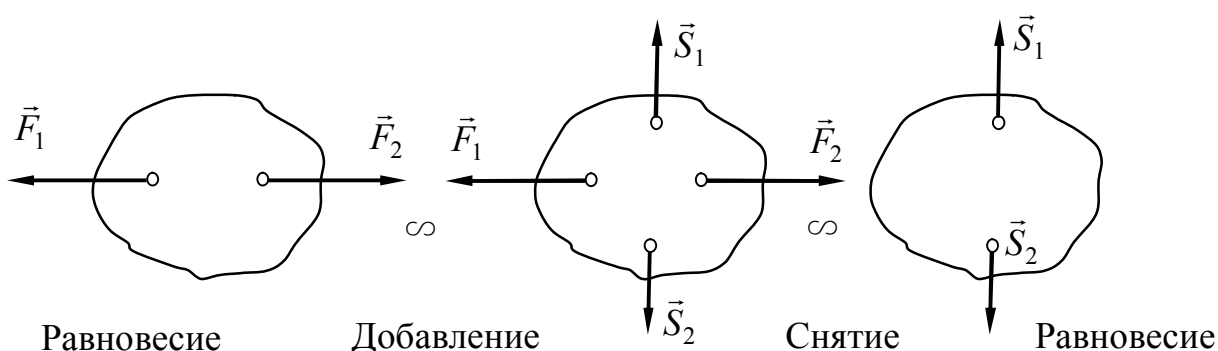


Рис. 1.19

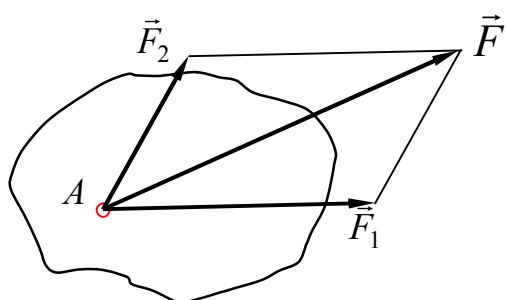


Рис. 1.20

3. *Аксиома сложения двух сил.* Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна их геометрической сумме, т.е. выражается по модулю и направлению диагональю параллело-

грамма, построенного на этих силах (рис. 1.20).

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \propto \vec{F},$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

4. *Аксиома взаимодействия.* Два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по модулю и направленными по одной прямой в противоположные стороны (рис 1.21).

Эта аксиома является одновременно аксиомой динамики и представляет хорошо известный третий закон Ньютона.

Полезно отметить, что силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приложены к различным телам, поэтому они не образуют уравновешенной системы сил.

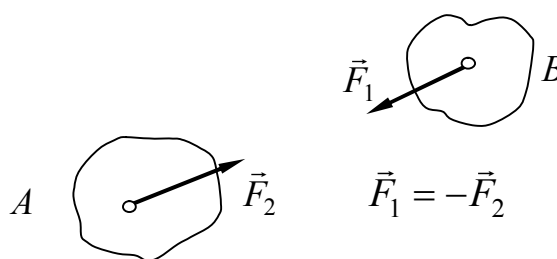


Рис. 1.21

5. *Аксиома отвердевания.* Равновесие деформируемого тела

не нарушится, если тело отвердеет. Согласно этой аксиоме условия равновесия системы сил, полученные для абсолютно твердого тела, должны выполняться и для нетвердых тел. Только нужно помнить, что для равновесия деформируемых тел эти условия являются необходимыми, но не всегда достаточными.

6. *Аксиома освобожденности от связей.* Несвободное тело можно рассматривать как свободное, отбросив связи и заменив их действие соответствующими реакциями.

Эта аксиома позволяет все законы равновесия и движения, полученные для свободного тела, распространять на несвободные тела.

Определение реакций связей имеет то практическое значение, что зная их, мы, согласно аксиоме 4, будем знать и силы давления на связи, т.е. исходные данные, которые необходимы для расчета прочности соответствующих частей конструкции.

Вопросы для самопроверки

1. Какова простейшая уравновешенная система сил?
2. Чему равна равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, модули которых равны 20 Н и угол между ними 60°?

3. Можно ли разложить заданную силу на две составляющие так, чтобы каждая из них по модулю равнялась данной силе? Если да, то при каком угле между составляющими это будет?
4. Запишите по памяти формулы для вычисления главного вектора и главного момента плоской и пространственной систем сил.
5. Укажите, чему равен главный вектор пары сил.
6. Зависит ли главный момент пары сил от выбора центра?
7. Укажите, сколько неизвестных величин реакций будет, если связью является жесткая заделка, скользящая заделка.

Глава 2. Первая задача статики. Приведение системы сил к простейшему виду

В этой главе рассмотрим задачу о замене данной системы сил другой системой, ей эквивалентной и более простой. Эту задачу называют также приведением системы сил к простейшему виду или задачей сложения сил системы.

Предварительно рассмотрим простейшие теоремы статики, устанавливающие свойства сил и пар сил для абсолютно твердого тела.

2.1. Теоремы о свойствах сил и пар сил

Теорема 1. О переносе точки приложения сил. *Не изменяя действия силы на абсолютно твердое тело, точку приложения силы можно переносить по ее линии действия.*

Пусть в точке A абсолютно твердого тела приложена сила \vec{F} (рис. 2.1,а). Рассмотрим три силы \vec{F} , \vec{F}' , \vec{F}'' , причем $F = F' = F''$, $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \infty 0$, $\{\vec{F}, \vec{F}''\} \infty 0$. В точке B добавим уравновешенную систему сил $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \infty 0$ (рис. 2.1,б), а затем снимем уравновешенную систему сил $\{\vec{F}, \vec{F}''\} \infty 0$ (рис. 2.1,в). В точке B получим силу $\vec{F}' = \vec{F}$.

Выполненные рассуждения можно представить в виде

$$\vec{F} \infty \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\} \infty \vec{F}', \quad \vec{F}' = \vec{F}.$$

Теорема доказана. В абсолютно твердом теле сила – скользящий вектор.

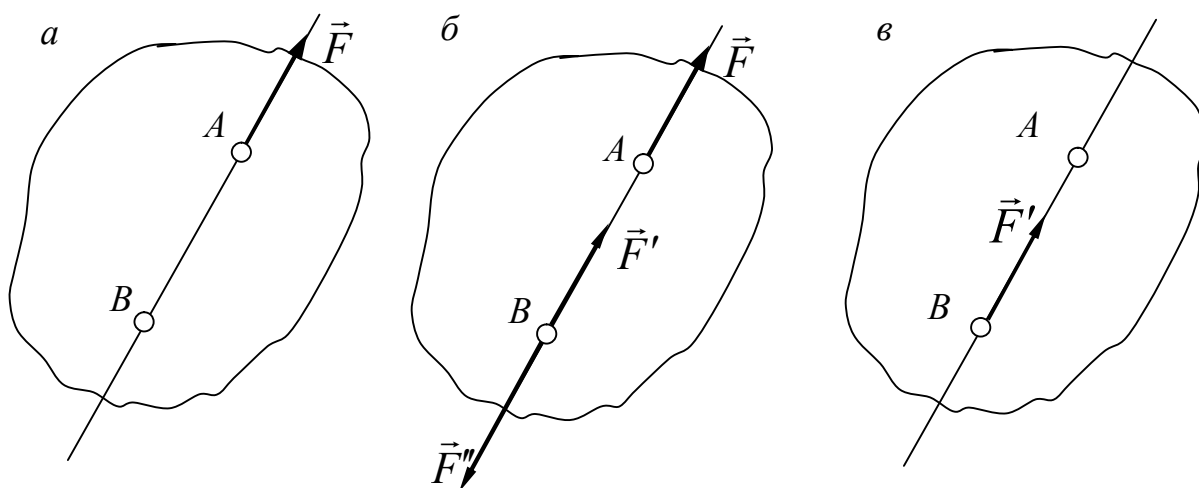


Рис. 2.1

Теорема 2. О трех силах.

Если три непараллельные силы, действующие на абсолютно твердое тело и лежащие в одной плоскости, уравновешиваются, то их линии действия пересекаются в одной точке.

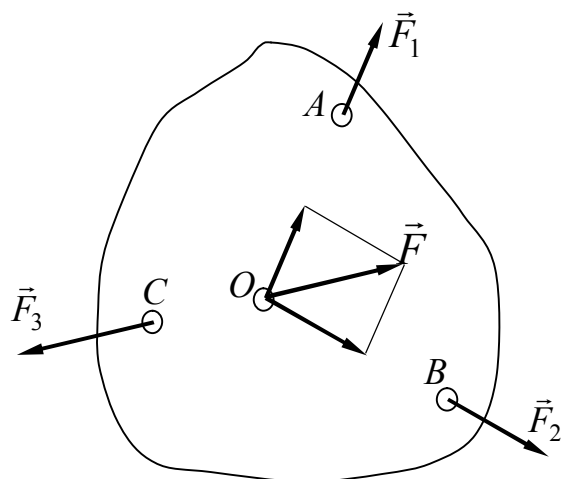


Рис. 2.2

Пусть в точках А, В, С абсолютно твердого тела (рис. 2.2) приложены три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости и удовлетворяющие условию $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \propto 0$.

Пусть точка О – точка пересечения линий действия сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . По доказанной теореме перенесем силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 в точку О и по аксиоме 3 (о сложении двух сил) заменим их равнодействующей \vec{F} . После

этого на тело будут действовать две силы \vec{F} и \vec{F}_3 , которые образуют уравновешенную систему сил $\{\vec{F}, \vec{F}_3\} \propto 0$ и, следовательно, лежат на одной прямой. Таким образом, линия действия силы \vec{F}_3 также проходит через точку О – теорема доказана.

Теорема о трех силах может быть использована в задачах статики для определения направления реакции цилиндрического шарнира, если тело

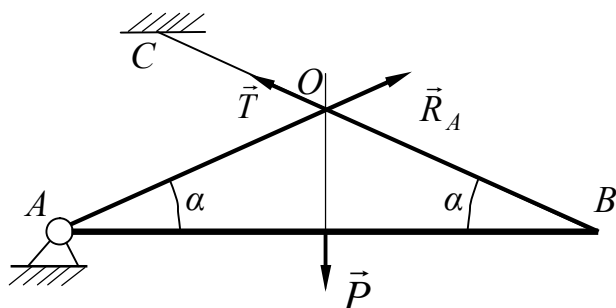


Рис. 2.3

находится под действием трех сил (рис. 2.3). Здесь АВ – балка, А – шарнирно-неподвижная опора, ВС – нить, \vec{P} – сила тяжести, \vec{T} – реакция нити. Реакция шарнирно-неподвижной опоры проходит через точку О – точку пересечения линий действия сил \vec{P} и \vec{T} и образует угол α с балкой АВ.

Рассмотрим основные свойства пар сил, которые устанавливаются несколькими теоремами, легко доказываемыми с помощью аксиом (доказательства опустим).

Теорема 3. Об эквивалентности пар на плоскости.

Две пары, расположенные на одной плоскости, эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты.

Из приведенной теоремы следует, что действие пары сил на тело определяется двумя факторами: плоскостью действия пары и алгебраическим моментом.

Следствия: 1. Пару сил можно переносить в плоскости ее действия куда угодно. 2. У пары сил можно изменять одновременно величину силы и плечо, сохранив момент.

Теорема 4. О переносе пары на параллельную плоскость.

Действие пары сил на тело не изменяется от переноса ее на параллельную плоскость.

Из приведенных двух теорем следует: 1) точка приложения вектора момента пары может быть любой в пространстве и, следовательно, момент пары является *свободным вектором* и его не обязательно прикладывать в середине отрезка AB (плеча); 2) две пары сил эквивалентны, если их моменты геометрически равны, т.е. равны по модулю и направлены одинаково.

Теорема 5. О сложении пар.

Пары сил, действующие на тело, можно заменить одной эквивалентной парой, момент которой равен сумме моментов данных пар.

Пусть на тело действует система n пар с моментами $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$. Эту систему пар можно заменить одной эквивалентной парой с моментом

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_s. \quad (2.1)$$

Момент эквивалентной пары можно определить по правилу многоугольника векторов (рис. 2.4).

Полезно отметить, что сформулированная теорема представляет решение первой задачи статики для системы пар.

Для определения модуля и направления момента \vec{m} эквивалентной пары можно использовать аналитический способ нахождения суммы векторов, который был рассмотрен при определении модуля главного вектора и главного момента.

Проекции момента эквивалентной пары на оси:

$$m_x = \sum m_{sx}; \quad m_y = \sum m_{sy}; \quad m_z = \sum m_{sz}. \quad (2.2)$$

Модуль момента эквивалентной пары:

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим условия равновесия пар.

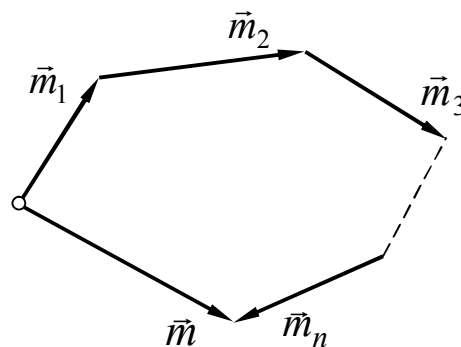


Рис. 2.4

Для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар равнялась нулю:

$$\sum \vec{m}_s = 0 \quad (2.4)$$

– условие равновесия в векторной форме;

$$\sum m_{sx} = 0; \quad \sum m_{sy} = 0; \quad \sum m_{sz} = 0 \quad (2.5)$$

– условия равновесия в скалярной форме.

В частном случае, когда пары лежат на одной плоскости, очевидно, что будет выполняться только одно условие: сумма алгебраических моментов пар будет равна нулю: $\sum m_s = 0$.

Отметим, что сформулированные условия представляют собой решение второй задачи статики для системы пар.

Рассмотрим примеры на сложение пар.

Пример 2.1. Сложить три пары сил, моменты которых заданы: $m_1 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $m_2 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $m_3 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Пары лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 2.5,а).

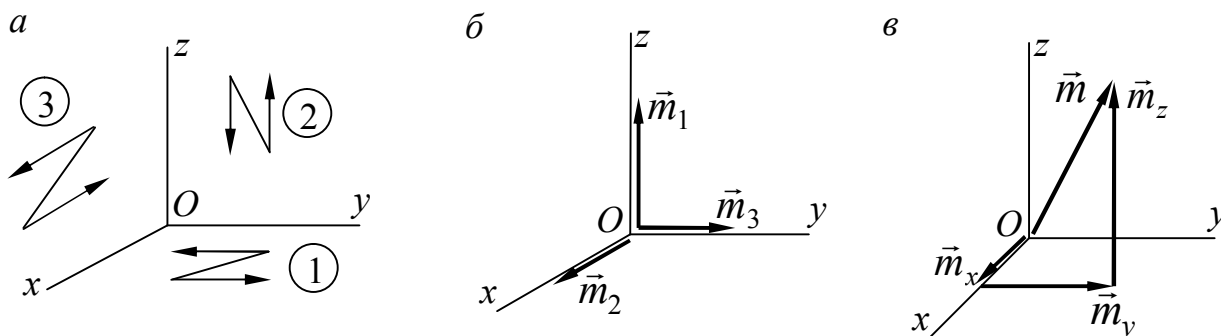


Рис. 2.5

Строим векторы моментов пар, приложив их в точке O (рис. 2.5,б). Момент эквивалентной пары $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3$. Проекции момента на оси: $m_x = m_2 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $m_y = m_3 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $m_z = m_1 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Модуль момента $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Момент эквивалентной пары показан на рис. 2.5,в.

Пример 2.2. Сложить эти же пары, если они лежат в одной плоскости, например в плоскости xOy (рис. 2.6,а).

В этом случае моменты можно рассматривать как алгебраические величины $m_1 = -2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $m_2 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $m_3 = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Момент эквивалентной пары $m = m_1 + m_2 + m_3 = -2 + 2 - 1 = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Эквивалентная пара с моментом m показана на рис. 2.6,б.

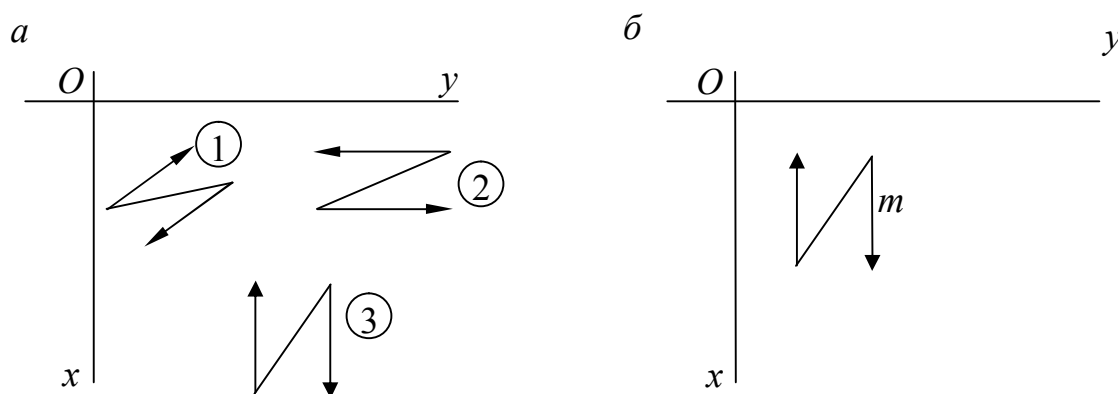


Рис. 2.6

Рассмотрев простейшие теоремы, перейдем к решению задачи о приведении системы сил к простейшему виду или, другими словами, задаче замены данной системы сил другой системой, ей эквивалентной и более простой. Эта задача может быть решена различными методами. Рассмотрим метод, предложенный в XIX веке французским ученым Пуансо (1777-1859) и основанный на приведении сил к центру. Этот метод использует лемму о параллельном переносе силы из точки приложения в любую другую точку тела (центр приведения).

2.2. Лемма о переносе силы в заданную точку

Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку тела, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту силы относительно той точки, куда эта сила переносится.

Пусть в точке A тела действует сила \vec{F} и задана точка O – центр приведения (рис 2.7,а). Приложим в точке O две уравновешенные силы \vec{F}' , \vec{F}'' , равные и параллельные силе \vec{F} (рис. 2.7,б). Тогда сила \vec{F} эквивалентна трем силам \vec{F} , \vec{F}' , \vec{F}'' , т.е. $\vec{F} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$. Но силы \vec{F} и \vec{F}'' образуют пару сил с моментом \vec{m} . По определению момента пары он равен моменту силы \vec{F} относительно центра O , $\vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F})$. Таким образом силу \vec{F} можно заменить равной ей силой \vec{F}' , приложенной в центре приведения, и парой сил $\{\vec{F}, \vec{F}''\}$ с моментом $\vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F})$ (рис. 2.7,в).

Выполненные действия можно представить в виде записи:

$$\vec{F} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\} \sim \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\} \sim \{\vec{F}', \vec{m}\}, \quad \vec{F}' = \vec{F}, \quad \vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F}).$$

Замечание. Из приведенных рассуждений следует, что при параллельном переносе силы она заменяется тремя силами, т.е. от меньшего количества сил переходим к большему. Однако ниже будет показано, что

при использовании этого метода любая система сил может быть заменена тремя силами.

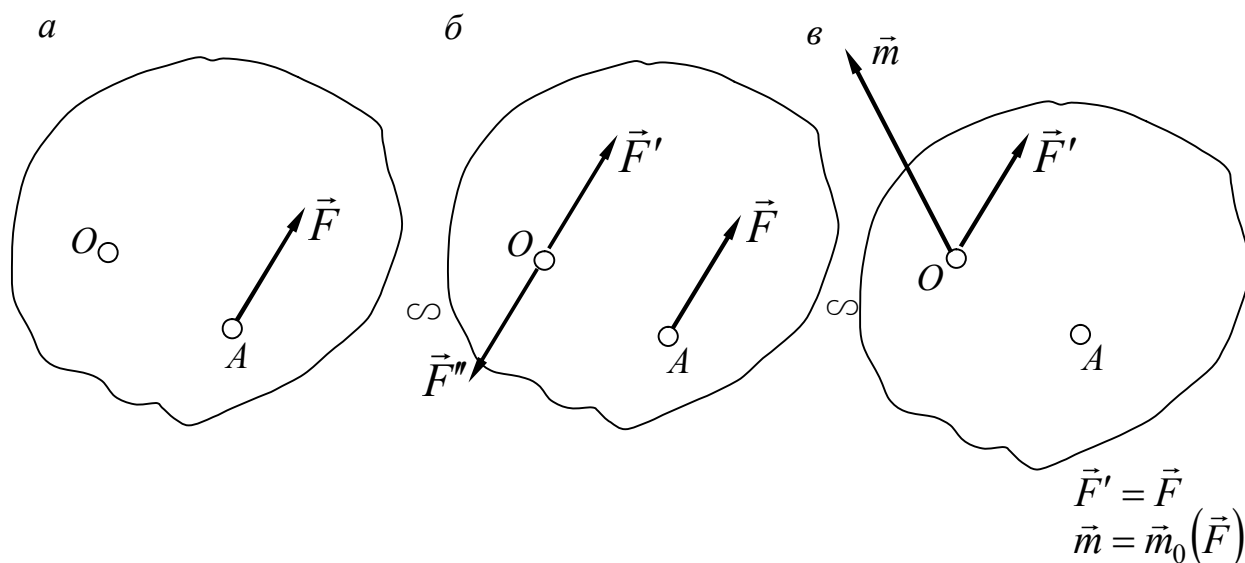


Рис. 2.7

Рассмотрим задачу о замене произвольной системы сил простейшей эквивалентной системой. Эта задача решается с помощью теоремы, которую называют основной теоремой статики, теоремой о приведении системы сил к центру или теоремой Пуансо.

2.3. Теорема Пуансо о приведении системы сил к центру

Произвольную систему сил, действующих на твердое тело, в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы и пары сил. Сила равна главному вектору системы сил и приложена в центре приведения, момент пары равен главному моменту системы сил относительно центра приведения.

Доказательство. Пусть дана произвольная система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ (рис. 2.8,а). Возьмем любую точку тела O и примем ее в качестве центра приведения. На рис. 2.8,а показана одна из сил системы \vec{F}_s , так что $(s = 1, 2, \dots, n)$. Используя лемму Пуансо о параллельном переносе силы, приведем все силы системы к центру приведения, причем $\vec{F}_s \sim \{\vec{F}'_s, \vec{m}_s\}$, $(s = 1, 2, \dots, n)$, $\vec{F}'_s = \vec{F}_s$, $\vec{m}_s = \vec{m}_0(\vec{F}_s)$. В результате в центре O получаем систему сил $\{\vec{F}'_s\}$, приложенных в одной точке, и систему пар с моментами \vec{m}_s . Складывая силы, приложенные в точке O , получим одну силу $\vec{R} = \sum \vec{F}'_s = \sum \vec{F}_s$, равную главному вектору системы сил. Складывая пары, получим одну пару с моментом $\vec{m} = \sum \vec{m}_s$. Учитывая значения моментов присоединенных пар, получим значение момента эквивалентной

пары $\vec{m} = \sum \vec{m}_S = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_S) = \vec{M}_0$ – момент пары равен главному моменту системы сил относительно центра O .

Таким образом, система сил заменена силой, которая равна главному вектору, и парой, момент которой равен главному моменту относительно центра приведения:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}, \vec{M}_0\}, \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_S; \quad \vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_S).$$

Доказанная теорема представляет собой решение первой задачи статики – сложения сил, действующих на твердое тело, и приведения системы сил к простейшему виду. Ниже будет показано, что в частных случаях при приведении конкретных систем сил к простейшему виду эквивалентная система сил может состоять или из одной силы, или из двух (пары) сил.

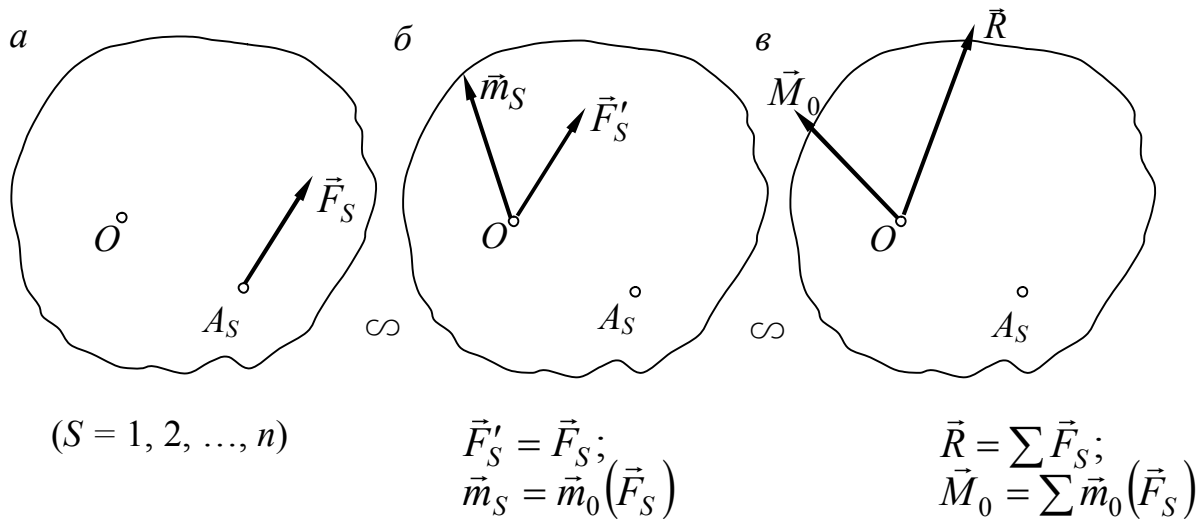


Рис. 2.8

Рассмотрев основную теорему статики, сформулируем следствие из нее – признак эквивалентности систем сил.

Полезно отметить, что в определениях статики приведено понятие эквивалентных систем сил (определение 3). Формулируемое следствие устанавливает условия, когда одна система сил будет эквивалентна другой.

Следствие. Системы сил будут эквивалентны, если у них равны главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра.

Рассмотрим две системы сил, обозначив их $\{C1\}$ и $\{C2\}$ соответственно. Запишем главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра для этих систем. Пусть для системы $\{C1\} \rightarrow \vec{R}^{(1)}, \vec{M}_0^{(1)}$; для системы сил $\{C2\} \rightarrow \vec{R}^{(2)}, \vec{M}_0^{(2)}$.

В сформулированном следствии утверждается: если $\vec{R}^{(1)} = \vec{R}^{(2)}$, $\vec{M}_0^{(1)} = \vec{M}_0^{(2)}$, то $\{C1\} \sim \{C2\}$ – системы сил эквивалентны.

Полезно отметить, что ранее был сформулирован признак эквивалентности пар сил – равенство моментов пар. Нетрудно видеть, что признак эквивалентности пар вытекает из общего признака эквивалентности систем сил.

Используем полученный вывод для доказательства важной теоремы статики – *теоремы о моменте равнодействующей*, которая впервые была получена для системы сходящихся сил французским ученым Вариньоном (1654-1722). Эта теорема применяется в случае, когда система сил имеет равнодействующую (что будет рассмотрено ниже).

2.4. Теорема Вариньона (теорема о моменте равнодействующей)

Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра или оси равен сумме моментов всех сил системы относительно этого центра или оси.

Доказательство. Пусть система сил, приложенных к телу, имеет равнодействующую, т.е. $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{F}$ (рис. 2.9).

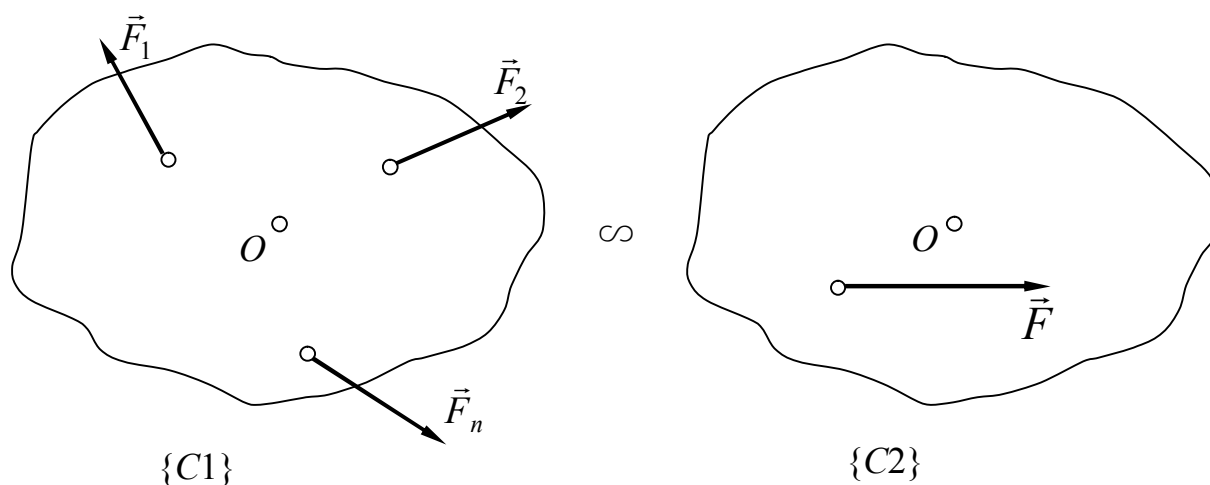


Рис. 2.9

Вычислим главные векторы и главные моменты относительно центра O у двух эквивалентных систем сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \equiv \{C1\}$ и равнодействующей $\vec{F} \equiv \{C2\}$.

Для системы $\{C1\} \rightarrow \vec{R}^{(1)} = \sum \vec{F}_S$, $\vec{M}_0^{(1)} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_S)$; для системы $\{C2\} \rightarrow \vec{R}^{(2)} = \vec{F}$, $\vec{M}_0^{(2)} = \vec{m}_0(\vec{F})$.

Из равенства главных векторов $\vec{R}^{(1)} = \vec{R}^{(2)}$ следует $\vec{F} = \sum \vec{F}_S$, т.е. равнодействующая, если она существует, равна главному вектору системы сил.

Из равенства главных моментов $\vec{M}_0^{(1)} = \vec{M}_0^{(2)}$ получаем теорему

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_S) \quad (2.6)$$

– теорема относительно центра доказана.

Проецируя (2.6) на оси координат, получим теорему о моменте равнодействующей относительно оси:

$$\left. \begin{aligned} x) \quad m_x(\vec{F}) &= \sum m_x(\vec{F}_S), \\ y) \quad m_y(\vec{F}) &= \sum m_y(\vec{F}_S), \\ z) \quad m_z(\vec{F}) &= \sum m_z(\vec{F}_S). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Вычислим с помощью теоремы Вариньона момент силы, приложенной в точке $A(x, y, z)$, относительно координатных осей (рис. 2.10).

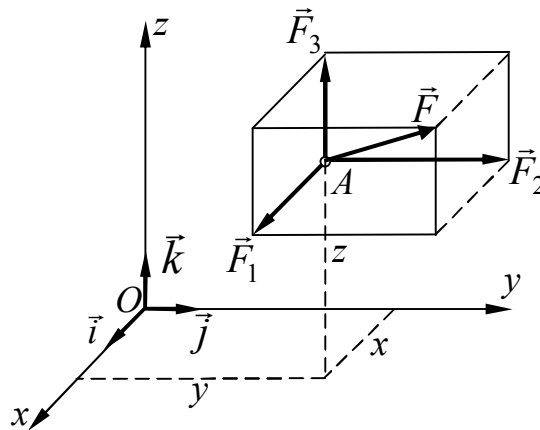


Рис. 2.10

Разложим силу \vec{F} на составляющие, параллельные координатным осям (\vec{F} – равнодействующая трех сил):

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

По теореме Вариньона находим моменты составляющих сил:

$$\left. \begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yZ - zY, \\ m_y(\vec{F}) &= zX - xZ, \\ m_z(\vec{F}) &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Эти формулы представляют собой аналитические выражения моментов силы относительно осей координат. Заметим, что из первой формулы остальные две можно получить циклической перестановкой $x \rightarrow y, y \rightarrow z,$

$z \rightarrow x$. Эти же формулы можно получить из ранее приведенной формулы (1.2), раскрыв определитель третьего порядка.

Заключение. В главе приведено решение задачи о замене произвольной системы сил простейшей эквивалентной системой. В следующей главе будут рассмотрены различные частные случаи и введено понятие о некоторых неизменных величинах для системы сил, которые остаются одинаковыми при перемещении центра приведения.

Вопросы для самопроверки

1. Каким вектором (свободным, скользящим, приложенным) является сила в абсолютно твердом теле?
2. Какому количеству сил эквивалентна произвольная система сил при приведении ее к центру в общем случае?
3. Укажите сходство и различие между равнодействующей и главным вектором системы сил.
4. Какие системы сил называются эквивалентными? Укажите условия эквивалентности.
5. Будут ли эквивалентны две силы \vec{P} и \vec{Q} , приложенные к телу, если они равны по модулю, лежат на параллельных линиях и направлены одинаково?
6. Сформулируйте свойства пары сил. Каким вектором является момент пары сил?
7. Сформулируйте теорему Вариньона для плоской и пространственной систем сил.

Глава 3. Частные случаи приведения системы сил к центру. Инварианты системы сил

3.1. Анализ частных случаев приведения

При приведении конкретных систем сил к простейшему виду после вычисления главного вектора и главного момента возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned} 1. \vec{R} \neq 0, \quad \vec{M}_0 = 0; \quad 2. \vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 \neq 0; \\ 3. \vec{R} \neq 0, \quad \vec{M}_0 \neq 0; \quad 4. \vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 = 0$ (рис. 3.1).

Если главный момент \vec{M}_0 равен нулю (многоугольник моментов замкнут), а главный вектор отличен от нуля, то система сил заменяется одной силой. Эта сила является равнодействующей, и ее линия действия проходит через выбранный центр O .

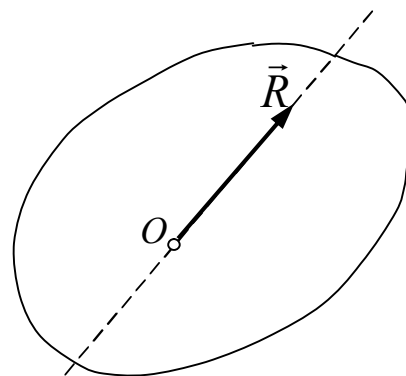


Рис. 3.1

Этот случай возможен, например, когда изучается приведение к простейшему виду системы сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 3.2,а). Главный момент \vec{M}_0 в этом случае тождественно равен нулю, и при $\vec{R} \neq 0$ получаем теорему о сложении системы сходящихся сил.

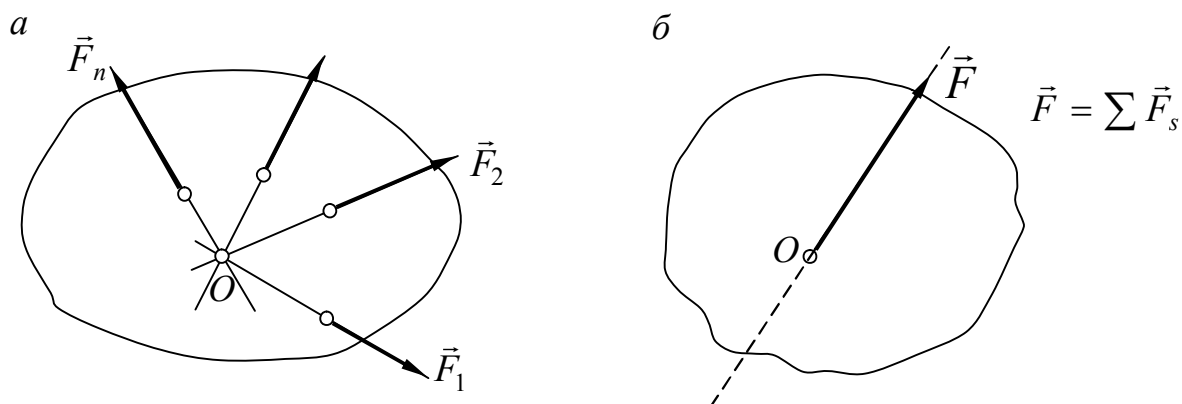


Рис. 3.2

Теорема. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную сумме данных сил, а ее линия действия проходит через точку пересечения линий действия этих сил.

На рис. 3.2,б показана равнодействующая системы сходящихся сил, равная главному вектору этой системы.

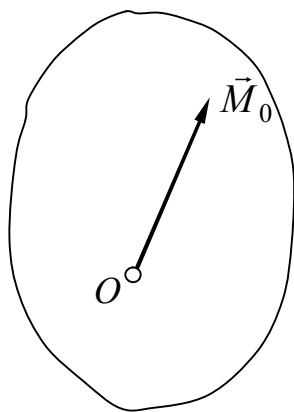


Рис. 3.3

Случай 2. $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ (рис. 3.3).

В этом случае система сил будет эквивалентна одной паре сил с моментом $\vec{m} = \vec{M}_0$. Силовой многоугольник, составленный из сил данной системы, будет замкнут. Ниже покажем, что главный момент в этом случае будет одинаковым относительно различных центров приведения.

Отметим также, что эквивалентная система будет состоять из двух сил, когда на твердое тело действует только система пар.

Рассмотрим систему пар, действующих на твердое тело. Пусть $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ – моменты этих пар. Очевидно, у этой системы главный вектор $\vec{R} = 0$, а главный момент относительно любой точки $\vec{M}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n$ – получаем теорему о сложении пар, сформулированную ранее.

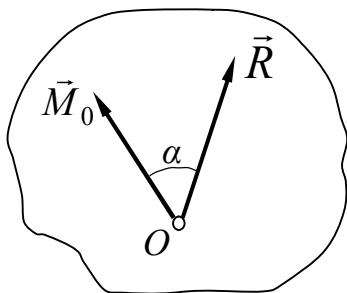


Рис. 3.4

Случай 3. $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ (общий случай).

Результат приведения будет зависеть от расположения векторов \vec{R} и \vec{M}_0 . Обозначим через α угол между векторами \vec{R} и \vec{M}_0 (рис. 3.4). Рассмотрим три случая: а) $\alpha = 90^\circ$ – сила и пара сил лежат в одной плоскости; б) $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$ – сила перпендикулярна плоскости пары; в) α – любой острый или тупой угол.

а) В случае $\alpha = 90^\circ$ главный вектор и главный момент перпендикулярны (рис 3.5,а), т.е. сила и пара лежат в одной плоскости Π .

Эту систему сил можно заменить одной силой – равнодействующей. Действительно, преобразуем пару так, чтобы силы, ее образующие, были равны главному вектору $F = F' = R$, а плечо $OA = d = M_0/R$. Переместим пару в ее плоскости таким образом, чтобы одна из сил пары была приложена в центре O (рис. 3.5,б). Другая сила пары будет приложена в точке A , так что с конца вектора \vec{M}_0 условный поворот пары виден против хода часо-

вой стрелки. Силы \vec{R} и \vec{F}' , равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны, образуют уравновешенную систему сил, $\{\vec{R}, \vec{F}'\} \infty 0$. На основании второй аксиомы эту систему можно убрать (снять) и три силы будут эквивалентны одной силе, приложенной в точке A (рис. 3.5,б). Итак, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty \{\vec{R}, (\vec{F}, \vec{F}')\} \infty \vec{F}$, что можно записать в виде

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty \{\vec{R}, \vec{M}_0\} \infty \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{R}.$$

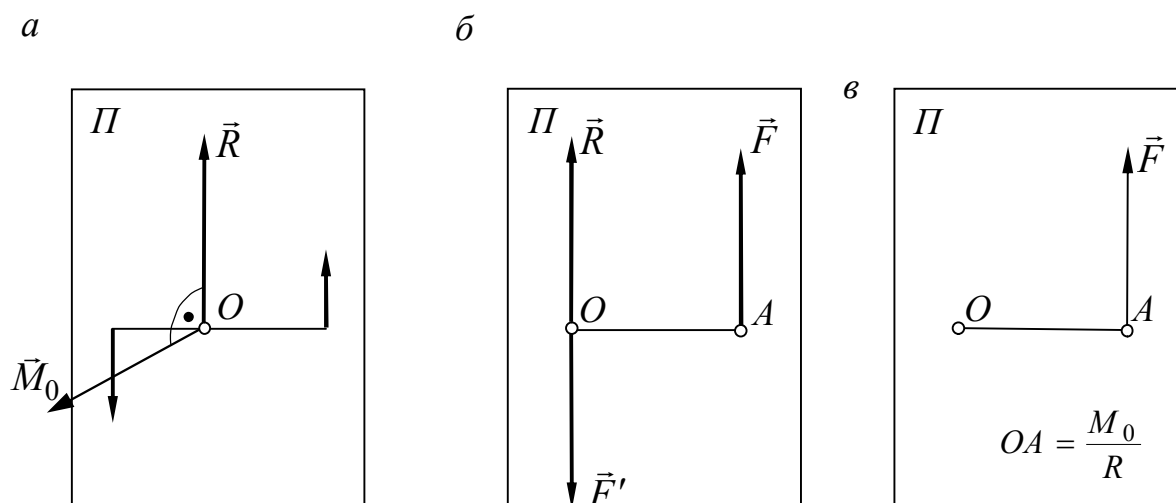


Рис. 3.5

Система сил заменяется одной силой – равнодействующей.

Условие перпендикулярности векторов \vec{R} и \vec{M}_0 выражается через их скалярное произведение:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0. \quad (3.2)$$

б) $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$. В этом случае \vec{R} и \vec{M}_0 лежат на одной линии, и, следовательно, сила перпендикулярна плоскости пары. Совокупность силы и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой силе, называется силовым или динамическим винтом (рис. 3.6).

Эту систему сил считают простейшей и дальше не упрощают. Силовой винт (три силы) можно свести к двум скрещивающимся силам, но обычно этого не делают (к одной силе такая система сил не сводится). Если \vec{R} и \vec{M}_0 направлены в одну сторону ($\alpha = 0^\circ$) (рис. 3.6,а), то силовой винт будет правым; если в разные стороны ($\alpha = 180^\circ$) (рис. 3.6,б), то силовой винт будет левым.

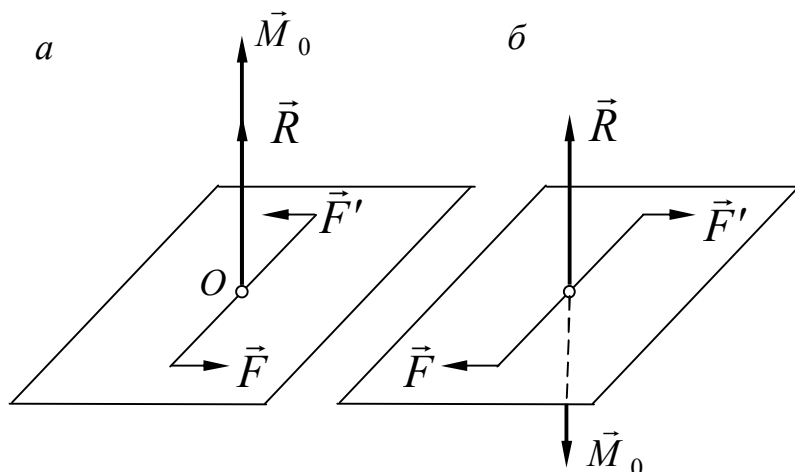


Рис. 3.6

в) Угол α имеет произвольное значение, отличное от 0° , 90° , 180° (рис. 3.7,а). Покажем, что в этом случае система сил приводится к силовому винту.

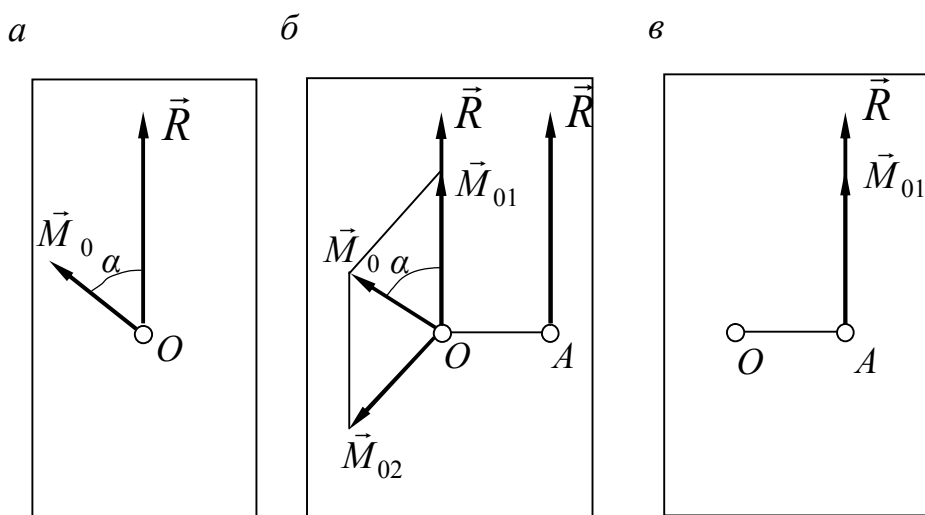


Рис. 3.7

Разложим момент \vec{M}_0 на два момента \vec{M}_{01} и \vec{M}_{02} , направленные соответственно по главному вектору \vec{R} и перпендикулярно ему (рис. 3.7,б), тогда

$$M_{01} = M_0 \cos \alpha, \quad M_{02} = M_0 \sin \alpha.$$

Таким образом, пару сил заменили двумя парами.

Система сил, состоящая из силы \vec{R} , приложенной в точке O , и пары с моментом \vec{M}_{02} , может быть заменена одной силой, приложенной в точке A на расстоянии $OA = d = M_0 \sin \alpha / R$. При этом остается еще пара сил с моментом \vec{M}_{01} . Перенеся вектор \vec{M}_{01} в точку A (момент пары – свободный вектор) (рис. 3.7,в), получим, что данная система сил эквивалентна

силовому винту, состоящему из силы $\vec{R}_A = \vec{R}$ и пары с моментом \vec{M}_{01} . Прямая, на которой лежат векторы \vec{R} и \vec{M}_{01} , проходящая через точку A , называется центральной осью системы сил или осью силового винта. Центральная ось системы сил является геометрическим местом точек, для которых главные моменты имеют одинаковое наименьшее значение ($M_{01} = M_0 \cos \alpha$) и направлены вдоль этой прямой. Ниже будет показано, что это следует из формулы, связывающей главные моменты относительно двух произвольных центров.

Аналитически наименьшее значение главного момента M_{01} можно найти по формуле

$$M_{01} = M_0 \cos \alpha,$$

где
$$\cos \alpha = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{R \cdot M_0} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R \cdot M_0}. \quad (3.3)$$

Из приведенного анализа замены систем сил им эквивалентными устанавливаем простейшие системы, которые могут заменить изучаемые системы сил: одна сила – равнодействующая, две силы – пара сил, три силы – силовой винт.

В заключение приведем сводку результатов анализа возможных случаев замены системы сил (табл. 3.1).

Таблица 3.1

№ п/п	Простейшая эквивалентная система сил	Условия приведения
1	Одна сила – равнодействующая	$\vec{R} \neq 0, \vec{R}\vec{M}_0 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$
2	Две силы – пара сил	$\vec{R} = 0, \vec{M}_0 \neq 0$
3	Три силы – силовой винт	$\vec{R}\vec{M}_0 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \neq 0$

Случай 4. $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$.

В этом случае система сил будет уравновешенной. Этот случай подробно рассмотрим в главе 4, где будут получены аналитические условия равновесия различных систем сил (плоских и пространственных).

Рассмотрим несколько примеров приведения систем сил к простейшему виду (замена данной системы ей эквивалентной).

Пример 3.1. Систему сил, рассмотренную ранее в примере 1.1 (см. рис. 1.12), заменить простейшей системой.

Главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M}_0 были найдены и показаны на рис. 1.12,б. При $\vec{R} \neq 0, M_0 \neq 0$ плоская система сил заменяется одной силой – равнодействующей \vec{F} , линия действия которой параллельна глав-

ному вектору \vec{R} и отстоит от центра O на расстоянии $OD = d = |M_0|/R = 17/20 = 0,85$ м (рис. 3.8).

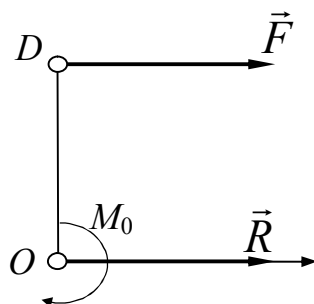


Рис. 3.8

Пример 3.2. Привести к простейшему виду систему шести сил, равных по модулю $F = 10$ Н, действующих на куб со стороной $a = 0,5$ м (рис. 3.9,а).

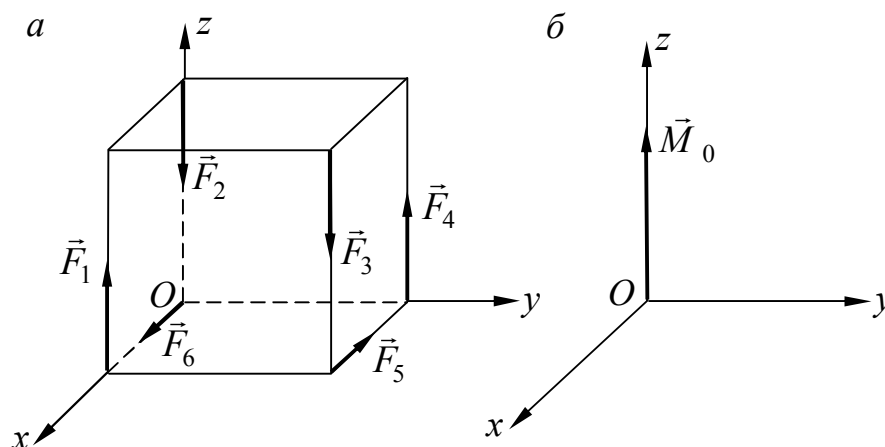


Рис. 3.9

Выберем координатные оси, как указано на рисунке, и найдем главный вектор \vec{R} и главный момент относительно центра \vec{M}_0 по их проекциям на эти оси:

$$R_x = -F_5 + F_6 = 0,$$

$$M_x = -F_3 \cdot a + F_4 \cdot a = 0,$$

$$R_y = 0,$$

$$M_y = -F_1 \cdot a + F_3 \cdot a = 0,$$

$$R_z = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 0,$$

$$M_z = F_5 \cdot a = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Получаем } \vec{R} = 0, \vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = 5 \vec{k}.$$

Следовательно, система сил заменяется **парой** сил (момент ее $m = 5$ Н·м), лежащей в горизонтальной плоскости (случай 2) (рис. 3.9,б).

Пример 3.3. Систему сил, рассмотренную в примере 1.2 (см. рис. 1.13), заменить простейшей системой сил. Проекции главного вектора \vec{R} и главного момента \vec{M}_0 на координатные оси были найдены:

$$\begin{aligned} R_x &= 0, & M_x &= 0, \\ R_y &= 100 \text{ Н}, & M_y &= 0, \\ R_z &= 100 \text{ Н}, & M_z &= 100 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Модули главного вектора и главного момента отличны от нуля: $R = 141 \text{ Н}$, $M_0 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Скалярное произведение $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 10^4 \neq 0$, и следовательно, система сил эквивалентна силовому винту (случай 3,в), состоящему из силы, равной R , и пары сил с моментом $M_{01} = M_0 \cos \alpha$:

$$M_{01} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{R} = \frac{10^4}{100\sqrt{2}} = 70,7 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из рис. 1.13,б видно, что проекция \vec{M}_0 на направление главного вектора \vec{R} равна $M_{01} = M_0 \cos 45^\circ = 100 \cdot \sqrt{2}/2 \approx 70,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Ось силового винта параллельна вектору \vec{R} и смещена от центра O на расстояние $OA = d = \frac{M_0 \sin \alpha}{R} = \frac{100\sqrt{2}}{2 \cdot 100\sqrt{2}} = 0,5 \text{ м}$, причем OA перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{R} и \vec{M}_0 . Следовательно, данная система сил заменяется правым силовым винтом.

На рис. 3.10 показаны векторы \vec{R} , \vec{M}_0 , \vec{M}_{01} , \vec{M}_{02} и точка A , через которую проходит ось винта (показана пунктиром).

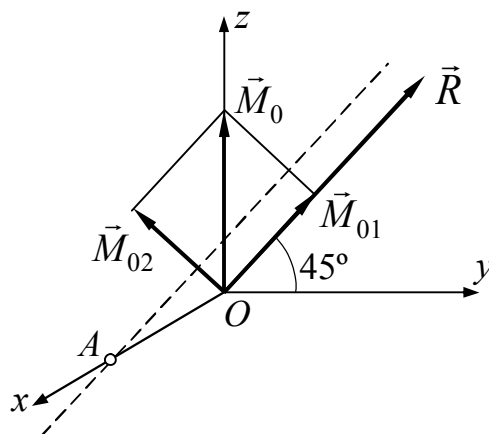


Рис. 3.10

3.2. Инварианты системы сил

Величины, остающиеся неизменными при преобразовании (замене) системы сил любой другой ей эквивалентной системой, называются инвариантами системы сил.

Инварианты системы сил называют также инвариантами статики и определяют их как величины, не зависящие от выбора центра приведения (не меняющиеся при перемене центра приведения). Получим их.

Пусть задана система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, действующая на твердое тело (рис. 3.11,а). Выберем на этом теле две любые точки O и A . Исходную систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ приведем вначале к центру O , используя метод Пуансо, а затем получившуюся эквивалентную систему из трех сил приведем к центру A .

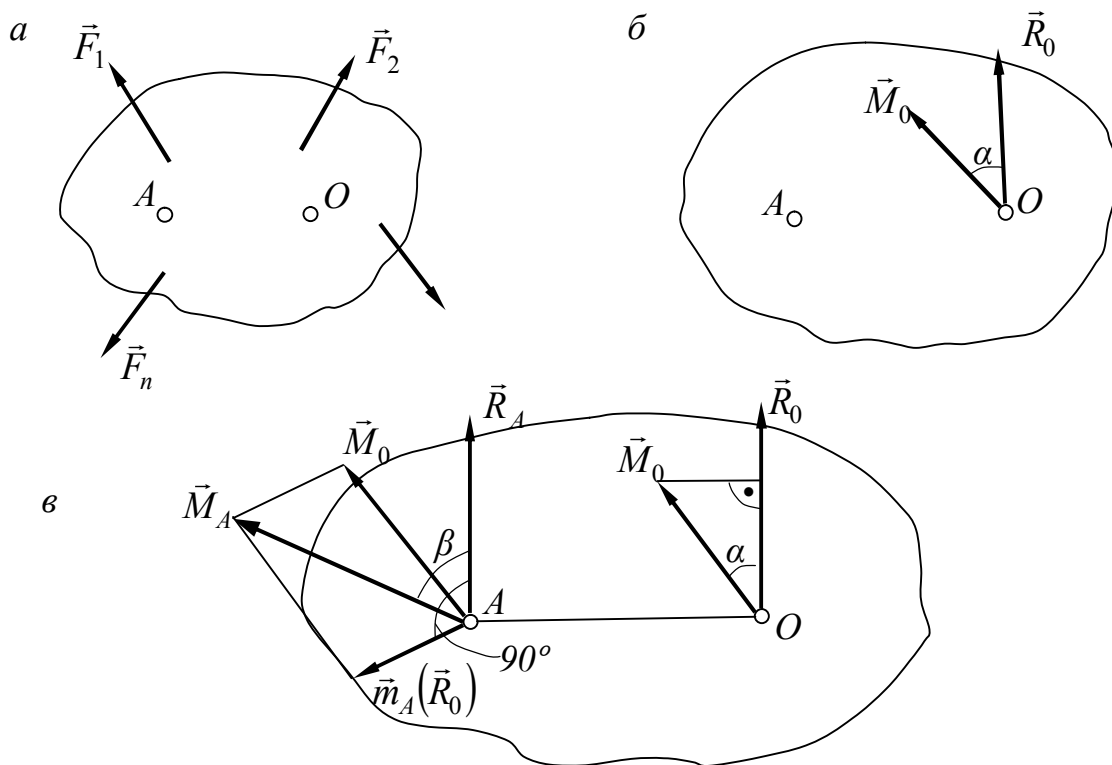


Рис. 3.11

При приведении системы сил к центру O получаем три силы – силу \vec{R}_0 , равную главному вектору, и пару с моментом \vec{M}_0 , равным главному моменту относительно центра O (рис. 3.11,б).

Приведем получившуюся эквивалентную систему к центру A (рис. 3.11,в). Используя лемму Пуансо, силу \vec{R}_0 перенесем параллельно в центр A , добавляя пару силу с моментом $\vec{m}_A(\vec{R}_0)$, причем

$$\vec{R}_A = \vec{R}_0, \quad \vec{m}_A(\vec{R}_0) = \vec{AO} \times \vec{R}_0.$$

Момент пары \vec{M}_0 , главный момент относительно центра O , является свободным вектором и его можно перенести в центр A . Таким образом, в центре A получим силу \vec{R}_A и две пары с моментами \vec{M}_0 и $\vec{m}_A(\vec{R}_0)$. Скла-

дывая пары сил, получаем одну эквивалентную пару с моментом $\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{m}_A(\vec{R})$. Последнее равенство представляет собой зависимость главных моментов относительно двух центров (точка O – первый центр, точка A – второй центр), которая с учетом $\vec{R}_A = \vec{R}_0 = \vec{R}$ может быть сформулирована в виде **теоремы** (теорема об изменении главного момента при перемене центра приведения):

Главный момент системы сил относительно второго центра равен сумме главного момента относительно первого центра и момента главного вектора, приложенного в первом центре, относительно второго:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{m}_A(\vec{R}_0). \quad (3.4)$$

Возвращаясь к величинам, которые не меняются при перемене центра приведения, можно отметить следующее.

Для двух любых центров главный вектор имеет одно и то же значение $\vec{R}_A = \vec{R}_0 = \vec{R}$ и, следовательно, является инвариантом системы сил.

Главный момент зависит от выбора центра и инвариантом не является. Вторым инвариантом системы сил будет скалярное произведение главного вектора на главный момент. Действительно, умножив (3.4) скалярно на \vec{R} , получаем

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_A = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 + \vec{R} \cdot \vec{m}_A(\vec{R}).$$

Но $\vec{R} \perp \vec{m}_A(\vec{R}_0)$, поэтому $\vec{R} \cdot \vec{m}_A(\vec{R}) = 0$ и

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_A = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 \quad (3.5)$$

Если выразить скалярное произведение через проекции перемножаемых векторов на координатные оси, то получим

$$R_x M_{Ax} + R_y M_{Ay} + R_z M_{Az} = R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z}. \quad (3.6)$$

Если обозначить через α и β углы между главными векторами и главными моментами в центрах O и A (см. рис. 3.11,б), то скалярные произведения будут следующими:

$$R \cdot M_0 \cos \alpha = R \cdot M_A \cos \beta,$$

или, разделив на величину R ,

$$M_0 \cos \alpha = M_A \cos \beta. \quad (3.7)$$

Таким образом, проекция главного момента системы сил на направление главного вектора является скалярным инвариантом системы сил.

Итак, система сил имеет два инварианта, сохраняющихся при любых заменах этой системы сил ей эквивалентной:

1) векторный инвариант – главный вектор системы сил

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_s ;$$

2) скалярный инвариант – проекция главного момента на направление главного вектора.

Следует отметить, что иногда скалярным инвариантом называют скалярное произведение главного вектора и главного момента.

Инварианты системы сил являются параметрами силового винта, который в общем случае заменяет заданную систему сил.

Выше было отмечено, что центральная ось системы сил (ось силового винта) является геометрическим местом точек, для которых главные моменты имеют одинаковое наименьшее значение $M_{01} = M_0 \cos \alpha$ и направлены вдоль этой оси.

Аналитическое выражение для наименьшего момента системы сил $M_{01} = M^*$ имеет вид

$$M^* = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{R} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R}. \quad (3.8)$$

Вопросы для самопроверки

1. К какому простейшему виду приводится система сходящихся сил?
2. К какому количеству сил приводится система пар? Система параллельных сил?
3. В каких случаях система сил приводится к равнодействующей?
4. Можно ли упростить систему трех сил, представляющих собой динамический винт?
5. Сформулируйте теорему об изменении главного момента при перемещении центра приведения.
6. Какие величины являются инвариантами системы сил?
7. Назовите векторный и скалярный инварианты системы сил.

Глава 4. Вторая задача статики. Условия равновесия произвольной системы сил

Согласно теореме Пуансо произвольную систему сил можно заменить тремя силами – силой и парой сил:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty \{\vec{R}, \vec{M}_0\}. \quad (4.1)$$

Из этой теоремы можно получить условия равновесия произвольной системы сил.

Теорема. *Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к телу, необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и главный момент относительно любого центра равнялись нулю:*

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0. \quad (4.2)$$

Докажем необходимость этих условий.

Дано: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty 0$.

Доказать: $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$.

Доказательство. Если система сил находится в равновесии, т.е. $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty 0$, то и эквивалентная ей система также будет в равновесии $\{\vec{R}, \vec{M}_0\} \infty 0$. Но пару сил, как известно, нельзя уравновесить силой, поэтому при равновесии выполняются условия $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_0 = 0$ – необходимость доказана.

Достаточность условий.

Дано: $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$.

Доказать: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty 0$.

Доказательство. Если для данной системы сил выполняются условия $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$, то получившаяся после приведения система сил будет уравновешенной, т.е. $\{\vec{R}, \vec{M}_0\} \infty 0$. Так как $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty \{\vec{R}, \vec{M}_0\}$, то и эквивалентная ей заданная система сил также будет уравновешенной: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty 0$. Достаточность доказана.

Условия равновесия сил в виде $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$ представляют собой векторную форму условий равновесия любой системы сил. Из нее могут быть получены условия равновесия в аналитической (или координатной) форме.

4.1. Условия равновесия различных систем сил

а. Произвольная пространственная система сил

Пусть $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \infty 0$ – произвольная уравновешенная пространственная система сил (рис. 4.1).

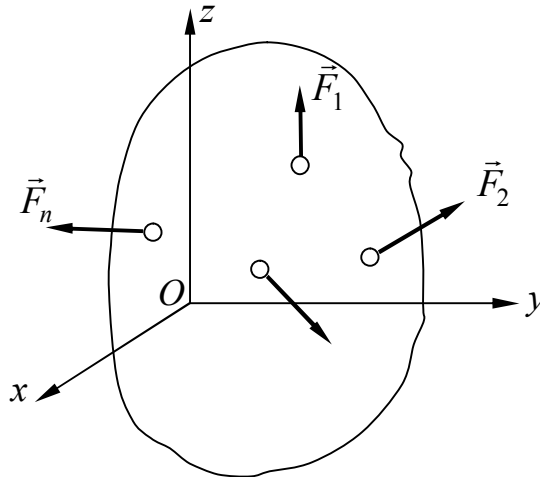


Рис. 4.1

Выберем декартовы оси координат, найдем главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M}_0 по формулам (1.7), (1.8):

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \\ R_x &= \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}; \\ M_x &= \sum m_x(\vec{F}_k), \quad M_y = \sum m_y(\vec{F}_k), \quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_k). \end{aligned}$$

При равновесии $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$ и их проекции $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = 0$, тогда силы должны удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к свободному телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялись нулю и алгебраические суммы моментов всех сил относительно этих осей также равнялись нулю.

Если равенства (4.3) содержат неизвестные величины, что почти всегда бывает при решении задач о равновесии несвободного тела, то они будут являться *уравнениями равновесия*.

б. Пространственная система параллельных сил

Рассмотрим систему параллельных сил, не лежащих в одной плоскости (рис. 4.2). Направим ось Oz параллельно линиям действия данных сил, а оси Ox и Oy – в плоскости, перпендикулярной силам. Тогда проекции каждой силы на оси Ox , Oy будут равны нулю и моменты всех сил относительно оси Oz также равны нулю. Три условия из (4.3) тождественно обращаются в нуль и остаются только три условия равновесия для сил, параллельных оси Oz :

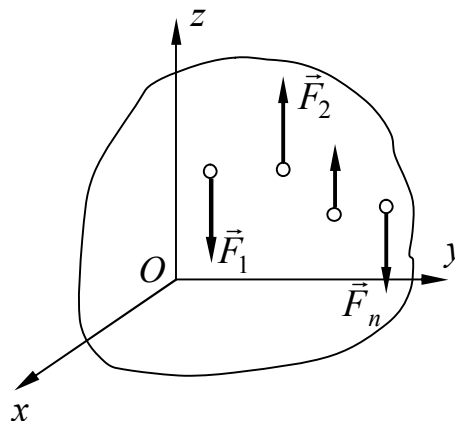


Рис. 4.2

$$\sum F_{kz} = 0, \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \sum m_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.4)$$

в. Пространственная система сходящихся сил

Рассмотрим систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 4.3), причем силы не лежат в одной плоскости. Примем точку пересечения линий действия сил за начало координат. Тогда все силы будут пересекать каждую из координатных осей, и моменты их относительно этих осей равны нулю тождественно.

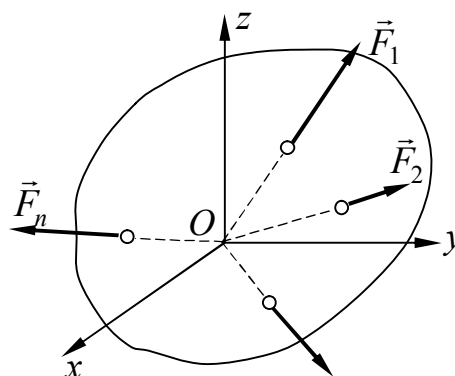


Рис. 4.3

Следовательно, сходящиеся силы должны при равновесии удовлетворять трем условиям равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0. \quad (4.5)$$

г. Произвольная плоская система сил

Пусть на свободное твердое тело действуют силы, линии действия которых расположены в плоскости Oxy (рис. 4.4). Формулы для вычисления главного вектора и главного момента были получены ранее (1.9). Из этих формул или же из ус-

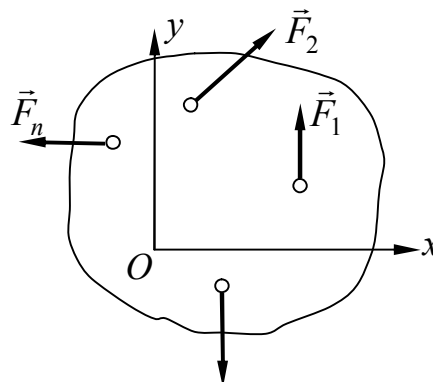


Рис. 4.4

ловий (4.3) получаем три условия равновесия для произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.6)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей, лежащих в плоскости действия сил, и сумма моментов всех сил относительно любой точки этой же плоскости.

д. Плоская система параллельных сил

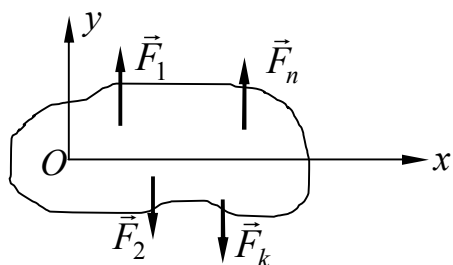


Рис. 4.5

Рассмотрим систему параллельных сил, лежащих в плоскости Oxy и параллельных оси Oy (рис. 4.5). Условия равновесия такой системы можно получить как частный случай из условий (4.6). В данном случае первое условие обращается тождественно в нуль $\sum F_{kx} \equiv 0$, и остаются два условия равновесия параллельных сил на плоскости:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.7)$$

е. Плоская система сходящихся сил

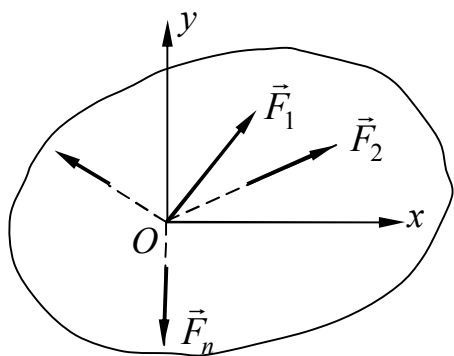


Рис. 4.6

Рассмотрим систему сходящихся сил, линии действия которых лежат в одной плоскости (рис. 4.6). Применяя условия (4.6), находим, что $\sum m_0(\vec{F}_k) \equiv 0$, т.к. все силы проходят через точку O . Следовательно, условиями равновесия сходящихся сил на плоскости будут два:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \quad (4.8)$$

4.2. Три вида аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил

Первый вид аналитических условий равновесия, называемый также основным, состоит из двух условий для проекции сил и одного условия для моментов сил. Приведем его еще раз:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_k) = 0.$$

Заметим, что оси Ox и Oy – любые на плоскости, где расположены силы, центр моментов O – любая точка этой плоскости.

Второй вид аналитических условий равновесия состоит из одного условия для проекций сил и двух – для моментов:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_A(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_s) = 0,$$

причем нужно, чтобы ось Ox , на которую проецируются силы, не была перпендикулярна прямой, проходящей через точки A и B .

При таком добавочном ограничении эти условия будут достаточными для равновесия системы сил, т.е. из них будут следовать условия $\vec{R} = 0, M_0 = 0$. Докажем это. Примем точку A за центр приведения (рис. 4.7). Тогда после приведения системы сил к этому центру получим силу $\vec{R} = \sum \vec{F}_s$ и пару с моментом $m = M_A = \sum m_A(\vec{F}_s)$.

Но $\sum m_A(\vec{F}_s) = 0$, следовательно, при $\vec{R} \neq 0$ система приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через точку A . Повторив аналогичные рассуждения для центра приведения в точке B , получим, что линия действия равнодействующей при $\vec{R} \neq 0$ должна пройти и через точку B , т.е. AB – линия действия равнодействующей. Но в таком случае проекция равнодействующей на ось Ox будет отлична от нуля $R_x = \sum F_{kx} \neq 0$, что противоречит первому из данных условий. Следовательно, должно быть $R = 0$.

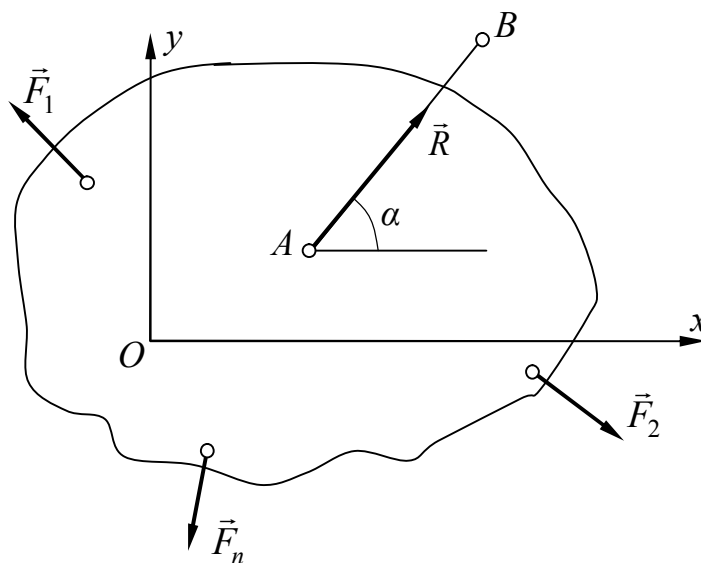


Рис. 4.7

Третий вид аналитических условий равновесия содержит все три условия для моментов сил:

$$\sum m_A(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum m_C(\vec{F}_s) = 0, \quad (4.9)$$

где точки A, B, C – любые, но не лежащие на одной прямой.

При таком добавочном ограничении эти условия будут достаточными для равновесия системы сил. Докажем это (рис. 4.8).

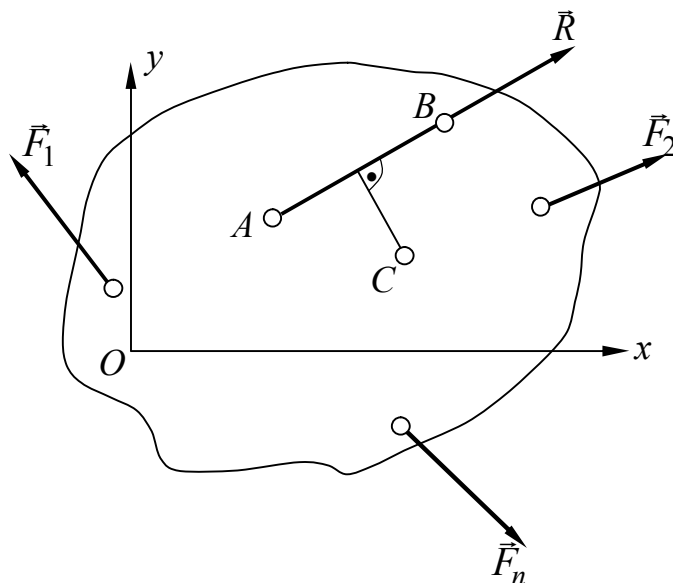


Рис. 4.8

Повторяя первую часть рассуждений, приведенных выше, получим, что при $\vec{R} \neq 0$ система может приводиться к равнодействующей, проходящей через точки A и B . Но в таком случае моменты равнодействующей относительно точки C $m_C(\vec{R}) = \sum m_C(\vec{F}_s) \neq 0$, что противоречит третьему из приведенных условий. Следовательно, должно быть $R = 0$.

Заметим, что при решении конкретных задач вид условий равновесия выбирают так, чтобы в уравнениях было как можно меньше неизвестных (лучше, чтобы в каждом уравнении было по одной неизвестной).

4.3. Равновесие систем тел

Во многих задачах статики приходится рассматривать равновесие систем, состоящих из нескольких взаимодействующих твердых тел. Эти тела (детали машин, механизмов, сооружений) могут быть соединены шарнирами, стержнями и другими связями или же просто опираться друг на друга.

Силы, с которыми тела рассматриваемой системы действуют друг на друга, называются внутренними силами и по аксиоме о взаимодействии они равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Ос-

тальные силы являются внешними (силы взаимодействия с телами, не входящими в рассматриваемую систему).

Рассмотрим трехшарнирную арку, состоящую из двух полуарок весом P_1 и P_2 , которые соединены шарниром C (рис. 4.9,а). В точках A и B – шарниры.

Отметим, что для данной системы силы $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}'_1, \vec{C}'_2$ являются внутренними, а силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{B}_1, \vec{B}_2$ – внешними.

Существует два метода решения задач на равновесие системы тел. Пусть для простоты рассуждений система состоит из двух тел.

Метод 1. Расчленим систему на отдельные тела (рис. 4.9,б,в) и рассматриваем равновесие каждого тела отдельно. Для каждого тела составляем три уравнения равновесия. Получившиеся шесть уравнений равновесия позволяют определить шесть неизвестных величин.

Метод 2. Рассматриваем равновесие всей системы, считая место соединения затвердевшим, и составляем три уравнения равновесия (рис. 4.9,а). Дополнительно рассматриваем равновесие одного тела, составляя для него три уравнения (рис 4.9,б). Вновь получаем шесть уравнений равновесия.

При решении конкретных задач выбор метода осуществляют так, чтобы получившаяся система уравнений была наиболее простой.

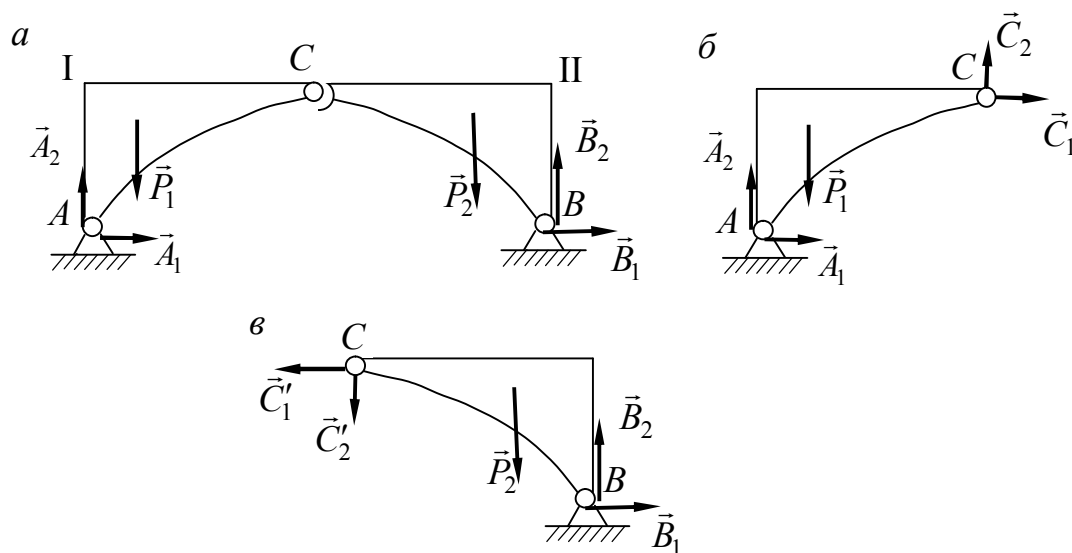


Рис. 4.9

Замечание. Задача о равновесии тела или системы тел называется статически определимой, если число неизвестных не превосходит числа независимых уравнений равновесия. Если число неизвестных сил (или составляющих их) окажется больше числа независимых аналитических усло-

вий равновесия, то задачу называют статически неопределимой. Такие задачи нельзя решить методами одной статики твердого тела. Методы решения статически неопределимых задач рассматриваются в курсах сопротивления материалов, строительной механики и требуют учета деформаций тела, т.е. отказа от используемой гипотезы об абсолютно твердом теле.

Пример простейшей статически неопределимой задачи приведен на рис. 4.10: для плоской системы сил число условий равновесия равно трем, а неизвестных опорных реакций – четыре.

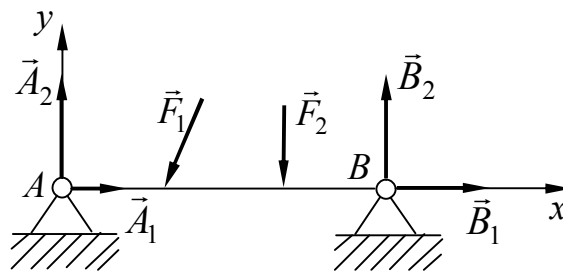


Рис. 4.10

4.4. Примеры решения задач на равновесие твердых тел

Рассмотрим два примера решения задач на исследование положения равновесия твердых тел. В первом из них (пример 4.1) рассматривается плоская система сил, действующая на систему двух тел (сочлененные тела). Во втором (пример 4.2) изучается пространственная система произвольно расположенных сил, действующих на одно тело.

Пример 4.1. Две балки AB и BC одинаковой длины $2a$ соединены между собой шарниром B . Конец A балки AB жестко заделан, а конец C балки BC опирается на горизонтальную подвижную опору. Угол между балками равен 60° , а в середине балки BC , перпендикулярно к ней, действует сила Q (рис. 4.11,а). Определить реакции опор A и C , а также шарнира B , если вес каждой балки $P = 200$ Н, $Q = 300$ Н, $a = 2$ м.

Расчленим систему на отдельные части, учитывая, что в месте соединения силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Рассмотрим равновесие каждого тела отдельно. На рис. 4.11,б показаны силы, действующие на каждую балку. Рассмотрим вначале равновесие балки BC . Действительно, для этого тела число неизвестных величин равно трем, и они сразу определяются из трех уравнений равновесия произвольной плоской системы сил (4.6):

$$\sum X_k = 0, \quad B_1 - Q \cos 30^\circ = 0,$$

$$\begin{aligned}\sum Y_k &= 0, & B_2 - Q \cos 60^\circ - P + N &= 0, \\ \sum m_B &= 0, & N \cdot 2a \cos 60^\circ - Qa - P \cdot a \cos 60^\circ &= 0.\end{aligned}$$

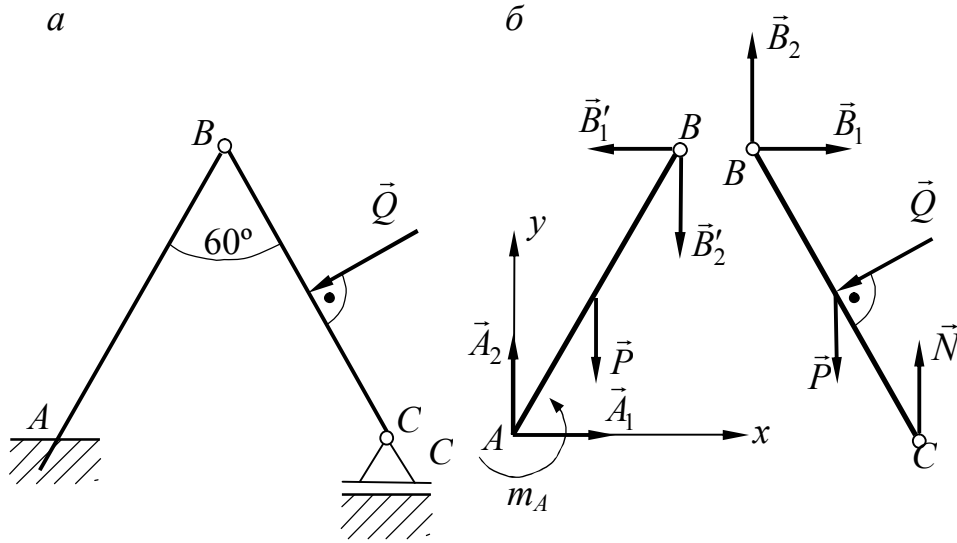


Рис. 4.11

Из этих уравнений $N = Q + 0,5P$, $B_1 = Q \cos 30^\circ$, $B_2 = 0,5(P - Q)$. Подставляя числовые значения, получаем $N = 400$ Н, $B_1 = 260$ Н, $B_2 = -50$ Н.

Далее рассмотрим равновесие балки АВ, учитывая, что

$$B'_1 = B_1, \quad B'_2 = B_2,$$

$$\sum X_k = 0, \quad A_1 - B'_1 = 0,$$

$$\sum Y_k = 0, \quad A_2 - B'_2 - P = 0,$$

$$\sum m_A = 0, \quad m_A - P \cdot a \cos 60^\circ + B'_1 \cdot 2a \cos 30^\circ - B'_2 \cdot 2a \cos 60^\circ = 0.$$

Из уравнений получаем $A_1 = B_1$, $A_2 = P + B_2$, $m_A = a(0,5P + B_2 - B_1\sqrt{3})$, $A_1 = 260$ Н, $A_2 = 150$ Н, $m_A = -800$ Н·м.

Сила B_2 и момент m_A получились отрицательными. Это означает, что их действительное направление противоположно показанному на рисунке.

Отметим, что задачу можно было решать иначе. Вначале можно было бы рассмотреть равновесие всей системы, считая место соединения за твердым, и составить три уравнения равновесия. Затем рассмотреть равновесие одного тела, например балки ВС, также составляя три уравнения равновесия.

Пример 4.2. Однородная крышка ABCD прямоугольного ящика удерживается в равновесии невесомым стержнем CF (рис. 4.12,а), составляя с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 60^\circ$. Вес крышки $P = 173$ Н.

В точке E крышки приложена сила $Q = 50$ Н, направленная вдоль стороны CD . Определить реакции связей A и B , считая, что в точке A установлен упорный подпятник, а в точке B – цилиндрический шарнир (подшипник). Найти также усилие в стержне CF , полагая крепления в точках C и F шарнирными. Принять, что $BC = BF = 0,5AB = 0,8$ м, $CE = ED$.

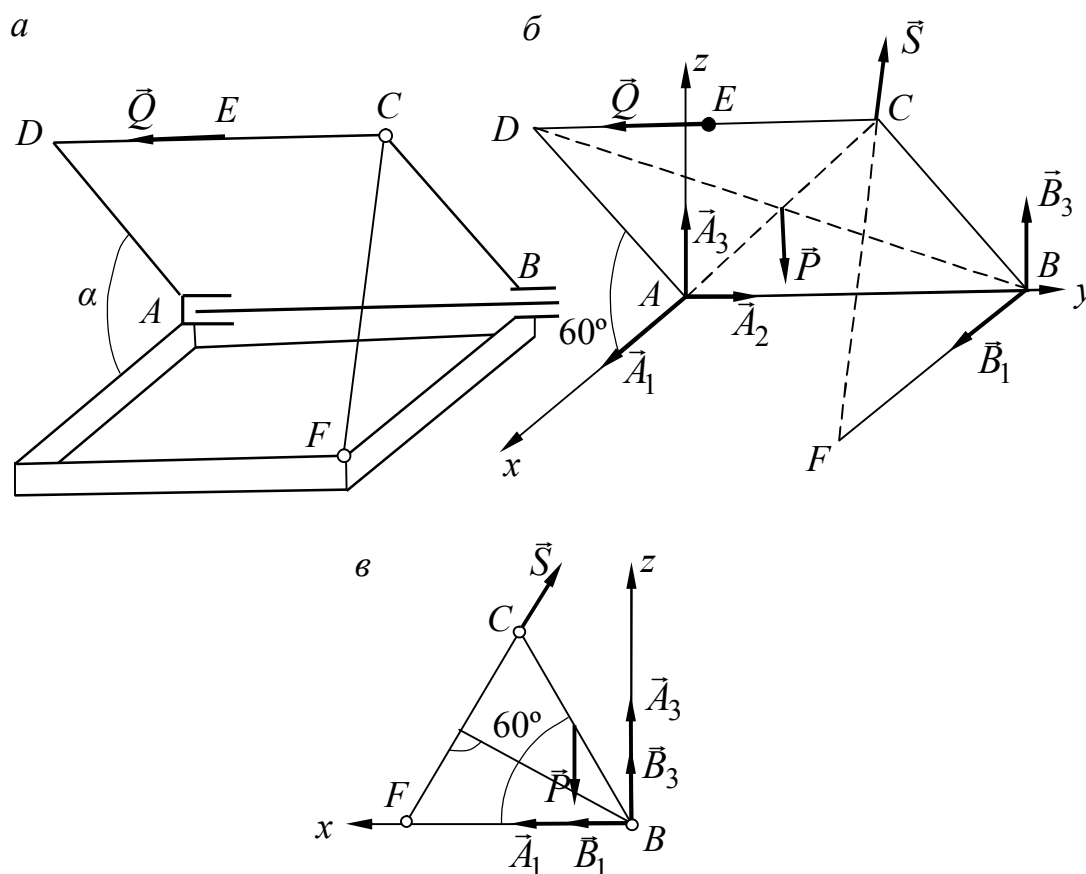


Рис. 4.12

Рассмотрим равновесие крышки $ABCD$. На нее действуют активные (заданные) силы \vec{P} и \vec{Q} и реакции связей в точках A , B , C .

Реакция подпятника разложена на три составляющих \vec{A}_1 , \vec{A}_2 , \vec{A}_3 , направленных вдоль координатных осей (ось Oy направлена по оси вращения AB); реакция цилиндрического шарнира – на две составляющие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, \vec{B}_1 и \vec{B}_3 ($B_2 = 0$); реакция стержня \vec{S} направлена по линии CF (рис. 4.12,б). Для полученной произвольной пространственной системы сил составим шесть уравнений равновесия (4.3), причем предварительно выполним еще один вспомогательный рисунок – вид с положительного направления оси Ay (рис. 4.12,в):

$$\sum X_k = 0, \quad A_1 + B_1 - S \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = 0, \quad A_2 - Q = 0,$$

$$\sum Z_k = 0, \quad A_3 + B_3 + S \sin 60^\circ - P = 0,$$

$$\sum m_x = 0, \quad B_3 \cdot AB + S \sin 60^\circ \cdot AB - P \cdot 0,5 \cdot AB + Q \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

$$\sum m_y = 0, \quad P \cdot 0,5 \cdot BC \cos 60^\circ - Sh = 0,$$

$$\sum m_z = 0, \quad S \cos 60^\circ \cdot AB - B_1 \cdot AB - Q \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

где $h = BC \cdot \cos 30^\circ$.

Подставив числовые данные и решив уравнения, получим

$$S = 50 \text{ Н}, \quad B_1 = 12,5 \text{ Н}, \quad B_3 = 21,6 \text{ Н},$$

$$A_1 = 12,5 \text{ Н}, \quad A_2 = 50 \text{ Н}, \quad A_3 = 108 \text{ Н}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте условие равновесия системы сил: в векторной форме, скалярной форме.
2. Укажите условие равновесия системы параллельных сил в пространстве, на плоскости.
3. Приведите различные формы записи условий равновесия плоской системы сил.
4. Укажите количество уравнений равновесия для системы тел в случаях плоской и пространственной систем, действующих на каждое тело.
5. Назовите аксиомы, используемые при решении задач на равновесие системы тел.
6. Сформулируйте, какие задачи называют статически неопределимыми, приведите примеры таких задач.

Глава 5. Равновесие при наличии сил трения

Рассматривая равновесие несвободных тел, мы пренебрегали силами трения и все поверхности полагали абсолютно гладкими. В действительности поверхности всех тел обладают той или иной степенью шероховатости и реакции их не будут направлены по нормальным к этим поверхностям.

Трение играет в природе и технике огромную роль, в одних случаях полезную, в других – вредную. Трение вызывает износ трущихся поверхностей, уменьшает долговечность машин и механизмов. Но без трения невозможна работа различных винтовых соединений, невозможно движение автомашин, поездов, людей и т.д.

5.1. Трение, препятствующее скольжению

Пусть на тело действует плоская система сил. Реакция \vec{R} поверхности может быть разложена на две составляющие \vec{N} и \vec{F}_T – нормальную реакцию и силу трения (рис. 5.1). В теоретической механике обычно рассматривают сухое трение, когда между поверхностями нет смазочного слоя. При наличии смазки трение будет жидкостным или полужидкостным, законы его изучаются в гидродинамике, в теории механизмов и машин.

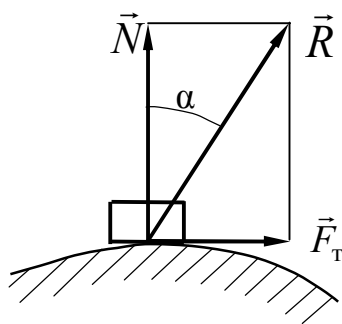


Рис. 5.1

Основные приближенные законы для сухого трения были установлены в конце XVII века Амонтоном и четко сформулированы в XVIII веке Кулоном.

Основные приближенные законы для сухого трения были установлены в конце XVII века Амонтоном и четко сформулированы в XVIII веке Кулоном.

1. Сила трения, препятствующая скольжению тела, при покое может принимать любые значения в пределах от нуля до максимального значения:

$$0 \leq F_T \leq F_{\max}. \quad (5.1)$$

2. Максимальная сила трения, препятствующая скольжению, пропорциональна нормальному давлению (нормальной реакции):

$$F_{\max} = fN, \quad (5.2)$$

где f – коэффициент трения скольжения при покое, или коэффициент статического трения. Этот коэффициент определяется экспериментально, и его значения имеются в справочниках (например, для металла по металлу $f = 0,15 - 0,25$; для кирпича по бетону $f = 0,76$ и т.д.). Коэффициент f зависит от материала трущихся тел, степени обработки поверхностей, температуры и других физических факторов. Максимальная сила трения F_{\max} и

коэффициент f при прочих равных условиях не зависят от величины площади соприкосновения трущихся поверхностей.

Второй закон Кулона справедлив и при движении (скольжении), т.е. $F_{\text{т}} = f_{\text{д}}N$, причем $f_{\text{д}}$ – коэффициент динамического трения – зависит от относительной скорости скольжения. Этот коэффициент меньше статического коэффициента (например, для металла по металлу $f_{\text{д}} \approx 0,1$, для кирпича по бетону $f_{\text{д}} \approx 0,4$).

Экспериментальное доказательство приближенных законов Кулона нетрудно получить на простом опыте. На неподвижную горизонтальную плоскость положен брусок весом P (рис. 5.2). Приложим к этому бруску горизонтальную силу Q , что можно осуществить, привязав к бруску гибкую и тонкую веревку, перекинутую через блок, к концу которой подвешена чаша с гирями. Если бы реакция неподвижной плоскости сводилась только к нормальной силе \vec{N} , то горизонтальная сила \vec{Q} , как бы мала она ни была, оставаясь неуравновешенной, заставила бы брусок скользить по плоскости. Но в действительности брусок остается в покое до тех пор, пока сила Q не достигнет некоторой определенной величины. Это приводит к заключению, что кроме нормальной реакции \vec{N} возникает еще сила \vec{F} , противоположная силе \vec{Q} и препятствующая скольжению бруска. Эта сила \vec{F} и есть сила трения между бруском и опорной плоскостью.

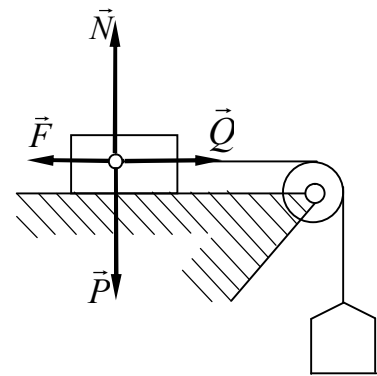


Рис. 5.2

Будем постепенно увеличивать силу Q . До тех пор пока брусок остается в равновесии, будем иметь $N = P$, $F = Q$. Из последнего равенства следует, что с возрастанием силы Q увеличивается и сила трения F . Наконец наступит такой момент, когда брусок будет находиться на пороге скольжения. Дальнейшее увеличение силы Q , хотя бы самое малое, вызовет уже скольжение по плоскости, в этот момент сила F достигает максимального значения, и при дальнейшем увеличении силы Q она уже не сможет уравновесить эту силу.

Многие задачи на равновесие тел с учетом трения можно решать графически, используя понятия угла и конуса трения. Полная реакция опорной поверхности при наличии трения составляет с нормалью угол φ , который может принимать разные значения в зависимости от величины силы F (рис. 5.3). При максимальном трении, когда $F = F_{\text{max}}$, угол отклонения будет наибольшим φ_{max} .

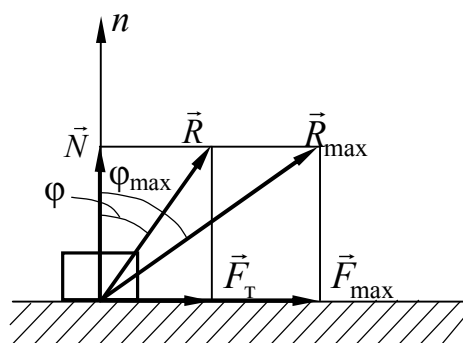


Рис. 5.3

Этот наибольший угол отклонения и называют углом трения. Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{F_{\max}}{N} = f,$$

т.е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Конусом трения называется конус, описанный полной реакцией при всех возможных направлениях максимальной силы трения в касательной плоскости (рис. 5.4). Конус трения определяет область равновесия, обладающую следующим свойством:

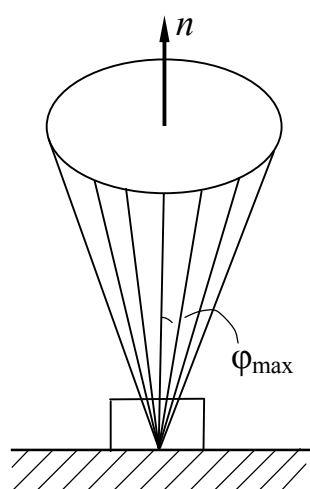


Рис. 5.4

любая по величине сила, проходящая через точку опоры, не приведет тело в движение, если линия действия ее лежит внутри конуса трения или совпадает с его образующей. Этим объясняется явление заклинивания, самоторможения и т.п.

Пример 5.1. Пусть плоскость OA (рис. 5.5) может вращаться на шарнире O так, что её можно установить под любым углом α к горизонту. При каком угле α тело весом P будет оставаться в равновесии?

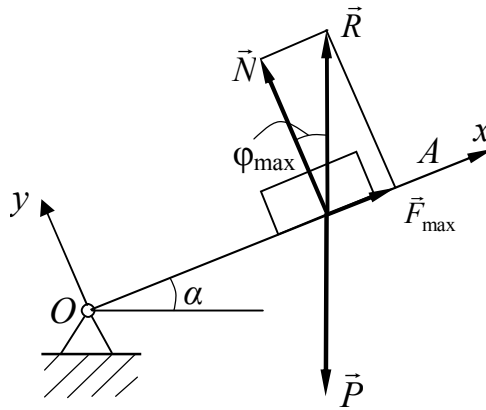


Рис. 5.5

Уравнения равновесия рассматриваемого тела имеют вид

$$\begin{aligned}\sum X_k &= 0, & F_T - P \sin \alpha &= 0, \\ \sum Y_k &= 0, & N - P \cos \alpha &= 0, \\ F_T &= P \sin \alpha, & N &= P \cos \alpha.\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_T}{N},$$

$$\begin{aligned}F_T &\leq fN, & \operatorname{tg} \alpha &\leq f, \\ f &= \operatorname{tg} \varphi_{\max}, & \operatorname{tg} \alpha &\leq \operatorname{tg} \varphi_{\max}, \\ \alpha &\leq \varphi_{\max},\end{aligned}$$

т.е. тело будет оставаться в равновесии до тех пор, пока угол наклона плоскости не превышает угла трения.

Этот вывод можно использовать, чтобы опытным путем определить коэффициент трения. Надо постепенно увеличивать угол до тех пор, пока тело не начнет скользить. Если измерить максимальный угол α , при котором тело еще остается в равновесии, то тангенс этого угла равен искомому коэффициенту трения f .

Методика решения задач на равновесие при наличии трения та же, что и при гладких опорных поверхностях. Силы трения, входящие в условия равновесия, нужно заменить выражениями через нормальные реакции с учетом законов Кулона. Если положение равновесия не является предельным, т.е. $F_T < F_{\max}$, то некоторые из условий равновесия обратятся в неравенства и придется решать систему уравнений совместно с неравенствами. Часто, чтобы избежать действий с неравенствами, предполагают, что рассматривается предельное состояние, когда $F_T = F_{\max}$.

Пример 5.2. На наклонной плоскости с углом $\alpha = 60^\circ$ находится груз весом $P = 10$ Н (рис. 5.6). Коэффициент трения $f = 0.5$. Какую силу Q

можно приложить к грузу параллельно наклонной плоскости, чтобы груз оставался в равновесии?

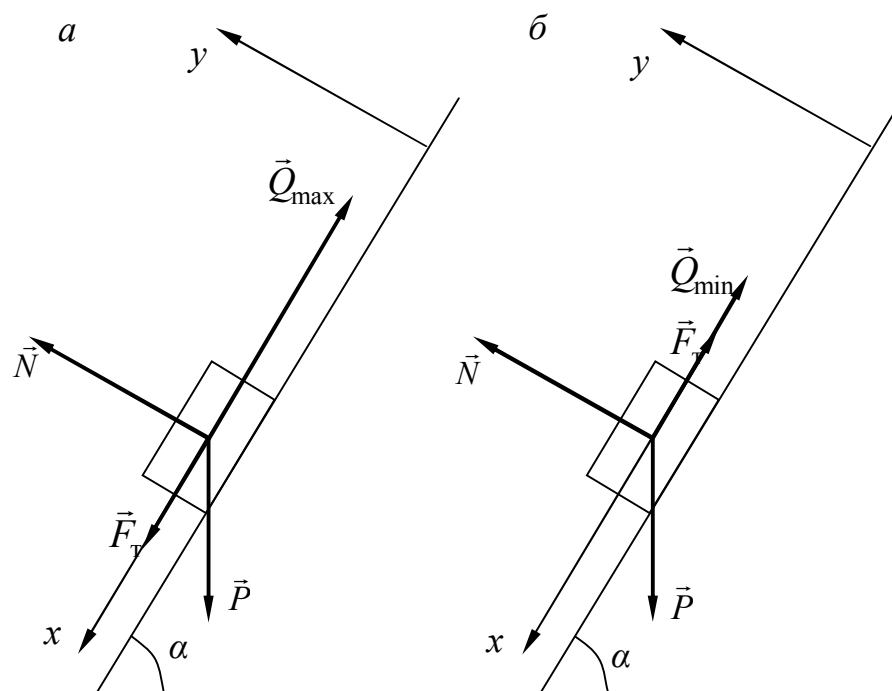


Рис. 5.6

Рассмотрим два предельных состояния:

1) когда груз будет стремиться сдвинуться вверх по наклонной плоскости, $Q = Q_{\max}$ (рис. 5.6,а);

2) когда груз будет стремиться скользить вниз по наклонной плоскости, $Q = Q_{\min}$ (рис. 5.6,б).

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= 0, \quad P \sin \alpha \pm F_T - Q = 0, \\ \sum Y_k &= 0, \quad N - P \cos \alpha = 0, \\ N &= P \cos \alpha, \quad F_T = fN = fP \cos \alpha.\end{aligned}$$

Тогда $Q_{\max} = P(\sin \alpha + f \cos \alpha) = 11,2 \text{ Н}$,

$Q_{\min} = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 6,2 \text{ Н}$.

Область равновесия для значений Q :

$$6,2 \text{ Н} \leq Q \leq 11,2 \text{ Н}.$$

Отметим, что при отсутствии трения $Q = 8,66 \text{ Н}$.

5.2. Трение ремня о цилиндрическую поверхность

На рис. 5.7,а показан ремень, охватывающий шкив радиусом r при значении центрального угла AOB , равном β ; T_1 – натяжение ремня в ве-

дущей ветви; T_2 – натяжение в ведомой ветви. Вследствие трения между ремнем и шкивом последний будет вращаться в направлении, указанном стрелкой. Требуется найти отношение T_1/T_2 , при котором шкив находится в равновесии или вращается равномерно, а ремень не скользит по шкиву.

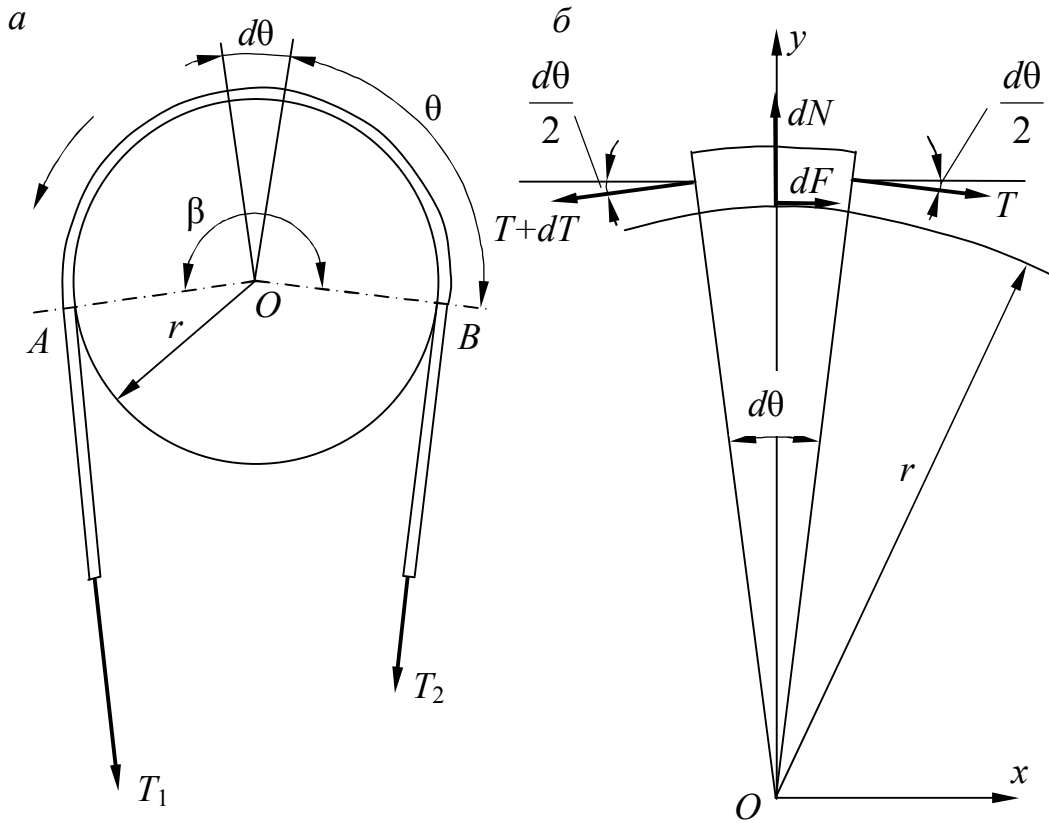


Рис. 5.7

Рассмотрим равновесие элемента ремня длиной $ds = r d\theta$.

Положение этого элемента определяется углом θ (рис. 5.7,а). На рассматриваемый элемент (рис. 5.7,б) действует плоская система сил. Составим уравнения равновесия, учитывая, что угол $d\theta$ мал и $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$,

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}:$$

$$\begin{aligned} \sum X_k &= 0, \quad T + dF - (T + dT) = 0, \\ \sum Y_k &= 0, \quad dN - T \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \frac{d\theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем $dF = dT$, т.е. приращение натяжения ремня равно приращению силы трения. Из второго уравнения получим, пренебрегая величинами второго порядка малости, $dN = T d\theta$.

При возможном возникновении скольжения существует следующее соотношение: $dF = f dN$. Это уравнение после использования написанных выше соотношений примет вид

$$dT = f T d\theta \quad \text{или} \quad \frac{dT}{T} = f d\theta.$$

Из последнего уравнения определяется отношение приращения натяжения на длине элемента к полному натяжению ремня в точке, определяемой углом θ . Интегрируя это выражение по всей длине линии контакта AB , получим

$$\ln \frac{T_1}{T_2} = f\beta \quad \text{или} \quad \frac{T_1}{T_2} = e^{f\beta}.$$

Отсюда видно, что отношение натяжений T_1 и T_2 ведущей и ведомой ветвей ремня очень быстро возрастает с ростом величины центрального угла β линии контакта AB . Это объясняет, почему человек может удерживать очень большой груз на конце веревки, обмотав её просто один или два раза вокруг столба. Необходимо также отметить, что отношение T_1/T_2 не зависит от радиуса шкива.

Приведем значение T_1/T_2 при $f = 0,5$ (канат по дереву):

Число оборотов	β	T_1/T_2
0,5	π	5
1	2π	23
1,5	3π	111
2	4π	500

5.3. Трение, препятствующее качению

Соппротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого (или при стремлении катить одно тело по поверхности другого), называется *трением качения*. Оно возникает при качении колес автомашин, вагонов, при движении шариков, роликов в подшипниках и т.д. Объяснить возникновение этого сопротивления можно деформированием соприкасающихся тел и появлением, следовательно, распределенной системы опорных реакций (рис. 5.8,а). Эту систему опорных реакций можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы \vec{R} , приложенной в точке A , и пары сил с моментом M_T (рис. 5.8,б). На этом рисунке сила разложена на составляющие \vec{N} и \vec{F}_T ; момент пары M_T называют мо-

ментом трения качения. Известно, что силу \vec{N} и пару сил, лежащих в одной плоскости, можно заменить одной силой.

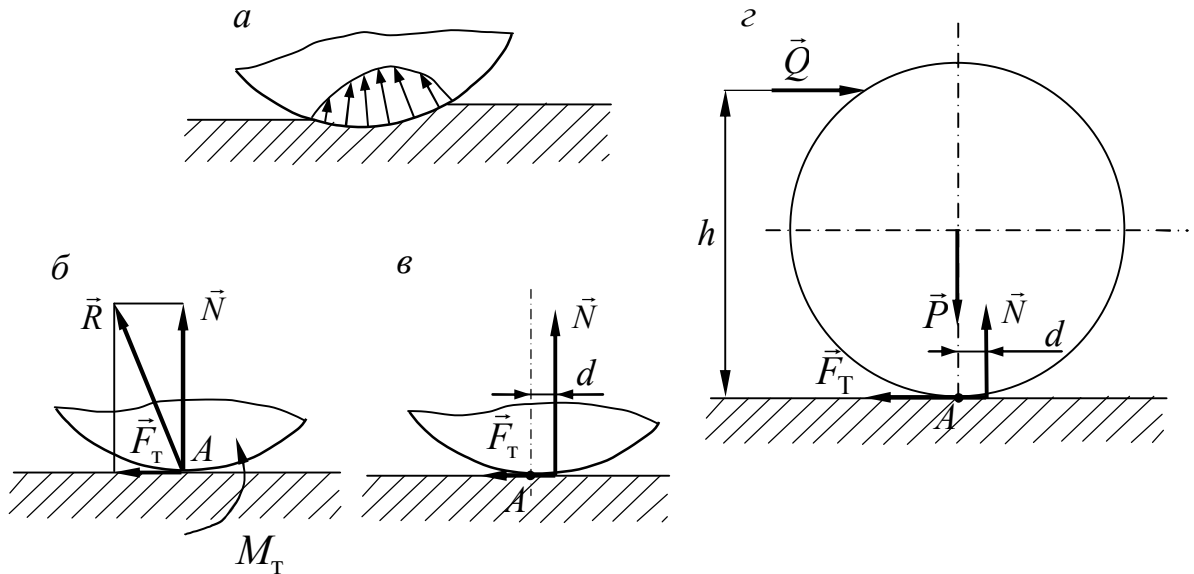


Рис. 5.8

Эта сила будет равна \vec{N} и смещена относительно центра приведения на расстояние $d = \frac{M_T}{N}$ (рис. 5.8, в). На этом же рисунке показана сила трения скольжения, перенесенная по линии действия силы.

Итак, реакция шероховатой поверхности при учете трения качения состоит из нормальной составляющей \vec{N} и силы трения скольжения \vec{F}_T . Нормальная составляющая смещена относительно точки на величину d .

Для трения качения экспериментально установлены приближенные законы:

1) момент пары трения качения при покое может иметь различные значения от нуля до максимальной величины:

$$0 \leq M_T \leq M_{\max};$$

2) максимальный момент пары трения качения пропорционален нормальному давлению:

$$M_{\max} = kN,$$

где k — коэффициент трения качения.

Заметим, что коэффициент трения качения имеет размерность длины и его можно трактовать как максимальное плечо d_{\max} .

Максимальный момент M_{\max} и коэффициент k в широких пределах не зависят от радиуса катка, а зависят от материала и физического состояния соприкасающихся поверхностей.

Коэффициент трения качения для дерева по дереву $k = 0,05 - 0,08$ см; для мягкой стали по стали (колесо по рельсу) $k = 0,005$ см; для закаленной стали по стали (шариковый подшипник) $k = 0,001$ см.

Рассмотрим условия равновесия катка под действием плоской системы сил с учетом трения качения (рис. 5.8,з):

$$\sum X_k = 0, \quad Q - F_T = 0, \quad F_T = Q,$$

$$\sum Y_k = 0, \quad N - P = 0, \quad N = P,$$

$$\sum m_A = 0, \quad Nd - Qh = 0,$$

$$F_{\max} = fN, \quad M_{\max} = kN, \quad \text{тогда } F_T \leq F_{\max}.$$

$$M_T \leq M_{\max}, \quad Q \leq fN, \quad Q \leq \frac{k}{h} N.$$

Если увеличивать силу Q , то при нарушении первого неравенства каток начнет скользить (не вращаясь). Если же нарушается только второе неравенство, то каток будет катиться (без скольжения). Если же нарушаются оба неравенства, то каток будет катиться и скользить. Обычно $\frac{k}{h} \ll f$, поэтому для начала качения требуется значительно меньшая сила, чем для начала скольжения.

Вопросы для самопроверки

1. Зависит ли коэффициент трения скольжения при покое от площади соприкасающихся поверхностей?
2. Тело лежит на шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α . Коэффициент трения между телом и плоскостью f . При каком значении угла α тело будет скользить по плоскости?
3. Каток радиуса R равномерно катится (без скольжения) по наклонной плоскости с углом наклона α . Определить коэффициент трения качения.
4. Зная коэффициенты трения скольжения f и качения k катка радиусом R , определить условия начала а) чистого качения и б) чистого скольжения катка по наклонной плоскости.

Глава 6. Центр тяжести

Согласно закону всемирного тяготения на все материальные частицы, расположенные вблизи поверхности Земли, действуют силы притяжения, направленные к центру Земли. Если тело, размеры которого малы по сравнению с радиусом Земли, разбить мысленно на элементарные частицы, то силы притяжения $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ частиц можно считать системой параллельных сил (рис. 6.1). Равнодействующая этих сил \vec{P} называется силой тяжести тела: $\vec{P} \propto \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$. Очевидно

$$P = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (6.1)$$

При любом повороте тела в пространстве силы \vec{P}_k ($k=1, 2, \dots, n$) остаются приложенными в одних и тех же точках и параллельными друг другу, изменяется только их направление по отношению к телу. При этом равнодействующая \vec{P} будет также поворачиваться по отношению к телу и будет проходить при любых положениях тела через одну и ту же точку, неизменно связанную с телом. Эта точка называется *центром тяжести тела*.

Это свойство справедливо и для любой системы параллельных сил, приводящихся к одной силе – равнодействующей. Точку, лежащую на линии действия равнодействующей, вокруг которой она поворачивается при повороте всех сил на один и тот же угол вокруг своих точек приложения, называют *центром параллельных сил*. Покажем центр параллельных сил, например, для системы двух сил, направленных в одну сторону и приложенных в точках A_1 и A_2 тела (рис. 6.2). Равнодействующая этих сил $F = F_1 + F_2$ приложена в точке C , делящей расстояние A_1A_2 на части, обратно пропорциональные силам:

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Этот результат известен из курса физики в средней школе. Повернем силы F_1 и F_2 вокруг точек приложения на угол α в одну и ту же сторону. Очевидно, что равнодействующая сил F также повернется на тот же угол вокруг точки C . Точка C и является центром параллельных сил для системы сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$.

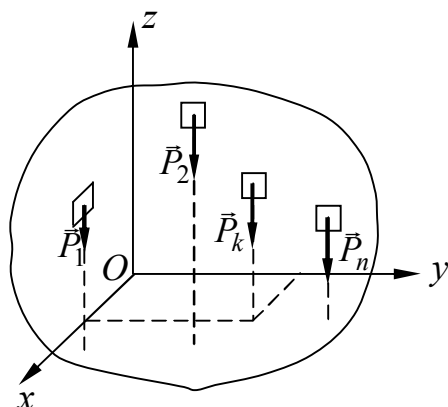


Рис. 6.1

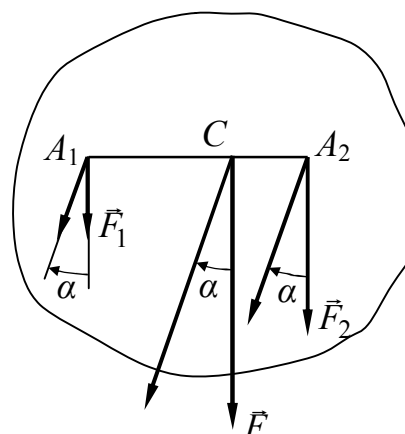


Рис. 6.2

6.1. Координаты центра тяжести тела

Выведем формулы для вычисления координат центра тяжести тела (или центра параллельных сил), считая известными координаты точек приложения сил $\vec{P}_k(x_k, y_k, z_k)$ и величины этих сил. На рис. 6.3 показаны одна из составляющих сил \vec{P}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и равнодействующая их – сила тяжести тела \vec{P} , приложенная в центре тяжести – точке $C(x_c, y_c, z_c)$.

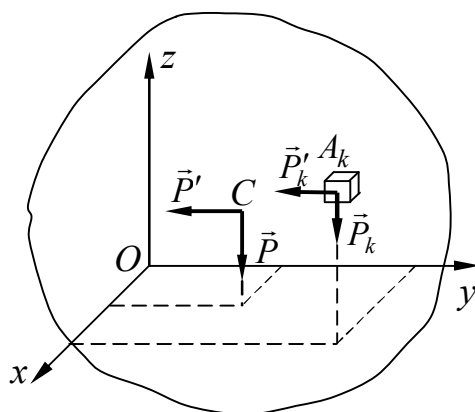


Рис. 6.3

Применим теорему Вариньона о моменте равнодействующей относительно координатных осей Ox , Oy :

$$m_x(\vec{P}) = \sum m_x(\vec{P}_k), \quad m_y(\vec{P}) = \sum m_y(\vec{P}_k). \quad (6.2)$$

Из рис. 6.3 видно, что плечи сил относительно оси Ox – ординаты, а относительно оси Oy – абсциссы точек приложения сил.

Написанные равенства примут вид

$$Px_C = \sum P_k x_k, \quad Py_C = \sum P_k y_k.$$

Из этих уравнений вычисляются координаты x_C, y_C . Для получения координаты z_C повернем все силы (для сил тяжести – всё тело вместе со скрепленными с ним осями координат) так, чтобы они были параллельны оси Oy (см. рис. 6.3), и вновь применим теорему Вариньона относительно оси Ox :

$$Pz_C = \sum P_k z_k.$$

Итак, получаем формулы для вычисления всех координат центра тяжести тела:

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{P}, \quad y_C = \frac{\sum P_k y_k}{P}, \quad z_C = \frac{\sum P_k z_k}{P}, \quad (6.3)$$

где P определяется из (6.1).

Если из начала координат провести в точки приложения сил радиусы-векторы этих точек \vec{r}_k и \vec{r}_C , то из (6.3) следует и выражение для радиуса-вектора \vec{r}_C :

$$\vec{r}_C = \frac{\sum P_k \vec{r}_k}{P}. \quad (6.4)$$

По формулам (6.3) определяется также положение центра параллельных сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, направленных в разные стороны. В этом случае следует под P_k понимать алгебраические величины, т.е. проекции сил \vec{F}_k на ось, параллельную силам, а под P – равнодействующую, равную алгебраической сумме проекций всех сил на эту же ось.

6.2. Координаты центров тяжести однородных тел

Для однородного тела, у которого удельный вес всех его частиц одинаков, положение центра тяжести тела не зависит от материала, а определяется лишь геометрической формой тела. Действительно, обозначив удельный вес (вес единицы объема) через γ , имеем

$$P_k = \gamma \Delta V_k, \quad P = \gamma V,$$

где ΔV_k и V – соответственно объемы частицы веса P_k и всего тела. Подставив эти значения в (6.3) и сократив на постоянный множитель γ , получим

$$x_C = \frac{1}{V} \sum \Delta V_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum \Delta V_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum \Delta V_k z_k. \quad (6.5)$$

Путем аналогичных рассуждений получают формулы для координат центра тяжести тела в тех случаях, когда оно представляет собой однородную и тонкую поверхность (оболочку), в частности *плоскую пластинку*:

$$x_C = \frac{1}{S} \sum \Delta S_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum \Delta S_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{S} \sum \Delta S_k z_k, \quad (6.6)$$

где S – площадь всей поверхности; ΔS_k – площадь ее части. В случае плоской пластины $z_C = 0$, а выражения, стоящие в числителях, называют *статическими моментами площади* относительно координатных осей:

$$S_x = \sum \Delta S_k y_k, \quad S_y = \sum \Delta S_k x_k.$$

Тогда

$$x_C = \frac{S_y}{S}, \quad y_C = \frac{S_x}{S}, \quad z_C = 0.$$

Если тело имеет одно измерение (составлено из однородных тонких линий), то

$$x_C = \frac{1}{L} \sum \Delta l_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum \Delta l_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum \Delta l_k z_k, \quad (6.7)$$

где L – длина всей линии;

Δl_k – длина ее части.

Заметим, что центры тяжести однородных тел часто называют центрами тяжести объема, площади, линии.

Все написанные выше формулы для координат центра тяжести в общем случае являются приближенными, и результат вычисления будет зависеть от n – числа частиц, на которые разбито рассматриваемое тело. Для получения точных значений координат центра тяжести нужно в этих формулах перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, тогда суммы перейдут в определенные интегралы и формулы (6.5)–(6.7) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV, & y_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV, & z_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV, \\ x_C &= \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS, & y_C &= \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS, & z_C &= \frac{1}{S} \int_{(S)} z dS, \\ x_C &= \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, & y_C &= \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, & z_C &= \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.3. Способы определения положения центров тяжести тел

Для определения положения центров тяжести однородных тел, имеющих простую геометрическую форму, или сложных тел, образованных из простых, можно использовать следующие способы: симметрии, разбиения на части, дополнения или, иначе, способ отрицательных объемов или площадей.

1. Способ симметрии. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости, на оси или в центре симметрии.

Например, однородное круглое кольцо имеет центр симметрии в центре кольца, и, следовательно, там будет и центр тяжести. Прямоугольная пластинка имеет две оси симметрии, и центр тяжести находится на пересечении этих осей и т.д.

2. Способ разбиения на части. Если тело сложной формы можно разбить на конечное число частей, у которых положение центров тяжести известно, то точное положение центра тяжести определяется по формулам (6.5)-(6.7) без привлечения интегрального исчисления.

Например, положение центра тяжести однородной плоской фигуры (рис. 6.4) можно найти точно по формуле (6.6), разбив фигуру на три части и используя способ симметрии. Проводим координатные оси, совместив ось Oy с осью симметрии фигуры. Вычисляем координаты центров тяжести каждого прямоугольника и их площади (размеры даны на рисунке в сантиметрах): $y_1 = 1$ см, $y_2 = 5$ см, $y_3 = 9$ см, $S_1 = 16$ см², $S_2 = 12$ см², $S_3 = 8$ см². Площадь всей пластины $S = S_1 + S_2 + S_3 = 36$ см².

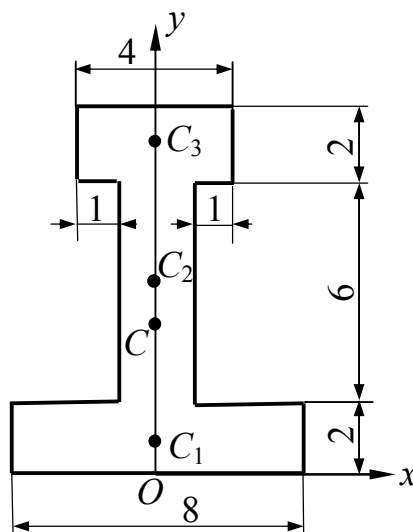


Рис. 6.4

Подставляя числовые значения в формулу (6.6), находим координаты центра тяжести пластины x_C, y_C :

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{1}{S}(y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3),$$

$$y_C = \frac{1}{36}(1 \cdot 16 + 5 \cdot 12 + 9 \cdot 8) = 4 \frac{1}{9} \approx 4,1 \text{ см.}$$

Отметим положение этой точки на рисунке.

3. Способ дополнения. Этот способ является частным случаем предыдущего способа. Применяется он к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без вырезов и вырезанных частей известны. При разбиении на части вырезанные объемы, площади, длины линий берутся в формулах со знаком "минус".

Пример 6.1. Найти положение центра тяжести круглой пластинки, имеющей вырез (рис. 6.5).

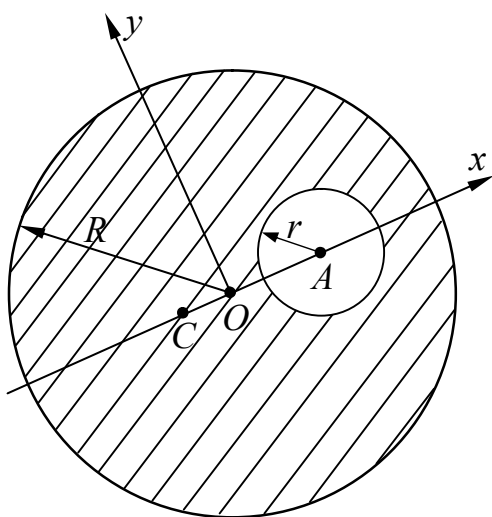


Рис. 6.5

Дано: $R, r, OA = a$. Заштрихованная плоская фигура имеет ось симметрии, которая проходит через центры окружностей O и A .

Решение. Проводим координатные оси, совместив ось Ox с осью симметрии. Тогда $y_C = 0$. Для нахождения координаты x_C дополним площадь пластинки до полного круга (часть 1) и вычтем из нее вырез (часть 2). При этом площадь вырезанной части должна быть взята со знаком "минус". Имеем $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = -\pi r^2$, $S = S_1 + S_2 = \pi(R^2 - r^2)$. Координаты центров тяжести частей $x_1 = 0, x_2 = a$.

Подставляя найденные значения в формулу (6.6), получим

$$x_C = \frac{1}{S}(x_1 S_1 + x_2 S_2) = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}.$$

Укажем положение точки C на рисунке ($x_C < 0$).

6.4. Центры тяжести некоторых однородных тел

1. *Треугольная пластинка.* Разобьем площадь треугольника прямыми, параллельными основанию AB , на большое число узких полосок (рис. 6.6). Каждую такую полоску можно рассматривать как прямолиней-

ный отрезок, у которого центр тяжести находится в его середине. Следовательно, центр тяжести всего треугольника будет лежать на прямой DE (медиане). Аналогичные рассуждения можно провести и для других сторон треугольника. Центр тяжести площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, причем, как известно из геометрии,

$$CE = \frac{1}{3} DE, \quad CD = \frac{2}{3} DE. \quad (6.9)$$

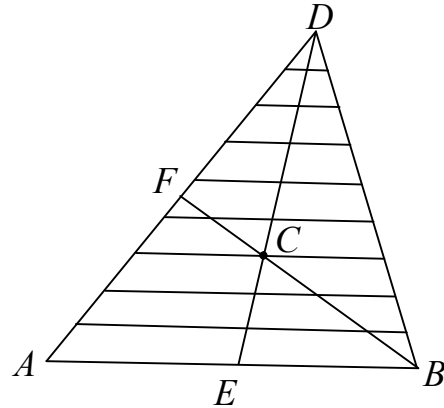


Рис. 6.6

2. *Дуга окружности.* Найдем положение центра тяжести дуги окружности радиуса R с центральным углом $\angle AOB = 2\alpha$ (рис. 6.7). Дуга имеет ось симметрии, которая делит $\angle AOB$ пополам. Примем ось симметрии за ось Ox . Центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $y_C = 0$. Найдем координату x_C по формуле (6.8). Для этого выделим на дуге элемент длиной $dl = R d\varphi$, положение которого определяется углом φ . Координата x центра тяжести этого элемента определится формулой $x = R \cos \varphi$. Подставляя значения x и dl в формулу, получим

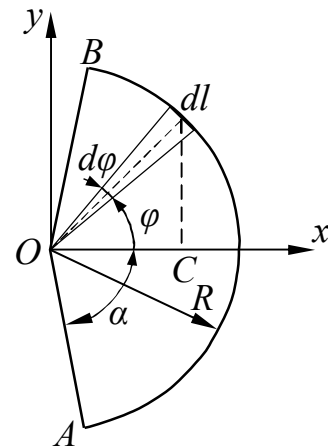


Рис. 6.7

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(AB)} x dl = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{R^2}{L} \cdot 2 \sin \alpha.$$

Длина дуги AB определяется по данному углу $L = R \cdot 2\alpha$, где угол α измеряется в радианах. Тогда

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (6.10)$$

В частном случае для полуокружности $\alpha = \pi/2$

$$x_C = \frac{2}{\pi} R \approx 0,64R.$$

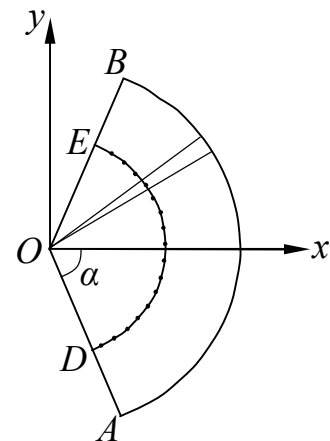


Рис. 6.8

3. *Круговой сектор*. Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$ (рис. 6.8). Сектор имеет ось симметрии, на которой и находится центр тяжести. Разбиваем площадь сектора радиусами, проведенными из центра O на элементарные секторы, которые можно считать приблизительно треугольниками. Центры тяжести элементарных секторов располагаются на дуге окружности радиуса $\frac{2}{3}R$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги DE , положение которого определяется по формуле (6.10).

Итак, центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O , равном

$$x_C = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (6.11)$$

В частности, для площади полукруга получим

$$x_C = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R.$$

4. *Сегмент круга*. Положение центра тяжести площади сегмента круга радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$ (рис. 6.9) найдем способом дополнения. Сегмент дополним до кругового сектора (часть 1), а затем вычтем площадь треугольника OAB (часть 2). Все рассматриваемые фигуры симметричны относительно оси Ox , следовательно, $y_C = 0$, а координата x_C определяется формулой (6.6).

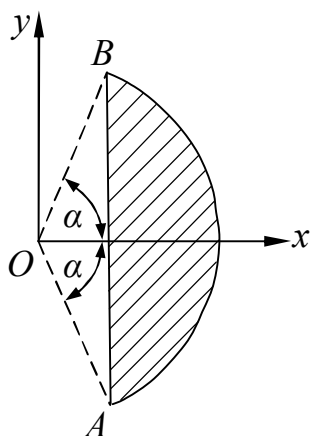


Рис. 6.9

$$x_C = \frac{1}{S}(x_1 S_1 + x_2 S_2),$$

где $x_1 = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; $S_1 = R^2 \alpha$ – координата центра

тяжести и площадь сектора круга: $x_2 = \frac{2}{3}R \cos \alpha$,

$S_2 = -R^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ – координата центра тяжести и площадь треугольника: $S = S_1 + S_2 = R^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$ – площадь сегмента.

Произведя вычисления, получим координату центра тяжести площади сегмента круга

$$x_C = \frac{2}{3}R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

5. *Конус*. Найдем положение центра тяжести конуса высоты H и радиуса основания R (рис. 6.10). Направив ось Oz по оси симметрии конуса, имеем $x_C = 0$, $y_C = 0$,

$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV,$$

где $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ – объем конуса; $dV = \pi r^2 dz$ – выделенный элементарный объем.

Но из подобия треугольников $\frac{r}{R} = \frac{z}{H}$ и, следовательно, $dV = \pi \frac{R^2}{H^2} z^2 dz$. Подставив под знак интеграла это выражение dV , получаем

$$z_C = \frac{1}{V} \cdot \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H z^3 dz = \frac{3}{4} H.$$

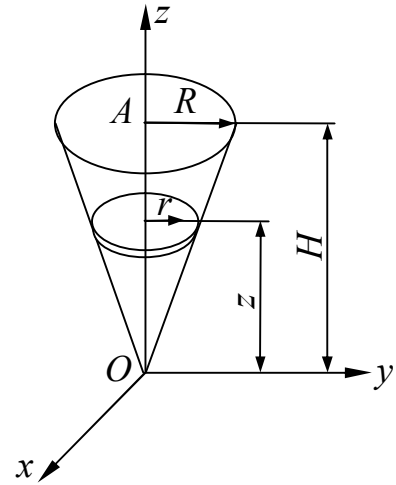


Рис. 6.10

Таким образом, центр тяжести конуса находится на расстоянии $\frac{3}{4} H$ от вершины или $\frac{1}{4} H$ от основания. Этот вывод справедлив также и для объема пирамиды.

6. *Полушар*. Полушар имеет ось симметрии, которую примем за координатную ось Ox (рис. 6.11).

Центр тяжести объема полушара найдем по формуле

$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV,$$

где $V = \frac{2}{3} \pi R^3$ – объем полушара;

$dV = \pi r^2 dx$ – выделенный элементарный объем.

Но квадрат радиуса выделенного диска $r^2 = y^2 = R^2 - x^2$. Выполнив интегрирование в пределах от $x = 0$ до $x = R$, получим

$$x_C = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \pi (R^2 - x^2) x dx = \frac{3}{8} R.$$

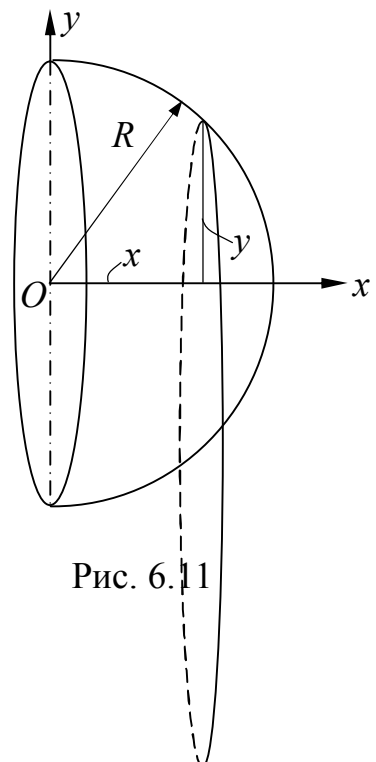


Рис. 6.11

Таким образом, центр тяжести объема полушара находится от его центра O на расстоянии

$$OC = \frac{3}{8} R.$$

Формулы, определяющие положение центров тяжести многих других однородных тел правильной геометрической формы, можно найти в различных технических справочниках.

Центры тяжести как однородных, так и неоднородных тел сложной конфигурации можно определять экспериментально (например, методом подвешивания на нити, методом взвешивания).

Вопросы для самопроверки

1. Может ли система параллельных сил приводиться к силовому винту?
2. Приведите определение центра параллельных сил.
3. Назовите простейшие методы определения положения центра тяжести однородных тел.
4. Центры тяжести трех однородных дисков одинакового веса расположены в вершинах A , B , C треугольника. Указать положение центра тяжести системы.

Часть 2. Кинематика

Введение

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел в пространстве без учета их массы и действующих на них сил.

В кинематике движущиеся объекты рассматриваются как геометрические точки или тела и именуются соответственно *точка* и *тело*. Наряду с точкой и телом в кинематике рассматривается движение системы связанных тел (механизмов). Являясь введением в динамику, где движение изучается с учетом масс и сил взаимодействия, кинематика имеет и самостоятельное значение. Ее методы широко применяются в расчетах механизмов и машин.

Название *кинематика* (от греч. *kinema* – движение) дано этому разделу механики в 1834 году Ампером.

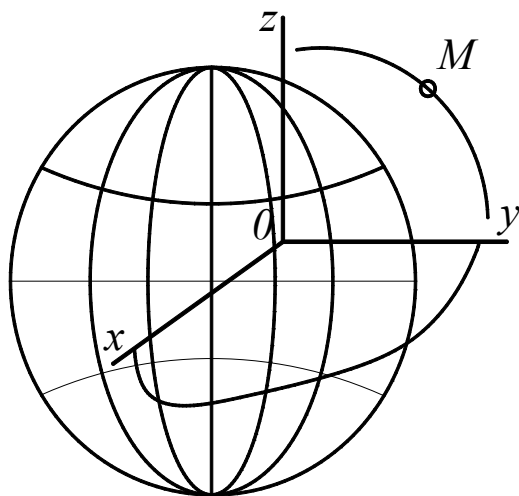
Как указывалось ранее, в теоретической механике изучается механическое движение – это изменение с течением времени положения материальных тел в пространстве относительно друг друга, а также изменение относительного положения материальных частиц данного тела, т.е. его деформация. Всякое движение, в том числе и механическое, происходит в пространстве и во времени, которые являются самыми общими формами существования материи. Пространство в механике предполагается трехмерным евклидовым. Его свойства во всех точках и направлениях одинако-



Ампер Андре Мари (1755–1836) – французский физик, математик и химик

вы (однородность и изотропность) и не зависят от тел, находящихся в нем.

Для определения положения движущегося тела (или точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему осей координат. Это тело вместе с осями координат называют системой отсчета. Если координаты всех точек тела в этой системе остаются все время постоянными, то тело относительно этой системы находится в покое. Если же координаты изменяются (хотя бы некоторые), то тело движется относительно этой системы отсчета. Движение точки или тела всегда является относительным движением (относительно выбранной системы отсчета). При изучении движения систему отсчета



Система отсчета с использованием декартовых координат

обычно связывают с Землей, используя декартовы, цилиндрические или сферические координаты.

Время принято считать одинаковым во всех системах отсчета, независимо от их движения. С математической точки зрения время является аргументом, а все величины, характеризующие движение, – функциями. Отсчет времени ведется от некоторого начального момента, выбираемого в каждой задаче особо. Число секунд, прошедших от выбранного начального момента до рассматриваемого, определяет данный момент времени. Разность между двумя моментами определяет промежуток времени.

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было как-то задано. Задать движение точки или тела относительно какой-либо системы отсчета – значит указать способ или метод, позволяющий найти положение точки или тела в любой момент времени в этой системе отсчета.

Изучение движения любого объекта начинается с установления способов задания его движения.

Изучение кинематики начнем с изучения движения простейшего объекта – точки, а затем перейдем к изучению движения тела и системы тел.

Глава 7. Кинематика точки. Способы задания движения

Движущаяся точка описывает в системе отсчета некоторую линию – *прямолинейную* или *криволинейную*. Эта линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета, называется траекторией точки. Прямолинейное движение является частным случаем криволинейного. Поэтому все формулы в дальнейшем будут устанавливаться для криволинейного движения, а для прямолинейного получаться как частный случай.

В кинематике применяют три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

7.1. Векторный способ

При векторном способе задаются (рис. 7.1): а) система отсчета; б) радиус-вектор, проведенный из некоторой неподвижной точки, например начала координат, и определяющий положение движущейся точки.

При движении точки радиус-вектор меняется с течением времени по модулю и направлению и является векторной функцией скалярного аргумента t – времени.

Зависимость радиуса-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (7.1)$$

представляет собой закон или уравнение движения точки.

Как известно из математики, геометрическое место концов переменного вектора при зафиксированном начале называют годографом вектора. Поэтому траектория точки является годографом $\vec{r}(t)$.

Векторный способ задания движения используется обычно в теории при выводе формул.

7.2. Координатный способ

При координатном способе задаются (рис. 7.2): а) система отсчета; б) координаты точки, определяющие ее положение.

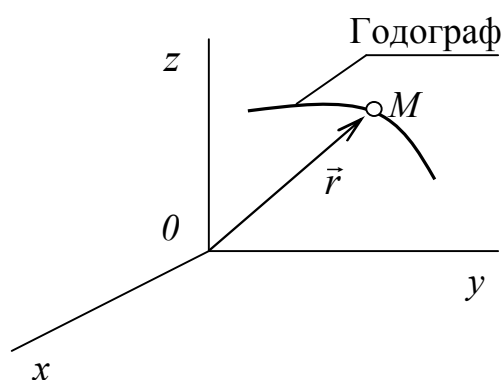


Рис. 7.1

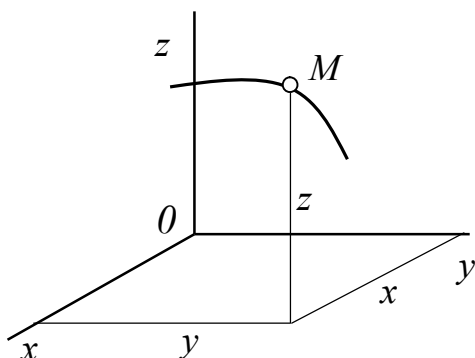


Рис. 7.2

При движении точки ее координаты меняются с течением времени и зависимости

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (7.2)$$

представляют собой уравнения движения точки в декартовых координатах.

Положение точки может задаваться и другими координатами – цилиндрическими, сферическими и т.д.

Если точка движется по плоской траектории, то уравнения движения ее задаются двумя функциями времени

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \quad (7.3)$$

В случае прямолинейного движения уравнение представляет одну функцию времени

$$x = f_1(t). \quad (7.4)$$

Уравнения движения точки представляют собой уравнение траектории в параметрической форме. Для получения уравнения траектории в координатной форме из уравнений (7.2) следует исключить параметр t . Например, решая первое уравнение относительно t , получим $t = \varphi(x)$. Подставив полученное для t выражение в два других уравнения, найдем уравнение траектории в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)], \quad z = f_3[\varphi(x)]. \quad (7.5)$$

Известно, что уравнениям (7.5) соответствует пространственная кривая, являющаяся пересечением двух поверхностей.

При движении точки в плоскости xOy , исключая из уравнений (7.3) параметр t , получим уравнение траектории в координатной форме

$$y = f[\varphi(x)].$$

Пример 7.1. Уравнения движения точки в плоскости xOy имеют вид $x = 2t$, $y = t^2$ см. Определить уравнение траектории в координатной форме.

Последовательность действий: $t = \frac{x}{2}$; $y = t^2 = \frac{1}{4}x^2$ – траекторией точки является часть параболы (рис. 7.3).

$$t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Пример 7.2. Уравнения движения точки в плоскости xOy : $x = 2\sin^2 t$ [см]; $y = 2\cos^2 t$ [см]. Складывая левые и правые части уравнений, получаем уравнение траектории

$$x + y = 2.$$

Траекторией точки является отрезок прямой $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ (рис. 7.4).

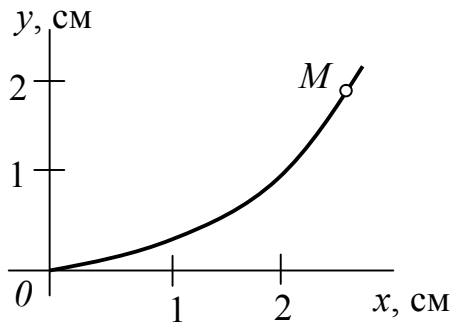


Рис. 7.3

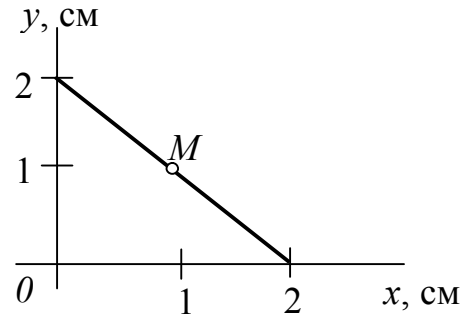


Рис. 7.4

Отметим, что не всегда из уравнений (7.3) удастся исключить параметр t . В этом случае уравнение траектории рассматривают только в параметрической форме. Для построения траектории задают числовые значения аргумента t (с шагом Δt) и вычисляют соответствующие числовые значения координат в эти моменты времени.

Пример 7.3. Даны уравнения движения точки:

$$x = 2\sin 3\pi t - 3\sin 2\pi t,$$

$$y = 2\cos 3\pi t + 3\cos 2\pi t,$$

где координаты x , y – в сантиметрах, время t – в секундах.

Найти траекторию точки.

Из приведенных уравнений нельзя исключить параметр t . Уравнение траектории существует только в параметрической форме. Траектория точки, построенная с использованием пакета Mathematica 6 (процедура Parametric Plot), показана на рис. 7.5. Здесь координаты точки вычислялись для значений t с шагом $\Delta t = 0,05$ с.

Пример 7.4. Уравнения движения точки M , лежащей на ободе колеса $R = 1$ м, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости, причем скорость центра колеса $v_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, имеют вид

$$x = 20t - \sin 20t \text{ м},$$

$$y = 1 - \cos 20t \text{ м}.$$

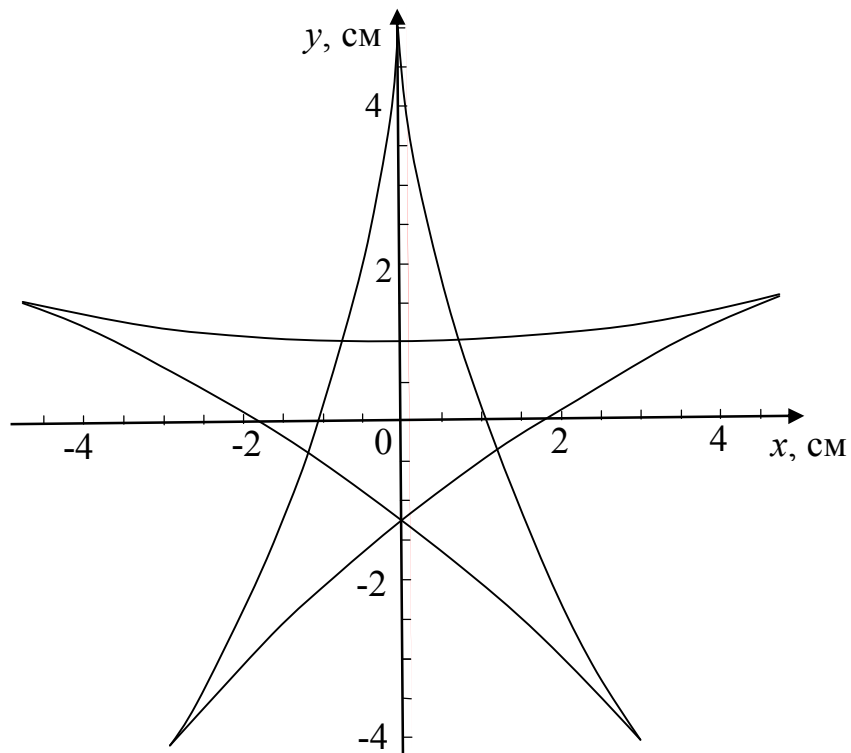


Рис. 7.5

Уравнению траектории в параметрической форме соответствует циклоида (рис. 7.6), построенная аналогично примеру 7.3, причем шаг по времени имеет значение $\Delta t = 0,01$ с.

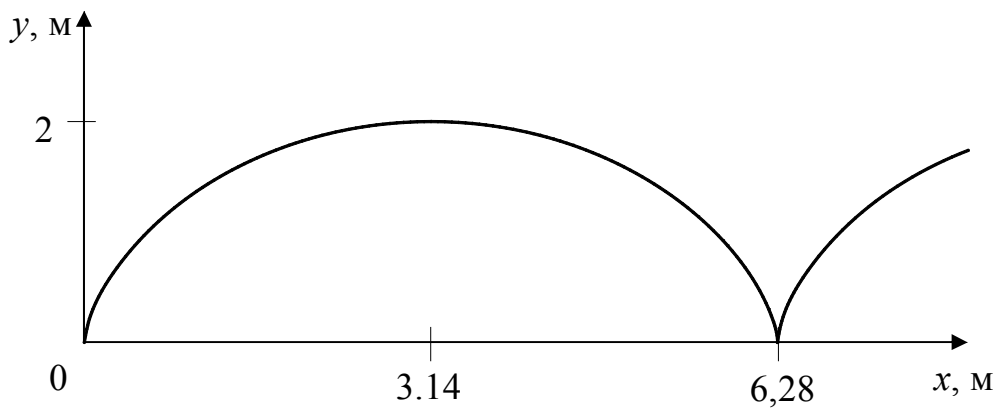


Рис. 7.6

В заключение полезно отметить, что связь векторного и координатного способов устанавливается формулой

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (7.6)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты точки; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – орты координатных осей.

7.3. Естественный способ. Естественные оси координат

При естественном способе задаются (рис. 7.7):

- а) траектория точки;
- б) начало отсчета криволинейной координаты s ;
- в) положительное направление отсчета координаты;
- г) зависимость криволинейной координаты, определяющей положение точки, от времени $t - s(t)$. Зависимость

$$s = s(t) \quad (7.7)$$

есть уравнение или закон движения точки по траектории. Функция $s(t)$ является непрерывной, однозначной и дифференцируемой.

Не следует смешивать дуговую координату s с пройденным точкой путем. Действительно, рассмотрим пример: по данной траектории движется точка по закону $s = 2t - t^2$ [м].

Задавая значения моментов времени t , вычислим соответствующие им значения координаты s и пройденного пути σ (табл. 7.1).

Таблица 7.1

$t, \text{с}$	$s, \text{м}$	$\sigma, \text{м}$
0	0	0
1	1	1
2	0	2
3	-3	5

Через две секунды криволинейная координата $s = 0$, а пройденный точкой путь $\sigma = 2$ м. Для совпадения пути и дуговой координаты нужно, чтобы движение проходило в одном направлении из начала отсчета.

При движении точки в плоскости xOy связь естественного и координатного способов устанавливается формулой

$$s = \int_{\cup OM} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad (7.8)$$

где символом \circ над соответствующей функцией обозначена производная функции по времени.

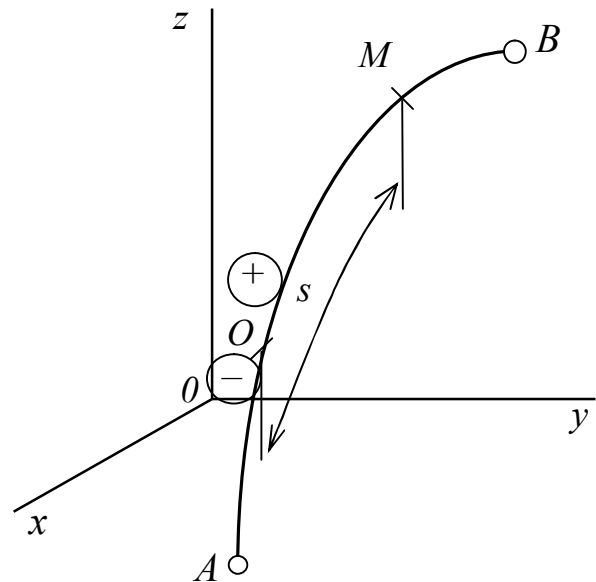


Рис. 7.7

Естественные оси координат – касательная, главная нормаль, бинормаль.

Рассмотрим пространственную кривую – линию двоякой кривизны (рис. 7.8).

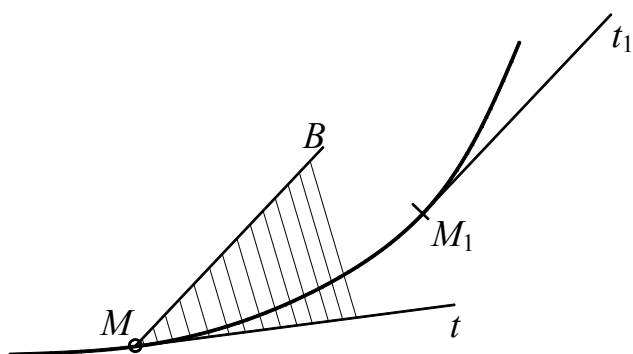


Рис. 7.8

Проведем через точку M касательную Mt к траектории и будем определять положительное направление этой касательной единичным вектором \vec{t} , направленным в сторону возрастания дуговой координаты s и равным по модулю 1. Этот вектор \vec{t} называется ортом касательной.

Возьмем на траектории точку M_1 , весьма близкую к точке M , проведем через точку M прямую MB , параллельную касательной

M_1t_1 , и построим плоскость, проходящую через две прямые Mt и MB . Будем теперь точку M_1 приближать к точке M так, чтобы в пределе точка M_1 совпала с точкой M . При этом будет изменяться и положение плоскости BMt . Эта плоскость будет, очевидно, вращаться вокруг прямой Mt , приближаясь к предельному положению. Плоскость, представляющая предельное положение плоскости BMt при $M_1 \rightarrow M$, называется соприкасающейся плоскостью кривой в точке M .

Отметим, что соприкасающаяся плоскость – это плоскость, проходящая через данную точку и две соседние близлежащие точки.

В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с той плоскостью, в которой расположена эта кривая.

Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную касательной в этой точке. Эта плоскость называется нормальной плоскостью. Всякая прямая, проведенная через точку M в нормальной плоскости, перпендикулярна к касательной Mt и является нормалью траектории в точке M . Введем понятие главной нормали. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости (т.е. линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей), является главной нормалью данной кривой в точке M (рис 7.9). За положительное направление главной нормали принимается направление от точки M в сторону вогнутости траектории.

Направление главной нормали будем определять единичным вектором \vec{n} , направленным по главной нормали в положительную сторону. Этот вектор \vec{n} называется ортом главной нормали. Нормаль, перпендику-

лярная к соприкасающейся плоскости, называется бинормалью; орт бинормали будем обозначать через \vec{b} . Что касается положительного направления бинормали, то это направление будем определять так, чтобы три вектора $\vec{\tau}$, \vec{n} и \vec{b} были ориентированы по отношению друг к другу так же, как орты \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} правой системы координат, т.е. орт \vec{b} связан с $\vec{\tau}$ и \vec{n} соотношением $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.



Рис. 7.9

Три оси, имеющие начало в точке M и направленные по касательной, главной нормали и бинормали траектории в этой точке, называются *естественными осями* и являются ребрами так называемого *естественного триэдра*, или *естественного трехгранника*. При движении точки M по траектории начало координат перемещается вместе с движущейся точкой, а естественные оси перемещаются, меняя свою ориентировку в пространстве. Следовательно, орты $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} будут переменными по направлению векторами. Вычислим производную $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ (она потребуется далее) при движении точки по траектории, учитывая, что орт $\vec{\tau}$ будет функцией дуговой координаты.

Докажем, что

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}, \quad (7.9)$$

где ρ — радиус кривизны траектории.

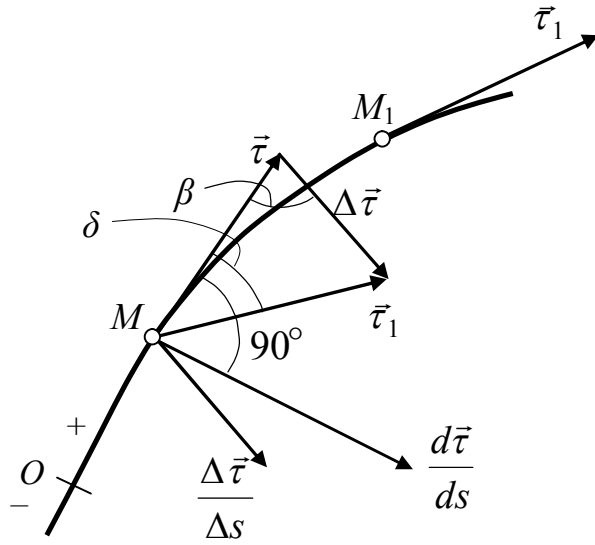


Рис. 7.10

Рассмотрим два положения точки: M и M_1 , причем $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ – орты касательной, s и s_1 – дуговые координаты (рис. 7.10).

Пусть длина дуги $\cup MM_1 = \Delta s = s_1 - s$. Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ представляет собой предел отношения $\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}$, т.е. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}$. Пусть δ – угол между направлениями касательных в двух точках, называемый углом смежности. Вычислим модуль $\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$, учитывая, что угол δ

– мал и $\sin \delta \approx \delta$. Имеем

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2|\vec{\tau}| \cdot \sin \frac{\delta}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\delta}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}, \quad (7.10)$$

где k – кривизна кривой в точке M ;
 ρ – радиус кривизны в точке M .

Вектор $\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}$ направлен по $\Delta \vec{\tau}$ в сторону вогнутости (независимо от направления движения).

Обозначим через β угол между векторами $\vec{\tau}$ и $\Delta \vec{\tau}$ ($\beta = (\vec{\tau}, \Delta \vec{\tau})$), который равен $90^\circ - \frac{\delta}{2}$. При стремлении точки M_1 к M $\delta \rightarrow 0$ и угол $\beta = 90^\circ$.

Поскольку вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ расположен в соприкасающейся плоскости и перпендикулярен к касательной, то он лежит на главной нормали, т.е. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}$ (отметим, что получена известная из аналитической геометрии формула Френе).

Установив способы задания движения точки, перейдем теперь к определению основных пространственно-временных характеристик движения точки – скорости и ускорения.

7.4. Скорость и ускорение точки

Зададим движение точки векторным способом:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Пусть в момент времени t точка находилась в положении M , в момент t_1 – в M_1 . Тогда за промежуток $\Delta t = t_1 - t$ вектор \vec{r} изменился на $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ (рис. 7.11). Этот вектор $\overrightarrow{MM_1} = \Delta \vec{r}$ называют вектором перемещения точки за промежуток времени Δt .

Средней скоростью точки (векторной) называют вектор

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Этот вектор направлен по вектору перемещения. Модуль и направление \vec{v}_{cp} , очевидно, зависят от промежутка времени Δt . Чем меньше выбран промежуток времени Δt , тем точнее величина \vec{v}_{cp} будет характеризовать движение. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим вектор скорости точки в данный момент t :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (7.11)$$

Этот вектор, очевидно, будет направлен по касательной в точке M и равен первой производной по времени от вектора \vec{r} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (7.12)$$

Итак, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной по времени от ее радиуса-вектора и направлен по касательной к траектории в сторону движения.

Размерность скорости $[v] = \frac{L}{T}$, единица скорости – 1 м/с.

Ускорение точки – вторая кинематическая мера движения точки, характеризующая изменение модуля и направления скорости точки.

Пусть точка M движется по траектории и в момент t имеет скорость \vec{v} , в момент $t_1 = t + \Delta t$ она находится в точке M_1 и имеет скорость \vec{v}_1 . За время $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки изменилась на $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ (рис. 7.12).

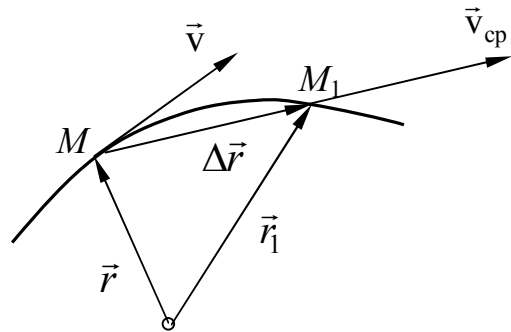


Рис. 7.11

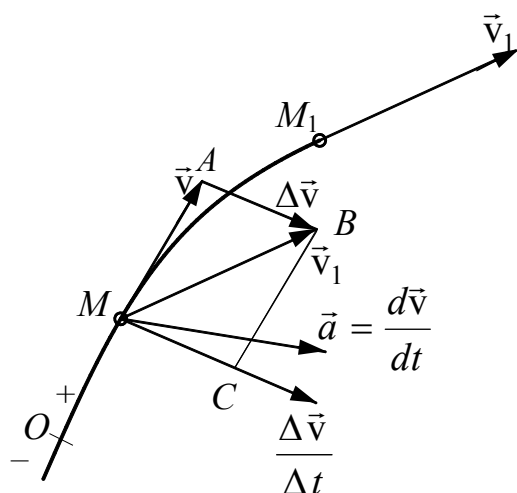


Рис. 7.12

Для построения $\Delta \vec{v}$ из точки M проведем вектор, равный \vec{v}_1 , и построим параллелограмм $MABC$, при этом сторона $\vec{MC} = \Delta \vec{v}$. Средним ускорением точки за промежуток Δt называют вектор $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{\text{cp}}$ (или можно обозначить \vec{w}_{cp}), который направлен так же, как и вектор $\Delta \vec{v}$.

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим ускорение точки

в данный момент времени \vec{a} :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (7.13)$$

Поскольку $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (7.14)$$

или

$$\vec{a} = \ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Размерность ускорения $[a] = L \cdot T^{-2}$, единица измерения – 1 м/с^2 .

Как располагается вектор \vec{a} по отношению к траектории точки? При прямолинейном движении вектор \vec{a} , очевидно, направлен по той же прямой. Если точка движется по плоской кривой, то вектор \vec{a} лежит в этой же плоскости и направлен в сторону ее вогнутости. Если траекторией точки является пространственная кривая (кривая двойкой кривизны), то вектор \vec{a} лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

Замечание. Приведенные формулы для скорости и ускорения точки являются формулами определения скорости и ускорения при векторном способе задания движения.

7.5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

Пусть заданы уравнения движения точки M :

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Нужно определить скорость и ускорение точки в данный момент времени t .

Проведя из начала координат радиус-вектор \vec{r} (рис. 7.13), можно записать, что

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (7.15)$$

Как было показано, скорость и ускорение определяются формулами

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Подставляя в эти формулы \vec{r} и определяя производные, получаем

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (7.16)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (7.17)$$

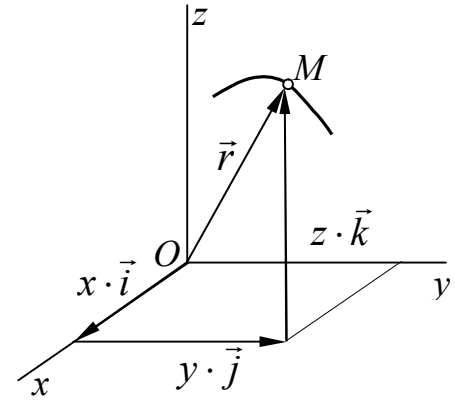


Рис. 7.13

так как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – векторы, имеющие постоянный модуль и направление. С другой стороны, векторы \vec{v} и \vec{a} можно разложить на составляющие, параллельные координатным осям:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \quad (7.18)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad (7.19)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции скорости; a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси координат.

Сравнивая формулы, получаем выражение для проекций скорости и ускорения на оси координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Проекции скорости (ускорения) точки на декартовы оси координат равны первым (вторым) производным по времени от соответствующих координат точки.

Модуль и направление векторов \vec{v} и \vec{a} определяются по известным формулам векторной алгебры:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (7.22)$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}, \quad (7.23)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (7.24)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a}. \quad (7.25)$$

При движении точки по плоской кривой (в плоскости xOy): $z = 0$, $v_z = \dot{z} = 0$, $a_z = \ddot{z} = 0$.

При прямолинейном движении (по оси Ox): $v_x = \pm v$, $a_x = \pm a$, т.к. $v_y = v_z = 0$, $a_y = a_z = 0$.

Вычислив скорость и ускорение точки для произвольного момента времени, можно сделать вывод о характере движения точки в каждый момент времени. Движение точки будет ускоренным, если модуль скорости возрастает ($\dot{v} > 0$), замедленным, если убывает ($\dot{v} < 0$), равномерным при $v = \text{const}$ ($\dot{v} = 0$). При $\dot{v} = 0$ только в один из моментов времени получаем, что скорость в этот момент времени имеет экстремальное значение.

Пример 7.5. Определить траекторию, скорость и ускорение точки, если движение задано уравнениями $x = 2\cos\pi t$, $y = \sin\pi t$. Координаты заданы в метрах, время t – в секундах. Вычислить и построить векторы для $t = 0$ и $t = 0,5$ с.

Для получения траектории исключим t из данных уравнений движения: $\cos \pi t = \frac{x}{2}$, $\sin \pi t = y$, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Траекторией точки M является эллипс с полуосями $(2, 1)$ (рис. 7.14). Определим скорость точки:

$$v_x = \dot{x} = -2\pi \sin \pi t;$$

$$v_y = \dot{y} = \pi \cos \pi t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pi \sqrt{4 \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t} = \pi \sqrt{3 \sin^2 \pi t + 1}.$$

Определим ускорение точки:

$$a_x = \ddot{x} = -2\pi^2 \cos \pi t;$$

$$a_y = \ddot{y} = -\pi^2 \sin \pi t;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2 \sqrt{4 \cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t} = \pi^2 \sqrt{3 \cos^2 \pi t + 1}.$$

Дальнейшие вычисления сводим в таблицу (табл. 7.2).

Таблица 7.2

$t, \text{с}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$	$v_x, \text{м/с}$	$v_y, \text{м/с}$	$v, \text{м/с}$	$a_x, \text{м/с}^2$	$a_y, \text{м/с}^2$	$a, \text{м/с}^2$
0	2	0	0	π	π	$-2\pi^2$	0	$2\pi^2$
0,5	0	1	-2π	0	2π	0	$-\pi^2$	π^2

Траектория, положения точки, скорости и ускорения в моменты времени $t_1 = 0 \text{ с}$ и $t_2 = 0,5 \text{ с}$ показаны на рис. 7.14.

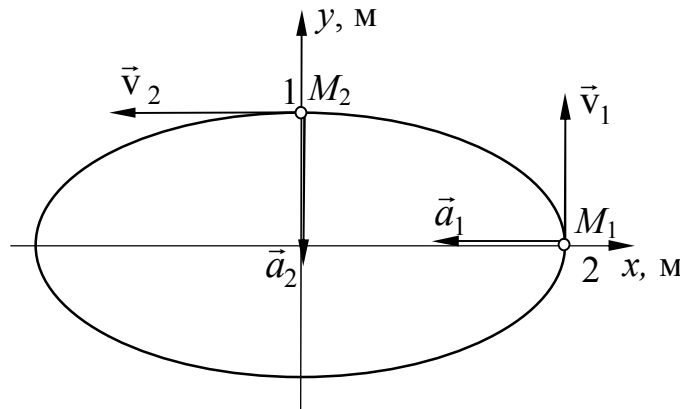


Рис. 7.14

7.6. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения

Пусть в некоторой системе отсчета задано движение точки M естественным способом, т.е. даны траектория, начало отсчета, положительное направление отсчета координаты s и уравнение движения точки по траектории $s = f(t)$ (рис. 7.15).

Определение скорости. При движении точки по заданной траектории радиус-вектор \vec{r} точки можно считать функцией дуговой координаты s , которая является функцией времени

$$\vec{r} = \vec{r}[s(t)]. \quad (7.26)$$

Тогда скорость точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

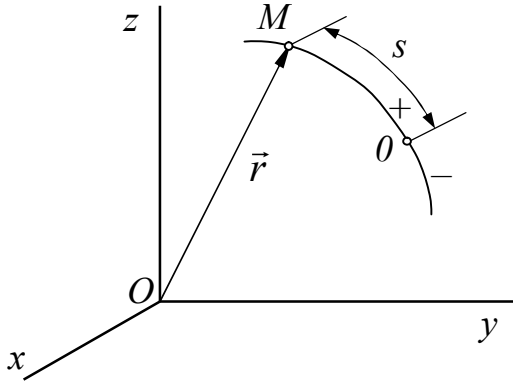


Рис. 7.15

Очевидно, что $\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1$

как предел отношения бесконечно малой дуги к стягивающей ее хорде.

Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной в сторону положительного отсчета дуговых координат. Следовательно, $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ — производная радиуса-вектора по координате s равна единичному вектору касательной $\vec{\tau}$. Тогда

скорость точки может быть представлена в виде

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}. \quad (7.27)$$

Если обозначить проекцию скорости на касательную через v_τ , то получим

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}, \quad (7.28)$$

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}. \quad (7.29)$$

Итак, имеем

$$v_\tau = \dot{s}. \quad (7.30)$$

Проекция вектора скорости на касательную равна первой производной от дуговой координаты по времени. Знак производной \dot{s} указывает направление движения точки. Если $\dot{s} < 0$, то точка движется в сторону убывания дуговой координаты и вектор \vec{v} направлен противоположно орту $\vec{\tau}$ рис. (7.16,a). Если $\dot{s} > 0$, то точка движется в сторону увеличения дуговой координаты s и вектор \vec{v} совпадает по направлению с $\vec{\tau}$ (рис.7.16,б).

Модуль скорости $v = |\vec{v}| = |\dot{s}|$.

Величину v_τ называют также алгебраическим значением скорости.

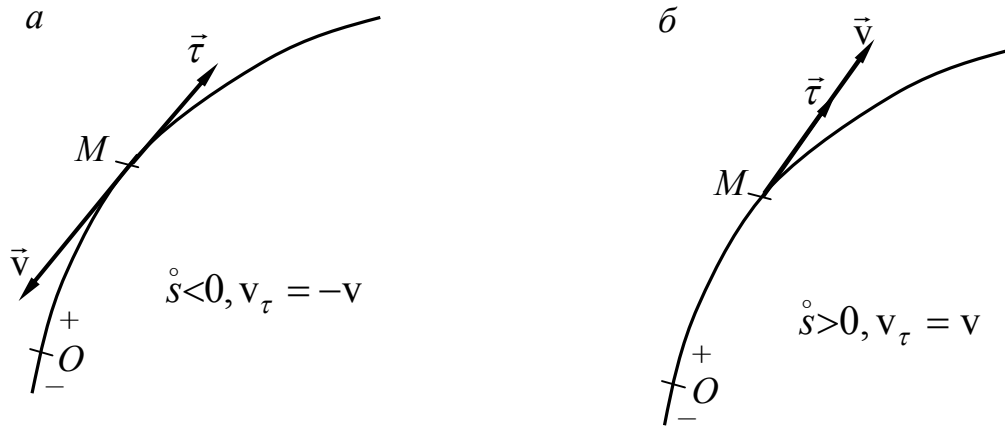


Рис. 7.16

Определение ускорения.

Касательное и нормальное ускорения точки

При естественном способе задания движения ускорение точки находят по его проекциям на естественные оси координат $\vec{a}(a_\tau, a_n, a_b)$. Поскольку вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, то его проекция на бинормаль всегда равна нулю ($a_b = 0$), что будет показано ниже при определении ускорения.

В параграфе 7.4 было получено, что ускорение определяется формулой

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (7.31)$$

Скорость точки $\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}$. Подставив это выражение в формулу (7.31), получаем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \vec{\tau}) = \ddot{s} \vec{\tau} + \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (7.32)$$

Орт касательной $\vec{\tau}$ при движении точки меняется по направлению, являясь сложной функцией времени. Производная орта $\vec{\tau}$ по времени:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (7.33)$$

Производная $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ (см. (7.3)) вычислена ранее: $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}$.

Тогда выражение (7.33) приводится к виду

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{s} \frac{1}{\rho} \vec{n}. \quad (7.34)$$

Подставляя в формулу (7.32), получим

$$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho} \vec{n}.$$

Учитывая, что $\dot{s}^2 = v_\tau^2 = v^2$, окончательно имеем

$$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (7.35)$$

С другой стороны, разложение ускорения на составляющие по естественным осям координат можно представить в виде

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + a_b \vec{b}. \quad (7.36)$$

Сравнивая (7.36) и (7.35), получим проекции ускорения на естественные оси координат:

$$\begin{aligned} - \text{касательную} \quad a_\tau &= \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}, \\ - \text{главную нормаль} \quad a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho} \dot{s}^2, \\ - \text{бинормаль} \quad a_b &= 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Из выражения (7.35) следует, что вектор ускорения точки равен геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по касательной к траектории (касательное ускорение), а другой – по главной нормали (нормальное ускорение).

Вектор касательного ускорения точки

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s} \vec{\tau}, \quad (7.38)$$

вектор нормального ускорения точки

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (7.39)$$

С использованием (7.38) и (7.39) ускорение точки можно записать в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (7.40)$$

Из формул (7.37) видно, что нормальное ускорение точки всегда положительно, следовательно, вектор \vec{a}_n всегда направлен в сторону вогнутости траектории, как и орт \vec{n} .

Проекция ускорения на касательную может быть положительной и отрицательной. Если $v_\tau = \dot{s}$ и $a_\tau = \ddot{s}$ имеют одинаковые знаки, произведение $v_\tau a_\tau > 0$, то модуль скорости возрастает и движение точки будет

ускоренным (рис. 7.17,а). Если v_τ и a_τ имеют разные знаки, произведение $v_\tau a_\tau < 0$, то модуль скорости убывает, движение точки будет замедленным (рис. 7.17,б).

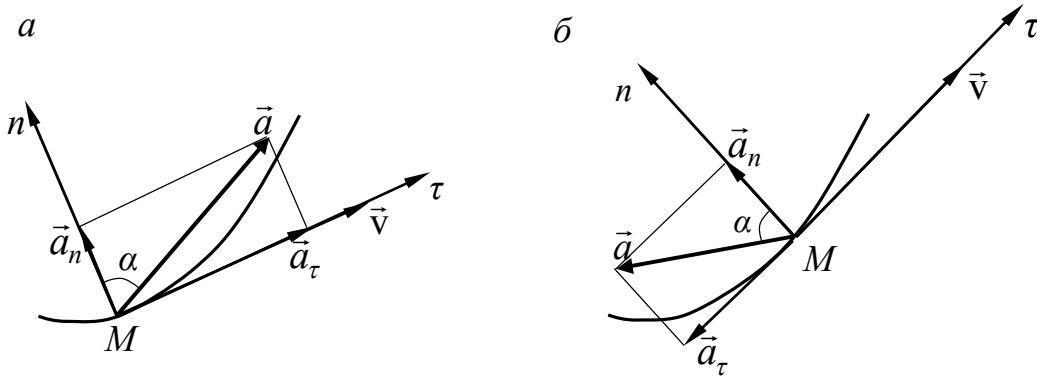


Рис. 7.17

Из рис. 7.17 видно, что при ускоренном движении точки угол между векторами \vec{v} и \vec{a} будет острым, а при замедленном – тупым.

В случае равномерного движения точки, когда $v = \text{const}$, ускорение $a_\tau = 0$ и угол между \vec{v} и \vec{a} будет прямым.

Зная проекции ускорения на касательную и главную нормаль, можно найти модуль ускорения и его направление в соприкасающейся плоскости:

$$\text{– модуль} \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad (7.41)$$

$$\text{– направление} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n}, \quad (7.42)$$

где α – угол между ускорением и главной нормалью.

Пример 7.6. Движение точки в плоскости xOy задано уравнениями $x = 4\sin\pi t$, $y = 3\cos 2\pi t$, где координаты x, y – в метрах, время t – в секундах.

Определить уравнение траектории, скорость и ускорение точки, касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в момент времени $t = \frac{1}{6}$ с. Построить векторы скорости и ускорения для заданного момента времени.

Решение. Исключая из уравнений движения параметр t , получим уравнение траектории в координатной форме:

$$y = 3\cos 2\pi t = 3(1 - 2\sin^2 \pi t), \quad y = 3 - \frac{3}{8}x^2,$$

это уравнение параболы. Траекторией точки является часть параболы при значениях координат $|x| \leq 4$, $|y| \leq 3$.

Скорость точки определяется через проекции на оси координат и для произвольного момента времени имеет следующее значение:

$$v_x = \dot{x} = 4\pi \cos \pi t;$$

$$v_y = \dot{y} = -6\pi \sin 2\pi t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\pi \sqrt{4 \cos^2 \pi t + 9 \sin^2 2\pi t}.$$

Ускорение точки также определяется через проекции на оси координат и для произвольного момента времени t будет представлено в виде

$$a_x = \ddot{x} = -4\pi^2 \sin \pi t;$$

$$a_y = \ddot{y} = -12\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\pi^2 \sqrt{\sin^2 \pi t + 9 \cos^2 2\pi t}.$$

Касательное ускорение в произвольный момент времени t :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \pi^2 \frac{-4 \sin 2\pi t + 18 \sin 4\pi t}{\sqrt{4 \cos^2 \pi t + 9 \sin^2 2\pi t}}.$$

Дальнейшие вычисления – определение нормального ускорения и радиуса кривизны траектории – удобно выполнить для заданного момента времени $t = \frac{1}{6}$ с и свести в табл. 7.3.

Таблица 7.3

$t, \text{с}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$	$v_x, \text{м/с}$	$v_y, \text{м/с}$	$v, \text{м/с}$	$a_x, \text{м/с}^2$	$a_y, \text{м/с}^2$	$a, \text{м/с}^2$	$a_\tau, \text{м/с}^2$	$a_n, \text{м/с}^2$	$\rho, \text{м}$
$\frac{1}{6}$	2	1,5	10,9	-16,3	19,6	-19,7	-59,2	62,3	38,3	49,1	7,8

При вычислении нормального ускорения и радиуса кривизны траектории были использованы следующие формулы: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ и $\rho = \frac{v^2}{a_n}$.

Используя данные табл. 7.3, на рис. 7.18 можно показать положение точки M на траектории в рассматриваемый момент времени, по проекциям построить векторы скорости и ускорения, показать касательное и нормальное ускорения точки.

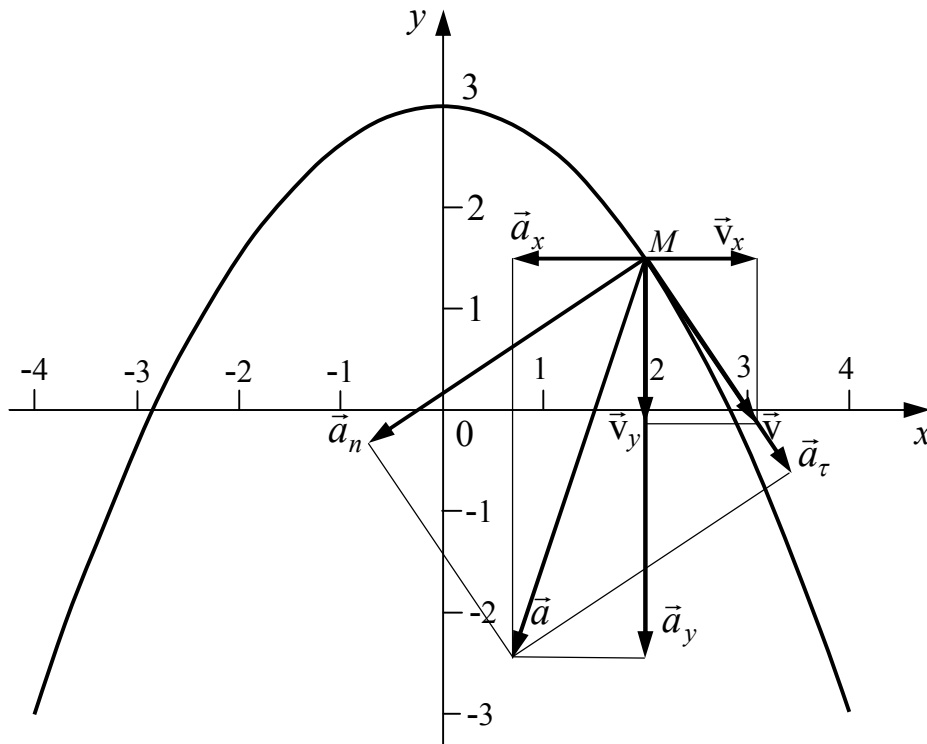


Рис. 7.18

7.7. Частные случаи движения точки

1. Прямолинейное движение точки. Поскольку кривизна прямой линии равна нулю, а радиус кривизны траектории ρ равен бесконечности, то нормальное ускорение $a_n = 0$ и, следовательно, ускорение точки равно касательному ускорению (рис. 7.19).

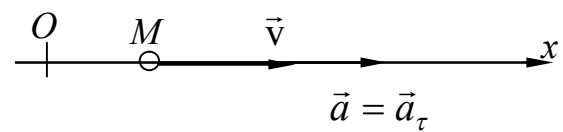


Рис. 7.19

2. Равномерное движение по криволинейной траектории. При равномерном движении $v_\tau = \text{const}$ и касательное ускорение $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0$. Ускорение точки равно нормальному ускорению (рис. 7.20).

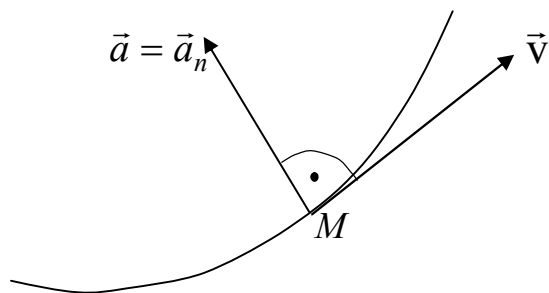


Рис. 7.20

Найдем уравнение равномерного движения точки, учитывая, что $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, откуда $ds = v_\tau dt$. Интегрируя для t в пределах от 0 до t , для s от s_0 до s , получаем уравнение равномерного движения

$$s = s_0 + v_\tau t. \quad (7.43)$$

Сопоставляя оба случая, видим, что касательное ускорение возникает, когда изменяется модуль скорости (при неравномерном движении точки); нормальное ускорение возникает, когда изменяется направление скорости, т.е. при криволинейном движении. Следовательно, касательное ускорение точки характеризует изменение модуля скорости, а нормальное ускорение – изменение направления вектора скорости.

3. Равнопеременное движение точки. Равнопеременным называют такое движение, при котором касательное ускорение постоянно – $a_\tau = \text{const}$.

Найдем закон изменения скорости, считая, что направление движения совпадает с направлением отсчета дуговой координаты.

Касательное ускорение $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const}$, откуда $dv = a_\tau dt$. Интегрируя для t в пределах от 0 до t , для v в пределах от v_0 до v , получаем зависимость скорости от времени:

$$v = v_0 + a_\tau t. \quad (7.44)$$

Для определения закона равнопеременного движения учтем, что $v = \frac{ds}{dt}$ (при сделанном при определении скорости замечании). Разделяя переменные и интегрируя, получаем уравнение равнопеременного движения:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (7.45)$$

В случае равнопеременного прямолинейного движения a_τ – полное ускорение точки, а в случае криволинейного – касательное ускорение.

4. Гармонические колебания. Рассмотрим прямолинейное движение точки, заданное уравнением

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (7.46)$$

где a , k , α – постоянные величины.

Это движение называют гармоническим колебанием.

Наибольшее отклонение точки от начала отсчета (среднего положения) называют амплитудой колебаний $x_{\max} = a$ (рис. 7.21). Поскольку синус – периодическая функция, то, следовательно, координата x будет периодической функцией времени, изменяющейся в интервале $-a \leq x \leq a$.

Периодом колебаний T называют промежуток времени между двумя последовательными прохождением точки через одно и то же положение, в одном и том же направлении. Расстояние между крайними положениями точки (равно отрезку $2a$) называется размахом колебания.

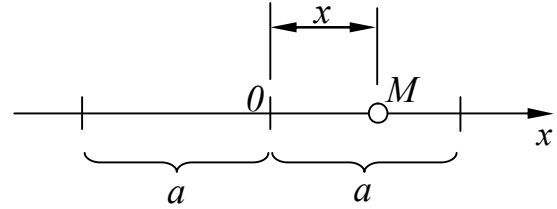


Рис. 7.21

Аргумент синуса $(kt + \alpha)$ называется фазой колебания, α – начальной фазой колебаний.

Постоянная k называется угловой частотой (ее называют также циклической или круговой частотой). Получим формулу периода колебаний. Через период координата точки принимает прежнее значение:

$$x = a \sin(kt + \alpha) = a \sin[k(t + T) + \alpha].$$

Это равенство возможно, если аргументы синусов отличаются на 2π , т.е. $kT = 2\pi$, откуда $T = \frac{2\pi}{k}$.

Величина, обратная периоду колебаний, представляет число колебаний в единицу времени – частоту колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi},$$

откуда $k = 2\pi\nu$ и угловая частота колебаний k равна числу колебаний за 2π секунд.

При гармоническом колебании скорость и ускорение точки также изменяются по гармоническому закону. С учетом (7.46) имеем

$$v_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha), \quad v_{\max} = ak; \quad (7.47)$$

$$a_x = \ddot{x} = -ak^2 \sin(kt + \alpha), \quad a_{\max} = ak^2. \quad (7.48)$$

Следует отметить, что точка может совершать гармонические колебания, двигаясь вдоль кривой. Например, математический маятник совершает гармонические колебания.

Пример 7.7. При небольших углах отклонения маятника груз движется по окружности радиуса l по закону $s = a \sin kt$ (a, k – постоянные) (рис. 7.22). Найти скорость, касательное и нормальное ускорение груза и положения, в котором эти величины равны нулю.

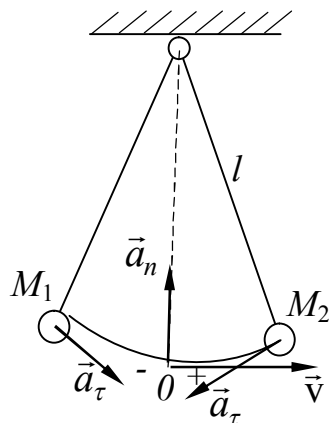


Рис. 7.22

Решение. Скорость груза при естественном способе задания движения

$$v_\tau = \dot{s} = ak \cos kt.$$

Касательное и нормальное ускорения:

$$a_\tau = -ak^2 \sin kt;$$

$$a_n = \frac{a^2}{l} k^2 \cos^2 kt.$$

В крайних положениях груза M_1 и M_2 , когда $\sin kt = \pm 1$ и $s = \pm a$, $\cos kt = 0$, $v = 0$,

$$a_n = 0, \quad a_\tau = \pm ak^2.$$

В среднем положении $s = 0$, $\sin kt = 0$, $\cos kt = 1$, $v_\tau = \pm ak$, $a_\tau = 0$,

$$a_n = \frac{a^2}{l} k^2.$$

На рис. 7.22 показаны скорость и ускорение в крайних и среднем положениях.

Вопросы для самопроверки

1. Какие существуют способы задания движения точки и в чем заключается каждый из них?
2. Точка движется по окружности радиуса R равномерно со скоростью v_0 по часовой стрелке. В начальный момент времени она находилась в верхней точке вертикального диаметра: а) задать движение точки координатным способом, взяв начало координат в центре окружности; б) задать движение естественным способом, взяв начало отсчета дуговой координаты в начальном положении точки.
3. Точка движется прямолинейно с переменной скоростью. В какие моменты времени ее ускорение может быть равно нулю?

4. Точка движется прямолинейно и в некоторые моменты времени ее скорость обращается в нуль. Будет ли равно нулю ускорение в эти моменты?
5. Каким будет характер движения точки в момент $t_1 = \frac{1}{4}$ с и $t_2 = \frac{1}{3}$ с, если ее движение проходит по закону $s = 4\cos^2\pi t$ м?
6. По какой траектории движется точка, если касательное ускорение все время равно нулю, а нормальное ускорение постоянно и не равно нулю?

Глава 8. Простейшие движения твердого тела

8.1. Введение в кинематику твердого тела

Перейдем к изучению движения твердого тела. Если движение тела ничем не ограничено, т.е. тело может двигаться произвольным образом в пространстве, то это тело называют свободным. Тело будет несвободным, если на движение его наложены ограничения. Эти ограничения называют *связями* и осуществляются они с помощью других тел – шарниров, опорных поверхностей, нитей и т.д. Как уже говорилось ранее, начинать изучение движения нужно с установления способа задания движения. Задать движение тела – значит задать условия, позволяющие найти положение каждой точки тела в любой момент времени.

Независимые параметры, определяющие положение тела в заданной системе отсчета, называют обобщенными координатами, а их число – числом степеней свободы. Для свободной точки в пространстве число степеней свободы было равным трем, для точки, движущейся в плоскости, – двум.

Положение свободного тела определяется координатами трех его точек, не лежащих на одной прямой. Девять координат этих точек не являются независимыми, между ними есть три уравнения связи, выражающие неизменность расстояний между этими точками. Следовательно, независимых величин будет шесть и степеней свободы у свободного тела будет шесть. У несвободного тела число степеней свободы меньше шести.

Классификация движений твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

- 1) поступательное движение;
- 2) вращение вокруг неподвижной оси;
- 3) плоскопараллельное или плоское движение;
- 4) вращение вокруг неподвижной точки (сферическое движение);
- 5) движение свободного тела, сводимое к винтовому.

Простейшими являются первые два вида: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Остальные три вида будут сложными, составленными в каждый момент времени из простейших.

Прежде чем переходить к изучению конкретных видов движения тела, рассмотрим теорему, связывающую скорости точек твердого тела и справедливую для любых движений его.

Теорема о связи скоростей двух любых точек тела: *Проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны при любом движении тела.*

Доказательство. Возьмем две произвольные точки тела, радиус-векторы которых $\vec{r}_A(t)$ и $\vec{r}_B(t)$ (рис. 8.1). Из рисунка видно, что для любого момента времени

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (8.1)$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{AB}}, \text{ или } \vec{v}_B = \vec{v}_A + \dot{\vec{AB}}. \quad (8.2)$$

Производная по времени $\dot{\vec{AB}}$ как производная от вектора постоянного модуля и переменного по направлению будет перпендикулярна вектору \vec{AB} , так как производная направлена по касательной к годографу векторной функции. Годографом векторной функции \vec{AB} будет дуга окружности или линия на сфере радиуса AB . Итак, имеем

$$\dot{\vec{AB}} \perp \vec{AB}. \quad (8.3)$$

Проецируя равенство (8.2) на ось, проходящую через точки A и B , учитывая (8.3), получим (рис.8.2)

$$np_{AB} \vec{v}_B = np_{AB} \vec{v}_A, \text{ или}$$

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta \quad (8.4)$$

Равенство (8.4) отражает тот факт, что расстояние между точками A и B в процессе движения тела не меняется (абсолютно твердое тело).

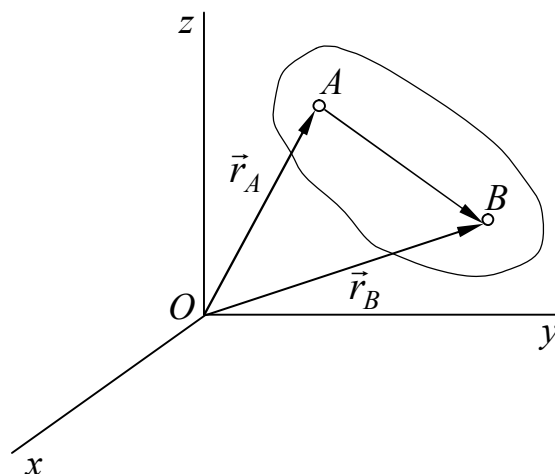


Рис. 8.1

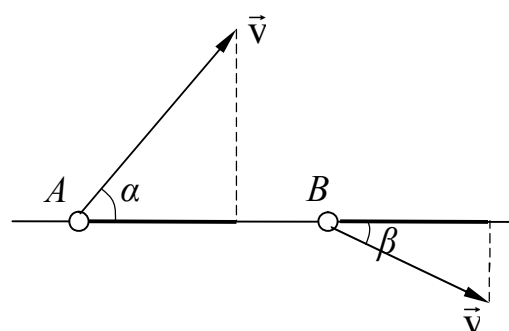


Рис. 8.2

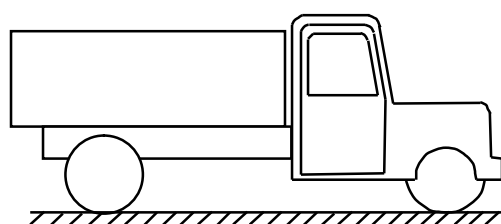
Переходим теперь к рассмотрению простейших движений тела.

8.2. Поступательное движение твердого тела

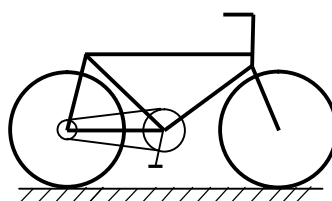
Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, взятая в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению.

Если две непараллельные прямые в теле при его движении остаются параллельными своим первоначальным направлениям, то и любая прямая в теле остается параллельной первоначальному направлению. Таким образом, критерием для поступательного движения является наличие двух непараллельных прямых в теле, которые перемещаются параллельно себе.

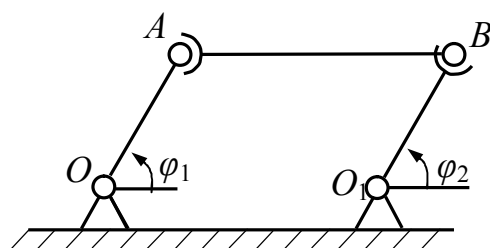
При поступательном движении тела точки его могут двигаться по любым траекториям. Примеры поступательных движений тела: движение кузова автомобиля на прямолинейном участке пути, педалей велосипеда при прямолинейном движении, спарника AB четырехзвенного механизма, кабинок с людьми колеса обозрения в парке культуры и отдыха (рис. 8.3).



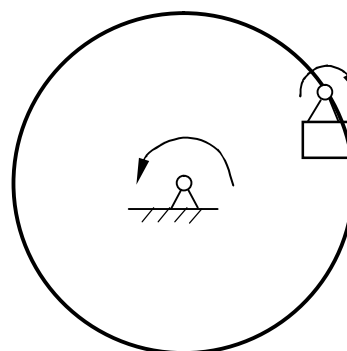
a – кузов автомобиля



b – педаль велосипеда



$в$ – спарник (AB) четырехзвенного механизма, $OA = OB$; $\varphi_1 = \varphi_2$



$г$ – кабина колеса обозрения

Рис. 8.3

При поступательном движении твердого тела имеет место следующая **теорема**: *При поступательном движении тела все точки его описывают одинаковые, параллельно расположенные траектории и имеют в каждый момент времени геометрически равные скорости и ускорения.*

Доказательство. Возьмем две произвольные точки A и B поступательно движущегося тела (рис. 8.4). Из рисунка видно, что

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (8.5)$$

При этом длина AB постоянна, так как тело абсолютно твердое, а направление неизменно из-за поступательного движения. Следовательно, вектор \vec{AB} при движении постоянен, и поэтому траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением на вектор \vec{AB} – первая часть теоремы доказана.

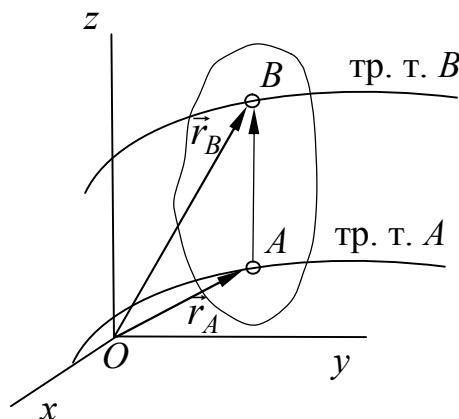


Рис. 8.4

Дифференцируя (8.5) по времени, получим

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad \text{т.к. } \dot{\vec{AB}} = 0. \quad (8.6)$$

При повторном дифференцировании получаем

$$\ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{r}}_A, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (8.7)$$

Равенство скоростей и ускорений точек при поступательном движении тела показано на рис. 8.5.

Из теоремы следует, что поступательное движение тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Поэтому изучение поступательного движения сводится к кинематике точки, рассмотренной ранее. Отметим также, что только при поступательном движении справедливы термины *скорость тела*, *ускорение тела*.

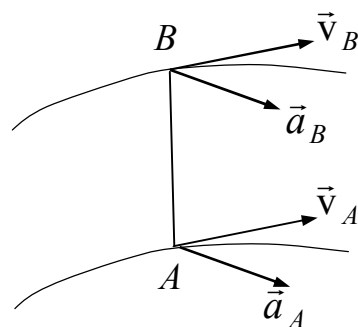


Рис. 8.5

8.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение тела, имеющего две неподвижные точки. Прямая, проходящая через эти две точки, называется осью вращения. Заметим, что две неподвижные точки, а следовательно, и ось вращения могут быть расположены вне тела (в этом случае они принадлежат пространству, жестко связанно-

му с телом). При вращении все точки его описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных оси, с центрами на этой оси.

Уравнение движения. Положение тела в пространстве вполне определяется двугранным углом φ между двумя полуплоскостями – неподвижной Π_0 и жестко связанной с телом Π (рис. 8.6). На оси вращения установим положительное направление и угол будем считать положительным, когда он отсчитывается против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси. Угол φ называется углом поворота тела, и уравнением движения будет зависимость этого угла от времени

$$\varphi = \varphi(t). \quad (8.8)$$

Угол обычно измеряется в радианах, иногда – в оборотах. Формула перехода от оборотов к радианам дается выражением

$$\varphi = 2\pi N, \quad (8.9)$$

где N – угол, выраженный числом оборотов.

Основными кинематическими характеристиками движения тела являются угловая скорость и угловое ускорение, к определению которых и перейдем.

Угловая скорость. Пусть в момент времени t угол имеет значение φ , при $t_1 = t + \Delta t$ значение $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$.

Средней угловой скоростью тела называют отношение $\Delta\varphi$ к Δt :

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Эта величина, очевидно, зависит от выбора промежутка времени. Угловой скоростью в данный момент времени называют предельное значение, к которому стремится $\omega_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Итак,
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ или } \omega = \dot{\varphi}. \quad (8.10)$$

Угловая скорость тела равна первой производной от угла поворота тела по времени.

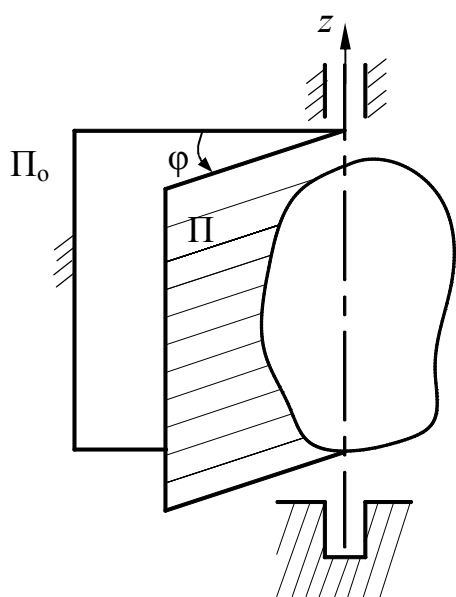


Рис. 8.6

Вычисленное по этой формуле значение ω может быть положительным или отрицательным. Положительному значению соответствует вращение против хода часовой стрелки, отрицательному – по ходу часовой стрелки.

Размерность угловой скорости $[\omega] = T^{-1}$. Единицей измерения будет $1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ (радиан в секунду).

Очень часто угловая скорость (частота вращения) измеряется числом оборотов в минуту и обозначается $n \frac{\text{об}}{\text{мин}}$. Зависимость между значением ω в $[\text{рад/с}]$ и $[\text{об/мин}]$ определяется формулой перехода:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1n.$$

Угловую скорость можно изобразить вектором, который будет характеризовать положение оси вращения, направление вращения и абсолютное значение (модуль) угловой скорости. Назовем вектором угловой скорости тела вектор, равный по мо-

дулю $|\vec{\omega}|$ и направленный по оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно происходящим против движения часовой стрелки (рис. 8.7).

Вектор $\vec{\omega}$ является скользящим вектором, его можно прикладывать в любой точке оси вращения. Если обозначить орт оси вращения через \vec{k} , то вектор угловой скорости записывается в виде

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}. \quad (8.11)$$

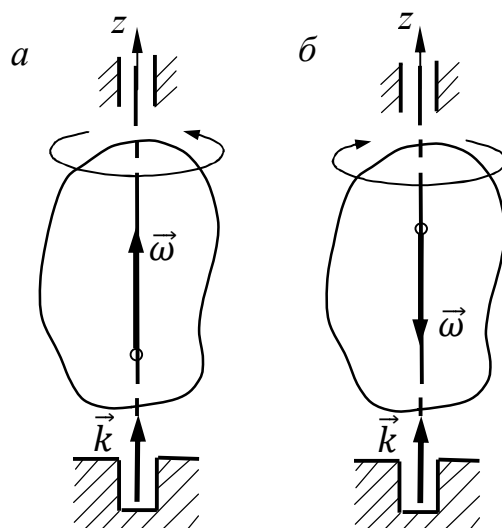


Рис. 8.7

Угловое ускорение тела. Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости и вводится аналогично понятию угловой скорости тела.

Среднее угловое ускорение за промежуток Δt

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Если учесть, что $\omega = \dot{\varphi}$, получаем

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (8.12)$$

Угловое ускорение тела численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени.

Размерность углового ускорения $[\varepsilon] = T^{-2}$, единица измерения – 1 рад/с² (радиан на секунду в квадрате).

Вычисленное по формуле $\varepsilon = \dot{\omega}$ значение углового ускорения может быть положительным или отрицательным.

Вращение тела будет ускоренным, если ω и ε имеют одинаковые знаки, так как в этом случае модуль угловой скорости возрастает. При различных знаках вращение тела будет замедленным. Угловое ускорение

можно изобразить вектором $\vec{\varepsilon}$ (рис. 8.8). Этот вектор, очевидно, будет направлен также по оси вращения и определяется выражением

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi} \vec{k}. \quad (8.13)$$

При ускоренном вращении (рис. 8.8,а), векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены в одну сторону, при замедленном (рис. 8.8,б) – в противоположные.

В заключение полезно отметить, что знак угловой скорости ω определяет направление вращения, а знак углового ускорения ε вместе со знаком угловой скорости – характер вращения (ускоренное, замедленное).

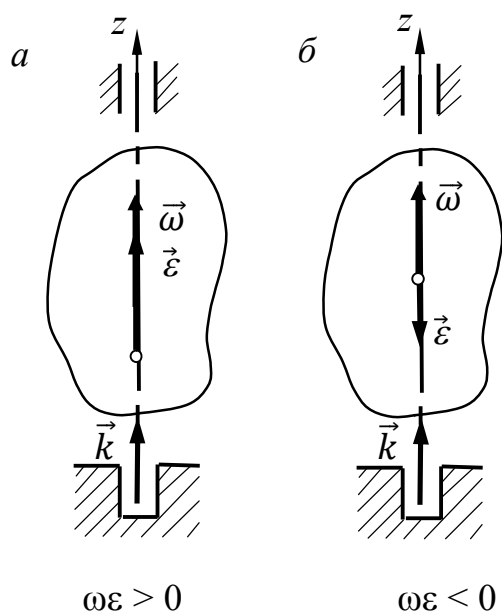


Рис. 8.8

Частные случаи вращательного движения тела

1. Равномерное вращение

Вращение тела называется равномерным, если угловая скорость тела постоянна, т.е. $\omega = \text{const}$.

В этом случае легко получить уравнение вращения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad d\varphi = \omega dt, \quad \varphi = \omega t + C_1.$$

Если при $t = 0$ угол φ был равен φ_0 , то $\varphi_0 = C_1$ и $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Угол поворота является линейной функцией времени. Угловое ускорение ε в этом движении равно нулю ($\varepsilon = 0$).

2. Равнопеременное вращение

Равнопеременным называется вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, т.е. $\varepsilon = \text{const} (\neq 0)$.

Определим угловую скорость тела, считая, что при $t = 0$ $\omega = \omega_0$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad d\omega = \varepsilon dt, \quad \omega = \varepsilon t + C_1.$$

Подставляя начальные условия, находим $\omega_0 = C_1$. Тогда $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.
Найдем уравнение вращения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t, \quad d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2.$$

Если при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, то $\varphi_0 = C_2$ и уравнение движения получает вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При равнопеременном вращении угловая скорость является линейной функцией времени, а угол поворота – квадратичной функцией времени.

Перейдем к определению скоростей и ускорений различных точек тела.

8.4. Скорости и ускорения точек вращающегося тела (поля скоростей и ускорений)

Пусть вращение тела задано уравнением $\varphi = \varphi(t)$. Возьмем некоторую произвольную точку тела M . Радиус окружности, которую она описывает, обозначим R (рис. 8.9).

Для определения скорости и ускорения точки M зададим ее движение естественным способом, т.к. траектория точки известна. За начало отсчета дуговой координаты s примем точку O_1 , лежащую в неподвижной полуплоскости Π_{O_1} , положительное направление отсчета возьмем совпадающим с направлением отсчета угла φ (рис. 8.10). Уравнение движения точки M по траектории имеет вид

$$s = {}^{O_1}O_1M = R\varphi(t). \quad (8.14)$$

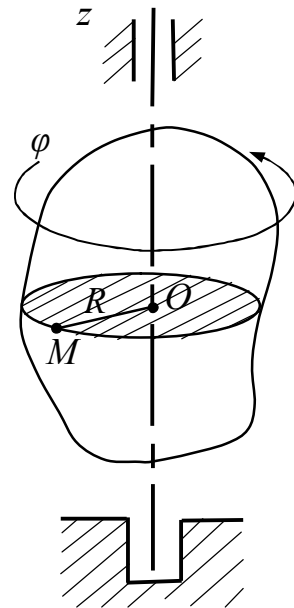


Рис. 8.9

Для проекции скорости точки на касательную (или алгебраического значения скорости) получаем

$$v_\tau = \dot{s} = R \dot{\varphi}, \text{ или } v_\tau = R \tilde{\omega}, \quad (8.15)$$

где $\tilde{\omega}$ – алгебраическое значение угловой скорости.

Модуль скорости

$$v = R\omega. \quad (8.16)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории-окружности в сторону вращения и будет перпендикулярен радиусу.

Из формулы видно, что скорости разных точек тела будут различны, они пропорциональны расстояниям этих точек до оси вращения. Поле скоростей точек вращающегося тела показано на рис. 8.11.

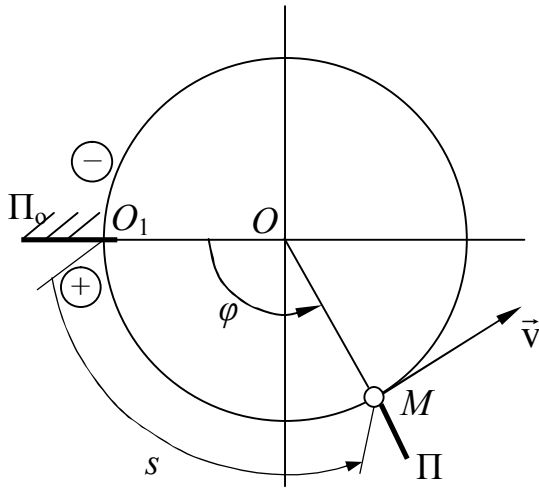


Рис. 8.10

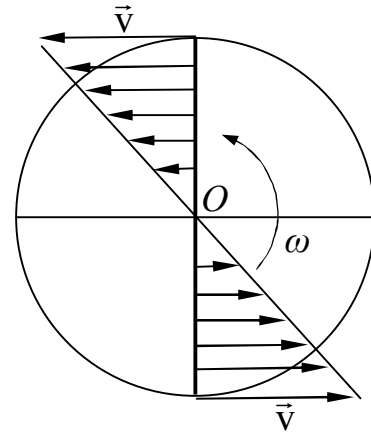


Рис. 8.11

Ускорение точки M равно сумме касательного и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (8.17)$$

которые в этом случае также называются вращательным и центростремительным ускорениями. Касательное ускорение $a_\tau = \dot{v}_\tau = R \ddot{\varphi}$, нормальное

ускорение $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2$. На рис. 8.12 показаны касательное и нормальное ускорения точки M при ускоренном (а) и замедленном (б) вращении тела.

Модуль касательного ускорения точки равен произведению радиуса на модуль углового ускорения:

$$|a_\tau| = R|\varepsilon|. \quad (8.18)$$

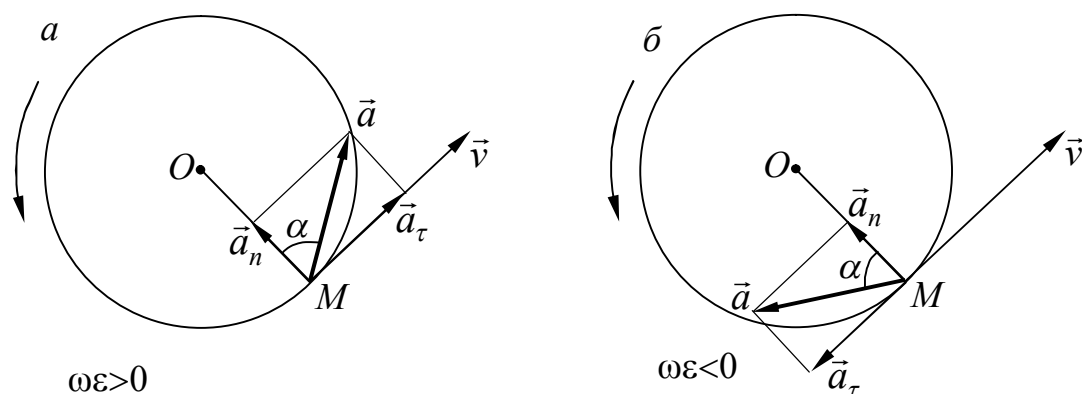


Рис. 8.12

Модуль нормального ускорения равен произведению радиуса на квадрат угловой скорости:

$$a_n = R\omega^2. \quad (8.19)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \text{ или } a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.20)$$

Обозначим α – угол, образованный ускорением \vec{a} с радиусом окружности. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (8.21)$$

Из этой формулы следует, что угол α для всех точек тела в рассматриваемый момент времени одинаков. Ускорения точек также пропорциональны радиусам. Поле ускорений показано на рис. 8.13.

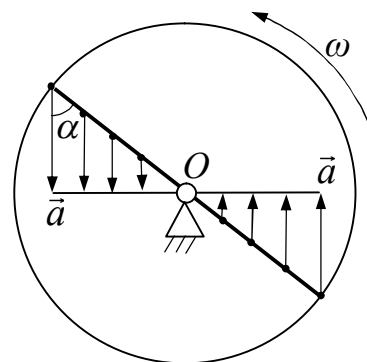


Рис. 8.13

Векторное выражение скоростей и ускорений точек вращающегося тела

Пользуясь векторными понятиями угловой скорости и углового ускорения тела, можно выразить скорость и ускорение любой точки вращающегося тела в виде векторных произведений.

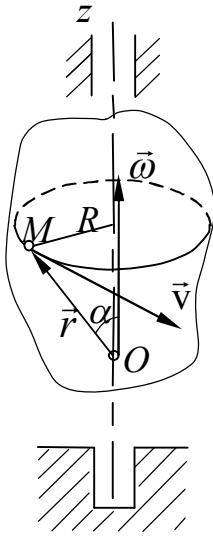


Рис. 8.14

Возьмем точку M тела, определим ее положение радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из произвольной точки оси вращения (рис. 8.14). Модуль скорости определяется формулой

$$v = R |\vec{\omega}| = |\vec{r}| |\vec{\omega}| \sin \alpha = |\vec{\omega} \times \vec{r}|. \quad (8.22)$$

Векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{r}$ есть вектор, перпендикулярный к плоскости, где расположены векторы $\vec{\omega}$ и \vec{r} . Направлен он в сторону, откуда поворот от $\vec{\omega}$ к \vec{r} на наименьший угол кажется происходящим против часовой стрелки. Это направление совпадает с направлением движения точки.

Итак, скорость точки

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (8.23)$$

Вектор скорости точки вращающегося тела равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор точки, проведенный из любой точки оси вращения. Эта формула называется векторной формулой Эйлера.

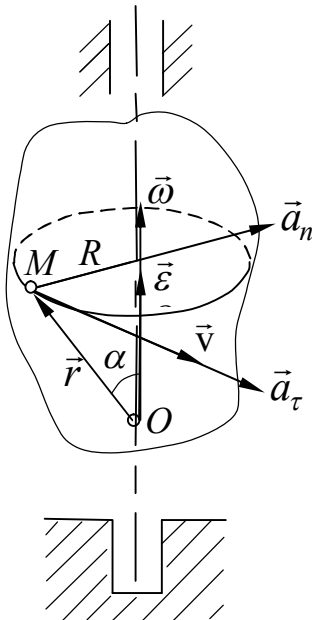


Рис. 8.15

Если векторное произведение записать определителем третьего порядка (см. гл. 12), то можно получить проекции вектора скорости v_x , v_y , v_z на оси координат.

Вектор ускорения точки получим дифференцированием вектора скорости по времени (рис. 8.15). Ускорение точки M $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$, но $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ – угловое ускорение тела; $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ – скорость точки M . Следовательно, получаем

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (8.24)$$

Легко проверить, используя правило векторного произведения, что

$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau$ – касательное ускорение точки,

$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$ – нормальное ускорение точки.

Ускорение точки равно сумме касательного и нормального ускорений.

Итак, получены векторные выражения скорости, касательного, нормального и полного ускорения точки вращающегося тела.

Примеры решения задач

Пример 8.1

Груз 1 движется вдоль наклонной плоскости по закону $x = 2t^2$ м (рис. 8.16), и передает движение с помощью нити шкиву 2, радиусы которого $r = 0,2$ м, $R = 0,6$ м. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε шкива, а также скорость и ускорение точки A в момент времени $t_1 = 2$ с.

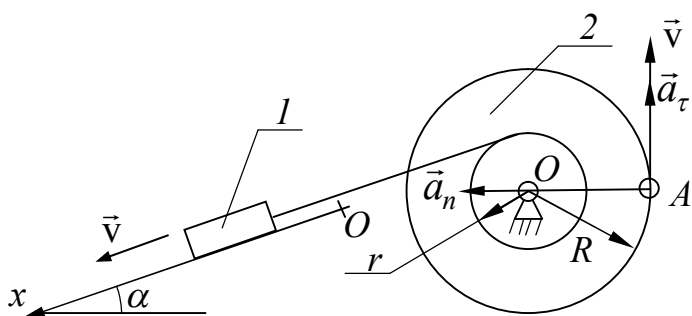


Рис. 8.16

Решение

Груз 1, который можно считать материальной точкой, движется прямолинейно, движение задано координатным способом. Скорость и ускорение груза при прямолинейном движении

$$v = \dot{x} = 4t \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad a = \ddot{x} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Скорости точек, принадлежащих шкиву 2 на расстоянии $r = 0,2$ м, равны скорости груза. Тогда угловая скорость шкива $\omega = \frac{v}{r} = \frac{4t}{0,2} = 20t \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Соответственно угловое ускорение шкива $\varepsilon = \dot{\omega} = 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Скорость и ускорение точки A определяются с помощью формул (8.16), (8.18) – (8.20) и показаны на рисунке:

$$v = R\omega = 0,6 \cdot 20t = 12t \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$a_\tau = R\varepsilon = 0,6 \cdot 20 = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_n = R\omega^2 = 0,6(20t)^2 = 240t^2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 12\sqrt{1 + 400t^4} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Значения величин в момент времени $t = 2$ с приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

$t, \text{с}$	$v, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$a_\tau, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$a_n, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
2	24	12	960	960,1

Пример 8.2. Стрелка вольтметра совершает простые гармонические колебания по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T}t$ рад, $\varphi_0 = \frac{\pi}{12}$ рад, $T = 2$ с (рис. 8.17). Определить скорость и ускорение точки M при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_{\max}$, если $OM = R = 9$ см.

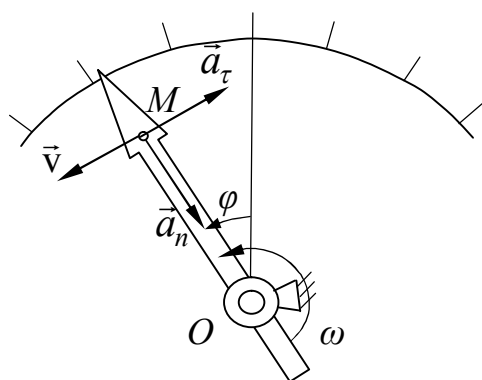


Рис. 8.17

Решение

Угловая скорость стрелки

$$\omega = \dot{\varphi} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi^2}{12} \cos \pi t \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Угловое ускорение стрелки

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -\frac{\pi^3}{12} \sin \pi t \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Скорость точки M

$$v = R\omega = \frac{3}{4} \pi^2 \cos \pi t \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Касательное ускорение точки $a_\tau = R\varepsilon = -\frac{3}{4} \pi^3 \sin \pi t \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$

Нормальное ускорение точки $a_n = R\omega^2 = \frac{1}{16} \pi^4 \cos^2 \pi t \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$

Значения величин приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

$\varphi, \text{рад}$	$v, \frac{\text{см}}{\text{с}}$	$a_\tau, \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$	$a_n, \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$	\vec{v}, \vec{a}
0	$\frac{3}{4} \pi^2$	0	$\frac{1}{16} \pi^4$	
$\frac{\pi}{12}$	0	$-\frac{3}{4} \pi^3$	0	

Пример 8.3

В технике достаточно широкое распространение получили передающие механизмы, предназначенные для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым.

Если оси валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать с помощью фрикционных или зубчатых передач. Во фрикционных передачах вращение передается за счет сил сцепления, в зубчатых – за счет зацепления зубьев.

Передачи могут быть с внешним (рис. 8.18,а) или внутренним (рис. 8.18,б) зацеплением.

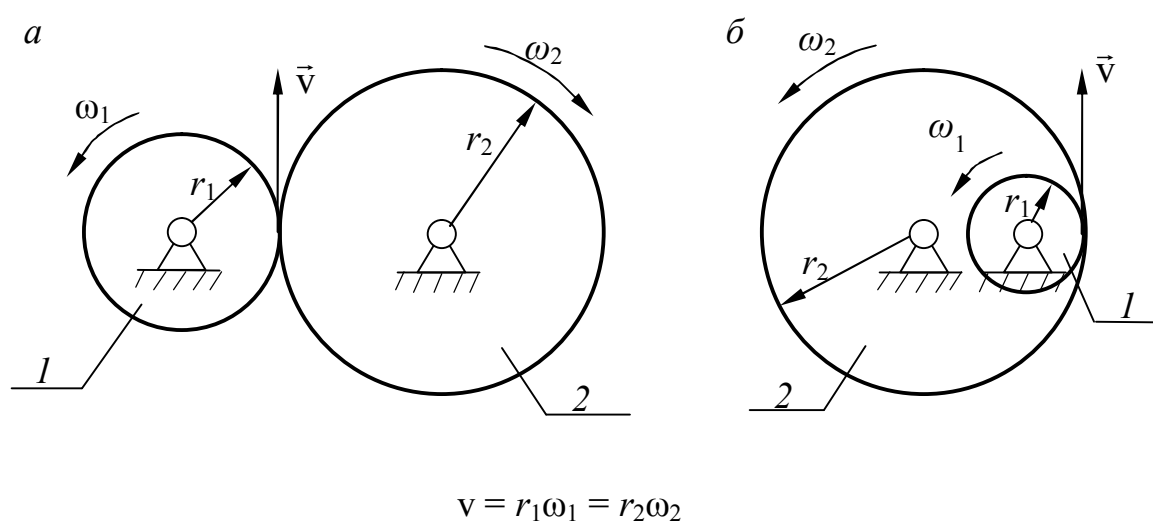


Рис. 8.18

При этом колесо меньшего радиуса (1) называется шестерней, колесо большего радиуса (2) – колесом. Передаточным числом называется отношение угловой скорости ведущего колеса (в данном случае – шестерни)

к угловой скорости ведомого колеса, т.е. $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$.

Для зубчатых колес это отношение можно выразить через число зубьев колес: $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$.

Отметим: если ведущее колесо вращается равномерно, то ведомое колесо тоже будет вращаться равномерно.

Рядовые соединения могут быть реализованы в виде последовательного ряда:

- а) с паразитными колесами;
- б) с кратным зацеплением.

Для передачи с паразитными колесами (рис. 8.19), устанавливая связь между скоростями $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$, $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2}$, получаем передаточное число рядового соединения $i = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}$.

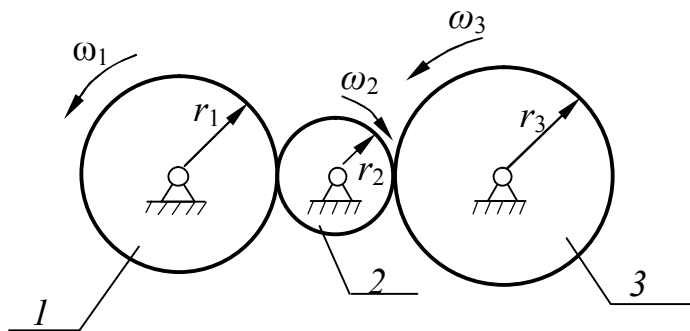


Рис. 8.19

Передаточное число не зависит от радиуса (числа зубьев) колеса 2, называемого паразитным.

Передача с кратным зацеплением может быть реализована в виде двухступенчатого редуктора (рис. 8.20), служащего для передачи вращения от двигателя к исполнительному органу – машине. В данном случае передаточное число i определяется как отношение угловой скорости ведущего вала I к угловой скорости ведомого вала II – $i = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}$.

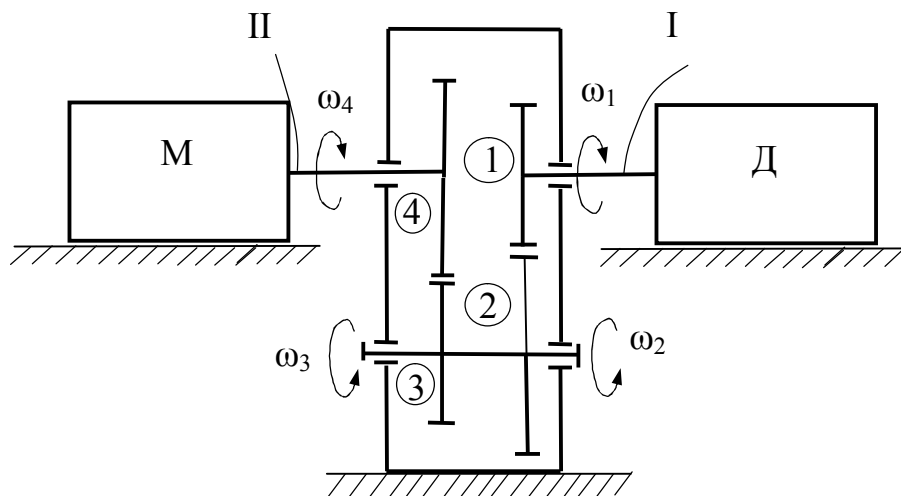


Рис. 8.20

Полезно установить следующую связь между угловыми скоростями:

$\omega_1 = \omega_1$ – угловая скорость первой шестерни равна угловой скорости ведущего вала;

$$\text{передаточное число первой ступени } i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1};$$

угловая скорость шестерни 3 равна угловой скорости колеса 2 – $\omega_3 = \omega_2$;

передаточное число второй ступени

$$i_{3-4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{z_4}{z_3};$$

$\omega_{II} = \omega_4$ – угловая скорость ведомого вала равна угловой скорости четвертого колеса.

Общее передаточное число

$$i = i_{1-2} \cdot i_{3-4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

При значениях $z_1 = 10$; $z_2 = 60$; $z_3 = 12$; $z_4 = 70$ ведомый вал будет вращаться медленнее ведущего (понижающий редуктор) в ту же сторону, что и ведущий вал.

Вопросы для самопроверки

1. Можно ли говорить о поступательном движении точки или о вращательном движении ее?
2. Все точки тела в некоторый момент времени имеют равные по модулю и одинаковые по направлению скорости. Можно ли утверждать, что тело движется поступательно?
3. Тело вращается вокруг неподвижной оси:
 - а) где расположены точки, у которых модули скорости равны?
 - б) где расположены точки, у которых векторы скорости одинаково направлены?
4. Каким будет уравнение движения тела, если полные ускорения всех точек направлены к оси вращения?
5. Какой угол образует полное ускорение точки с радиусом окружности, если $a_\tau = 3 \text{ м/с}^2$, $a_n = 4 \text{ м/с}^2$? Есть ли еще точки тела, имеющие такие же ускорения?
6. Каким будет характер вращательного движения тела в моменты времени $t_1 = 1 \text{ с}$, $t_2 = 2 \text{ с}$, $t_3 = 3 \text{ с}$, $t_4 = 4 \text{ с}$, $t_5 = 5 \text{ с}$, $t_6 = 6 \text{ с}$, если закон движения задан $\varphi = \sin \frac{\pi}{3} t$?

Глава 9. Сложное движение точки

Во многих задачах механики движение точки или тела является сложным, составленным из нескольких одновременно происходящих движений. Для изучения таких движений вводят две или более системы отсчета; одна из них считается основной, остальные движутся относительно основной системы.

Например, движение колеса автомобиля можно рассматривать относительно земли (основная система отсчета) и относительно кузова (движущаяся система). Движение человека по движущемуся эскалатору в метро состоит из движения относительно эскалатора и движения вместе с ним. С помощью введения подвижной системы отсчета сложное движение удастся разложить на простые движения.

9.1. Основные понятия и определения

Для изучения сложного движения объекта A (точки или тела) возьмем две системы отсчета (рис. 9.1): $O_1x_1y_1z_1$ – основную систему, которую будем считать условно неподвижной, $Oxyz$ – подвижную, связанную с некоторым телом, перемещающимся в основной системе отсчета.

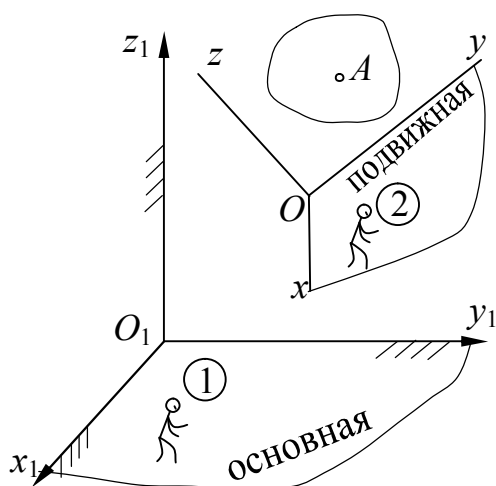


Рис. 9.1

Введем определения.

Абсолютным движением объекта (точки или тела) называют движение его относительно основной системы. Его видит неподвижный наблюдатель 1.

Относительным движением объекта называют движение его относительно подвижной системы. Его видит наблюдатель 2, находящийся в подвижной системе.

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета относительно основной.

Если изучаемым объектом является *точка*, то траекторию, скорость и ускорение ее в абсолютном движении называют соответственно абсолютной траекторией, абсолютной скоростью и абсолютным ускорением. Обозначается абсолютная скорость точки – $\vec{V}_{абс}$ или \vec{V}_a , абсолютное ускорение – $\vec{a}_{абс}$ или \vec{a}_a .

Траектория, скорость и ускорение точки в относительном движении называются относительной траекторией, относительной скоростью и от-

носительным ускорением точки. Обозначают относительную скорость точки $\vec{V}_{\text{отн}}$ или \vec{V}_r , относительное ускорение – $\vec{a}_{\text{отн}}$ или \vec{a}_r .

Несколько сложнее представить элементы переносного движения точки, так как переносное движение совершает подвижная система отсчета, а различные точки ее имеют в общем случае различные траектории, скорости и ускорения. Если мысленно остановить изучаемую точку в ее относительном движении и наблюдать из основной системы за движением той точки подвижной системы, где находилась изучаемая точка в рассматриваемый момент времени, то скорость и ускорение этой точки и будут переносной скоростью и ускорением точки. *Следовательно, переносной скоростью и переносным ускорением точки называют скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся (изучаемая) точка.* Обозначают переносную скорость точки $\vec{V}_{\text{пер}}$ или \vec{V}_e , переносное ускорение – $\vec{a}_{\text{пер}}$ или \vec{a}_e . Понятия переносной траектории точки не существует, но при решении задач полезно пользоваться траекторией точки подвижной среды, в которой находится изучаемая точка. Условно эту траекторию называют *переносной траекторией точки*. Точка, совершая в подвижной системе относительное движение, переходит с одной *переносной траектории* на другую.

Так, например, точка, двигаясь по вращающемуся стержню, все время переходит с одной окружности на другую (рис. 9.2).

Если подвижную систему координат связать со стержнем OA , то переносное движение будет вращательным, а относительное движение точки (по отношению к стержню) будет прямолинейным. Относительной траекторией точки M будет прямая OA (ось Ox), а *переносными траекториями* будут окружности (в момент времени t – окружность радиуса OM , в момент времени t' – окружность радиуса OM').

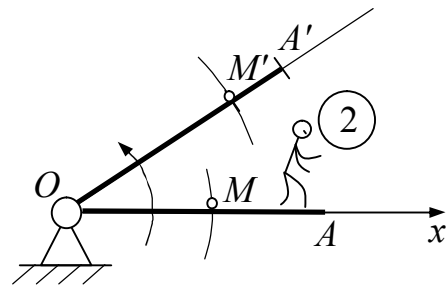


Рис. 9.2

При изучении сложного движения точки или тела возникают задачи: по заданным кинематическим характеристикам двух движений найти кинематические характеристики третьего движения. Если по характеристикам относительного и переносного движения находят характеристики абсолютного движения, то это задача сложения движений. Если по характеристикам абсолютного и переносного (или относительного) движений определяют характеристики относи-

тельного (или переносного) движений, то это задача разложения движения. Эти задачи решаются с помощью теорем о сложении скоростей и ускорений. Перейдем к изучению этих теорем.

9.2. Теоремы о сложении скоростей и ускорений

А. Теорема о сложении скоростей точки

Теорема выражает связь между скоростями в относительном, переносном и абсолютном движениях и называется также теоремой параллелограмма скоростей точки.

Теорема. *При сложном движении точки абсолютная скорость равна сумме ее переносной и относительной скоростей.*

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Б. Теоремы о сложении ускорений

Теорема о сложении скоростей справедлива для любого переносного движения. Сложение ускорений зависит от характера переносного движения.

1. Поступательное переносное движение

Теорема. *При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно сумме ее переносного и относительного ускорений.*

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

2. Непоступательное переносное движение

Эта теорема впервые доказана французским ученым Г. Кориолисом¹ и часто называется теоремой Кориолиса.

Теорема. *При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно сумме трех ускорений: переносного, относительного и добавочного, поворотного ускорения. Это добавочное ускорение и называют ускорением Кориолиса (кориолисовым ускорением).*

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Доказательство

Точка M участвует в сложном движении: она движется относительно тела S , которое в свою очередь движется поступательно, или вращается (рис. 9.3) вокруг неподвижной оси, или совершает сложное движение, которое будет изучаться в следующих главах. Введем две системы отсчета: основная $O_1x_1y_1z_1$ является условно неподвижной, другая – подвижная

¹ Гюстав Кориолис (1792–1843) – французский ученый, известный своими трудами по теоретической и прикладной механике. Большую часть своей деятельности – профессор Политехнической школы Парижа.

система координат $Oxyz$, связанная с телом S . Движение точки изучается двумя наблюдателями: первый наблюдатель связан с основной системой отсчета, второй – с подвижной системой отсчета. Положение точки в основной системе определяется радиусом-вектором \vec{r} , в подвижной системе – радиусом-вектором $\vec{\rho}$, центры O и O_1 связаны радиусом-вектором \vec{r}_0 . Связь между векторами $\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{\rho}$ имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (9.1)$$

где x, y, z – координаты точки в подвижной системе координат;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты этой системы.

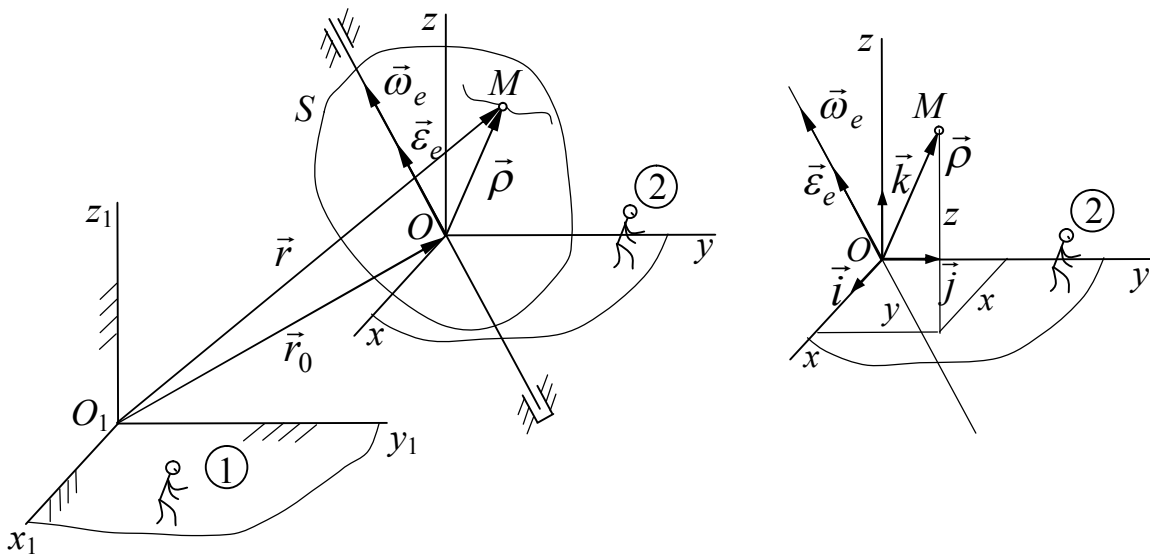


Рис. 9.3

При вращательном и сложном движении тела S орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ изменяют свое направление в основной системе отсчета.

Докажем теоремы в общем случае, а также для частных случаев, когда переносное движение является поступательным или вращательным вокруг неподвижной оси. Рассмотрим последовательно относительное, переносное и абсолютное движения.

Относительное движение. Оно изучается наблюдателем 2, для которого орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – постоянны по модулю и направлению. При изучении относительного движения мысленно отвлекаемся от переносного движения. Определим относительную скорость \vec{v}_r и относительное ускорение \vec{a}_r , считая, что относительное движение задано векторным способом:

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (9.2)$$

тогда относительная скорость

$$\vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\text{отн}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}, \quad (9.3)$$

соответственно относительное ускорение

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{отн}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}. \quad (9.4)$$

Переносное движение. При определении переносной скорости и переносного ускорения мысленно отвлекаемся от относительного движения. В этом случае наблюдатель 1 определяет скорость и ускорение той точки тела S , с которой в данный момент времени совпадает точка M .

Учтем, что при изучении переносного движения координаты x, y, z постоянны, т.е. $x, y, z = \text{const}$.

Переносная скорость

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{пер}} = \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} \right)_{\text{пер}} + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}} + z \dot{\vec{k}}. \quad (9.5)$$

Найдем производные от единичных векторов подвижных осей по времени. Орт \vec{i} можно рассматривать как радиус-вектор $\vec{r}_A = \vec{i}$ точки A , лежащей на оси Ox на расстоянии единицы длины от начала координат. Тогда

$$\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A - \quad (9.6)$$

линейная скорость точки A . Но при вращательном движении $\vec{v}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{r}_A$. Следовательно,

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_e \times \vec{r}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{i}. \quad (9.7)$$

Аналогичные формулы получаем для $\dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}$. Имеем

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}. \quad (9.8)$$

Эти равенства называются формулами Пуассона.

Окончательное выражение переносной скорости

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + x(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + y(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + z(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \\ &= \vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Если переносное движение поступательное, то $\vec{\omega}_e = 0$ и $\vec{v}_e = \vec{v}_0$, если же переносное движение вращательное вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O , то $\vec{v}_0 = 0$ и $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}$, что представляет скорость точки вращающегося тела, с которой совпадает в данный момент времени точка M .

Переносное ускорение

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\text{пер}} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\text{пер}} = \\ &= \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left(x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}} + z \dot{\vec{k}} \right).\end{aligned}\quad (9.10)$$

Отметим, что при переносном вращательном движении вокруг оси, проходящей через точку O ,

$$\vec{a}_0 = 0 \text{ и } \vec{a}_e = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_e, \quad (9.11)$$

что представляет ускорение точки вращающегося тела, с которой в данный момент времени совпадает точка M .

Абсолютное движение. Рассмотрим теперь сложное движение, когда одновременно происходят переносное и относительное движения, т.е. $x, y, z \neq \text{const}$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \neq \text{const}$ (изменяются по направлению).

Абсолютная скорость

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{абс}} + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\text{абс}} = \vec{v}_0 + \underbrace{x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}} + z \dot{\vec{k}}}_{\vec{v}_r} + x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}} + z \dot{\vec{k}}. \quad (9.12)$$

Принимая во внимание (9.3) и (9.5), видим, что абсолютная скорость точки

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (9.13)$$

Теорема о сложении скоростей доказана.

Абсолютное ускорение

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_{\text{абс}} = \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\text{абс}} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{абс}}. \quad (9.14)$$

Найдем каждое слагаемое в отдельности:

$$\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\text{абс}} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho})_{\text{абс}} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\text{абс}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left(\underbrace{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}_{\vec{v}_r} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right) = \\
 &= \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right).
 \end{aligned}$$

Учитывая (9.10), получаем для вычисляемой производной

$$\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\text{абс}} = \vec{a}_e + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (9.15)$$

Полезно отметить, что в (9.15) переносное ускорение \vec{a}_e характеризует изменение переносной скорости только в переносном движении, а второе слагаемое – изменение переносной скорости \vec{v}_e за счет относительно-го движения.

Вычислим второе слагаемое в формуле (9.14):

$$\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{абс}} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \right)_{\text{абс}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (9.16)$$

вычислена производная суммы и произведения.

Принимая во внимание, что первые три слагаемых представляют относительное ускорение (9.4) и учитывая формулы Пуассона (9.8), получаем

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{\text{абс}} &= \vec{a}_r + \dot{x}(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + \dot{z}(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \\
 &= \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.
 \end{aligned} \quad (9.17)$$

При получении (9.17) учтено выражение относительной скорости (9.3). В уравнении (9.17) величина \vec{a}_r характеризует изменение относительной скорости только в относительном движении, а второе слагаемое – изменение относительной скорости \vec{v}_r за счет переносного вращения.

Подставляя найденные производные в (9.14), получаем

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (9.18)$$

Добавочное ускорение, которое возникло вследствие непоступательного движения подвижной системы отсчета, называют поворотным или кориолисовым ускорением – \vec{a}_c .

Итак,

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (9.19)$$

Абсолютное ускорение точки в сложном движении

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad (9.20)$$

т.е. теорема доказана.

Если переносное движение поступательное, то $\vec{\omega}_e$ и \vec{a}_c равны нулю, и теорема о сложении ускорений при поступательном переносном движении записывается в виде

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r. \quad (9.21)$$

При использовании формул (9.20) и (9.21) следует иметь в виду, что переносное и относительное ускорения в общем случае равны суммам касательного и нормального ускорений:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n; \quad (9.22)$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n. \quad (9.23)$$

С учетом этого модуль абсолютного ускорения вычисляется координатным способом через проекции на оси координат (см. примеры).

Рассмотрим вычисление величины и направления кориолисова ускорения и причины его появления при непоступательном переносном движении.

9.3. Вычисление ускорения Кориолиса

Дадим *определение*: ускорением Кориолиса называется составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении, равная удвоенному векторному произведению переносной угловой и относительной линейной скоростей:

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (9.24)$$

Модуль кориолисова ускорения определяется как модуль векторного произведения:

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \quad (9.25)$$

Направление кориолисова ускорения можно определять двумя способами (рис. 9.4):

- а) по правилу векторного произведения (рис. 9.4,а);
- б) по правилу Жуковского¹ (рис. 9.4,б).

¹ Н.Е. Жуковский (1847–1921), великий русский ученый, профессор Московского университета и Московского высшего технического училища, "отец русской авиации" (основоположник современной аэромеханики).

На рис. 9.4 показано тело, вращающееся вокруг оси z , и точка M , перемещающаяся относительно тела со скоростью \vec{v}_r .

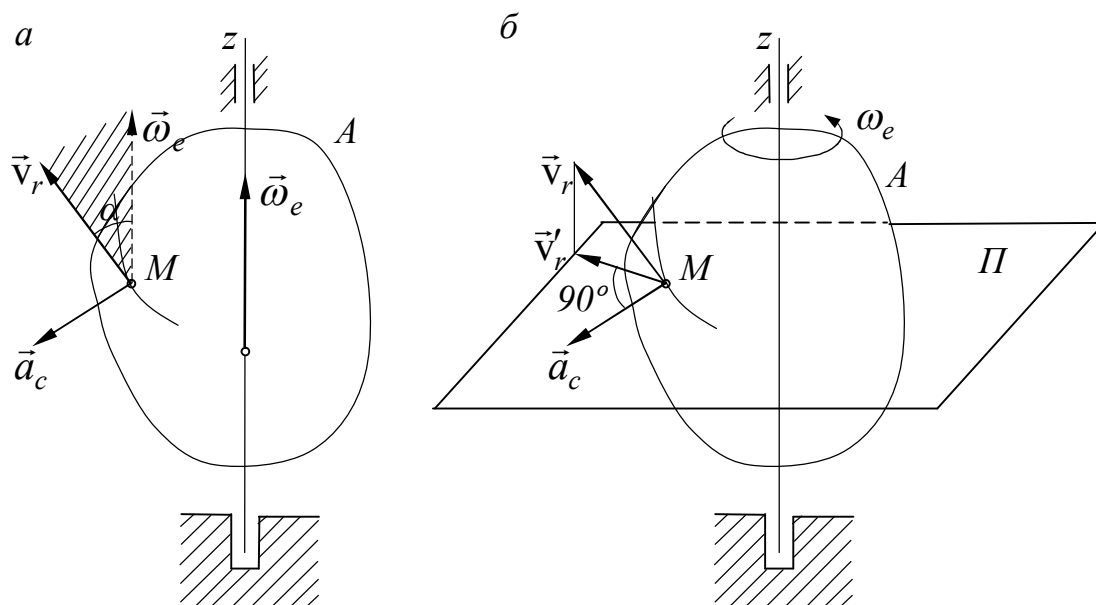


Рис. 9.4

Правило векторного произведения:

- 1) вектор угловой скорости $\vec{\omega}_e$ условно переносим в точку M ;
- 2) через векторы $\vec{\omega}_e$ и \vec{v}_r проводим плоскость;
- 3) вектор \vec{a}_c направлен перпендикулярно плоскости в ту сторону, откуда поворот от вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору \vec{v}_r на наименьший угол кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Правило Жуковского:

- 1) проводим через точку M плоскость Π , перпендикулярную оси переносного вращения (в этой плоскости лежит вектор \vec{a}_c);
- 2) проецируем относительную скорость на эту плоскость;
- 3) поворачиваем полученную проекцию \vec{v}'_r на угол 90° в сторону переносного вращения – это и будет направление ускорения \vec{a}_c ;
- 4) модуль кориолисова ускорения вычисляем по формуле $a_c = 2\omega_e v'_r = 2\omega_e v_r \sin \alpha$.

Отметим частные случаи, когда кориолисово ускорение равно нулю:

- 1) $v_r = 0$ – в случае относительного покоя или когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) $\omega_e = 0$ – в случае, когда переносное движение является поступательным или когда угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$ – когда относительная скорость параллельна оси переносного вращения.

Рассмотрим примеры нахождения ускорения Кориолиса.

Пример 9.1. Трубка АВ вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, с угловой скоростью ω (рис. 9.5). Внутри трубки движется шарик М с относительной скоростью \vec{v}_r .

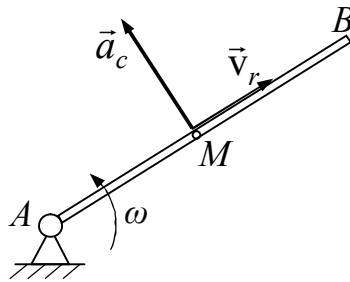


Рис. 9.5

Ускорение Кориолиса $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$. В данном случае $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$, $a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2\omega v_r$, направление показано на рисунке.

Пример 9.2. Трубка АВ вращается вокруг вертикальной оси, описывая конус с постоянным углом α (рис 9.6). Угловая скорость вращения трубки $\vec{\omega}$. Шарик движется внутри трубки с относительной скоростью \vec{v}_r . Модуль кориолисова ускорения $a_c = 2\omega v_r \sin \alpha$. Направление (его удобно определить по правилу Жуковского) показано на рисунке ($\vec{a}_c \parallel Ax$).

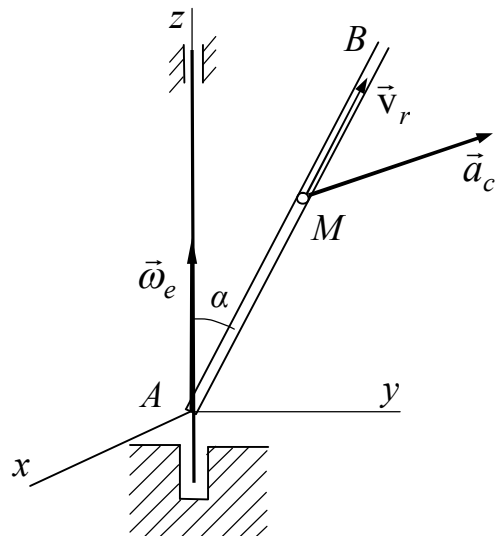


Рис. 9.6

Пример 9.3. Определить ускорение Кориолиса точки, движущейся по поверхности Земли с постоянной относительной скоростью \vec{v}_r (рис. 9.7). Движение Земли вокруг Солнца не учитывается.

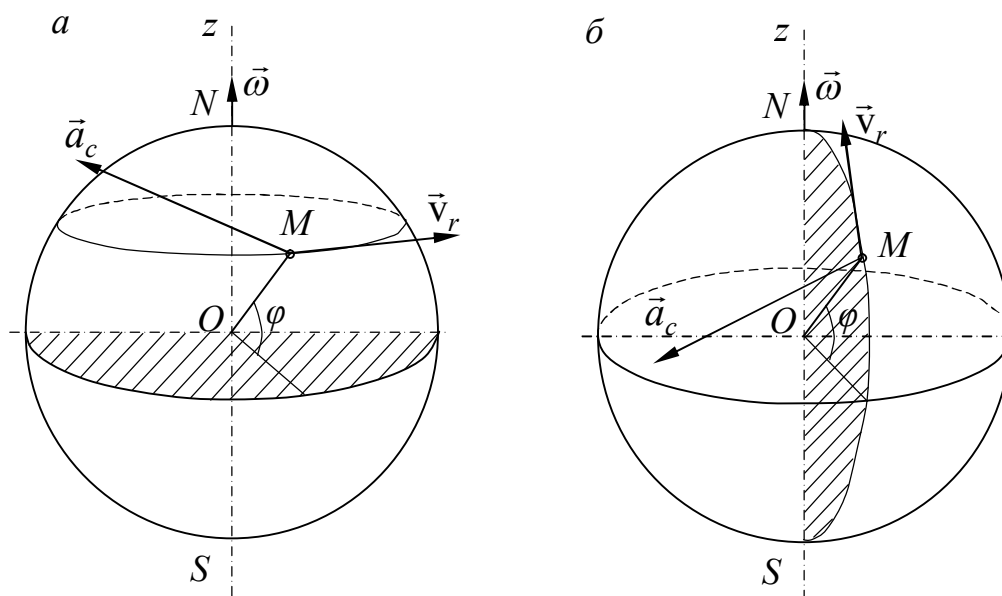


Рис. 9.7

Случай 1. Точка движется по параллели в направлении вращения Земли (рис. 9.7,а).

В данном случае вектор угловой скорости $\vec{\omega}_e$ перпендикулярен относительной скорости \vec{v}_r . Модуль ускорения Кориолиса

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2\omega v_r,$$

направление вектора \vec{a}_c (в горизонтальной плоскости) показано на рисунке.

Случай 2. Точка движется по меридиану с юга на север, широта места φ (рис. 9.7,б).

В этом случае угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и \vec{v}_r равен φ . Модуль ускорения Кориолиса

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin \varphi = 2\omega v_r \sin \varphi.$$

Ускорение Кориолиса направлено перпендикулярно плоскости меридиана и показано на рисунке.

9.4. Причины появления кориолисова ускорения

Покажем на примере, почему при непоступательном переносном движении появляется добавочное поворотное ускорение.

Пусть диск равномерно вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω . По радиусу диска от центра к ободу равномерно движется точка M со скоростью \vec{v}_r (рис. 9.8).

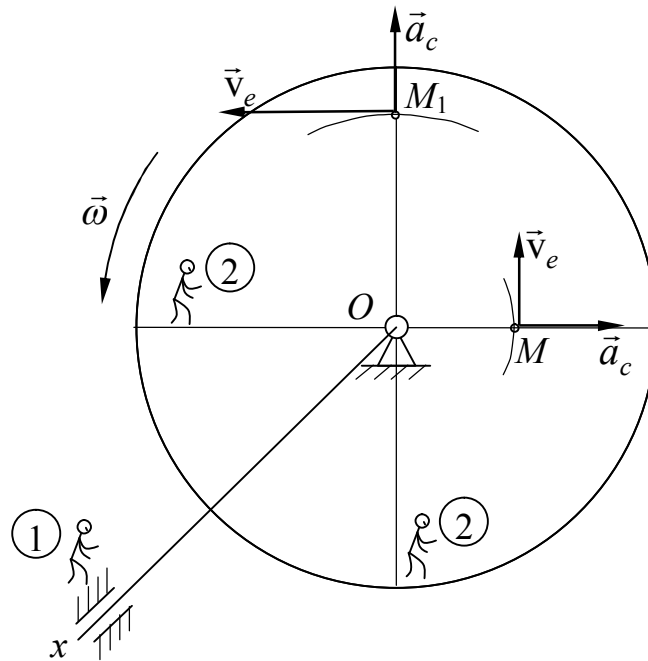


Рис. 9.8

Связав подвижную систему координат с диском, отметим, что относительное движение будет равномерным, прямолинейным, а переносное — равномерным, вращательным. Пусть в момент времени t точка занимает положение M и условно переносной траекторией будет окружность радиуса OM . За промежуток времени Δt точка сместится относительно диска, заняв положение M_1 , а диск повернется на некоторый угол $\Delta\varphi$. В момент времени $t_1 = t + \Delta t$ условно переносной траекторией будет окружность радиуса OM_1 .

Поскольку относительное движение равномерное и прямолинейное, то относительное ускорение $a_r = 0$. Однако в основной системе отсчета вектор относительной скорости \vec{v}_r изменил свое направление за счет переносного движения.

Поскольку переносное вращение равномерное, то угловое ускорение $\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0$ и переносное касательное ускорение \vec{a}_e^τ , характеризующее изменение модуля переносной скорости v_e , равно нулю. Однако за промежуток времени Δt величина переносной скорости увеличится за счет увеличения радиуса, которое происходит вследствие относительного движения точки.

Учитывая сказанное, можно назвать две причины появления ускорения Кориолиса при непоступательном переносном движении:

1) вследствие непоступательного переносного движения дополнительно изменяется направление относительной скорости точки по отношению к основной системе отсчета, что не учитывается относительным ускорением;

2) вследствие относительного движения точки по отношению к подвижной системе координат дополнительно изменяется величина переносной скорости, что не учитывается переносным ускорением.

9.5. Решение задач на сложное движение точки

Можно рекомендовать следующий план решения задач на рассматриваемую тему:

1) выбрать основную и подвижную системы отсчета и составить схему разложения движения, указав характер относительного и переносного движений;

2) используя уравнение относительного движения, определить положение точки относительно подвижной системы отсчета в данный момент времени. Следует обратить внимание, что зачастую точка будет находиться не там, где она показана на рисунке. Положение точки на рисунке указывает положительное направление отсчета координаты в относительном движении;

3) мысленно отвлекаясь от переносного движения, определить относительную скорость и относительное ускорение точки;

4) мысленно отвлекаясь от относительного движения, определить переносную скорость и переносное ускорение точки;

5) определить модуль и направление ускорения Кориолиса;

6) определить модули абсолютной скорости и ускорения.

Пример 9.4. Мотор установлен на тележке, движущейся прямолинейно вправо с постоянным ускорением $a_1 = 20 \text{ см/с}^2$. Ротор мотора вращается против часовой стрелки по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Радиус ротора $R = 20 \text{ см}$. Определить абсолютные скорость и ускорение точки M обода ротора через $t = 1 \text{ с}$ после начала движения тележки, если в этот момент времени радиус OM образует с горизонталью угол $\alpha = 45^\circ$ (рис 9.9).

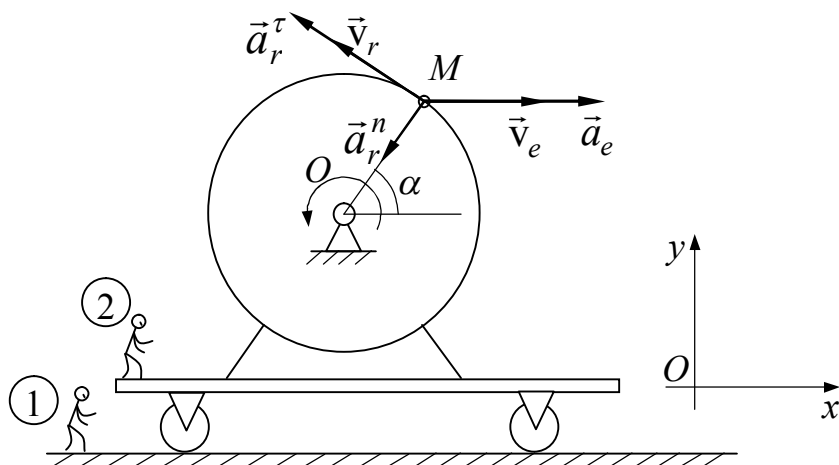
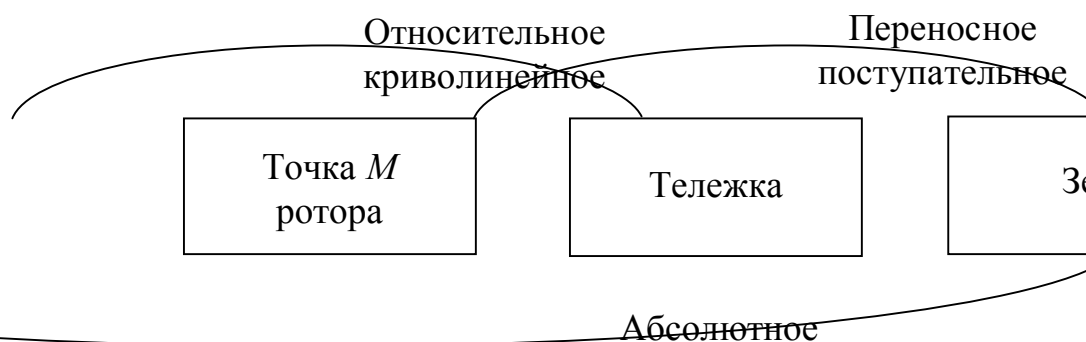


Рис. 9.9

Решение

1. Составим схему разложения движения точки M , введя подвижную



и основную системы.

Учитывая характер переносного движения, запишем формулы для абсолютной скорости и абсолютного ускорения:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

2. В данный момент времени положение точки M в подвижной системе задано, $\alpha = 45^\circ$.

3. Ротор совершает вращательное движение. Характеристики относительного движения:

$$\varphi_r = 2t^2 \text{ рад}; \quad \omega_r = \dot{\varphi}_r = 4t \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_r = \ddot{\varphi}_r = 4 \text{ рад/с}^2.$$

В момент времени $t = 1 \text{ с}$ $\omega_r = 4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_r = 4 \text{ рад/с}^2$.

Относительная скорость $v_r = R\omega_r = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см/с}$.

Относительное ускорение $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$,

$$a_r^\tau = R\varepsilon_r = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см/с}^2; \quad a_r^n = R\omega_r^2 = 20 \cdot 4^2 = 320 \text{ см/с}^2.$$

4. Поскольку переносное движение поступательное, то $a_e = a_1 = 20 \text{ см/с}^2$.
При постоянном ускорении $v_e = a_e \cdot t = 20 \cdot 1 = 20 \text{ см/с}$.

5. Модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения вычисляем координатным способом (см. рис. 9.9).

$$v_{ax} = v_e - v_r \cos 45^\circ = 20 - 80 \cdot 0,707 = -36,56 \text{ см/с};$$

$$v_{ay} = v_r \cos 45^\circ = 80 \cdot 0,707 = 56,56 \text{ см/с};$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-36,56)^2 + (56,56)^2} = 67,3 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Абсолютное ускорение: } \vec{a}_a = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e.$$

$$a_{ax} = a_e - a_r^\tau \cos 45^\circ - a_r^n \cos 45^\circ = 20 - 80 \cdot 0,707 - 320 \cdot 0,707 = -262,8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_r^\tau \cos 45^\circ - a_r^n \cos 45^\circ = 80 \cdot 0,707 - 320 \cdot 0,707 = -169,7 \text{ см/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{(-262,8)^2 + (-169,7)^2} = 313 \text{ см/с}^2.$$

Пример 9.5. Диск радиуса $R = 30 \text{ см}$ вращается вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi = 2t^2 - 2t \text{ рад}$ (рис. 9.10,а). По ободу диска движется точка M по закону $s = 15\pi t^2 \text{ см}$. В момент времени $t = 1 \text{ с}$ найти модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

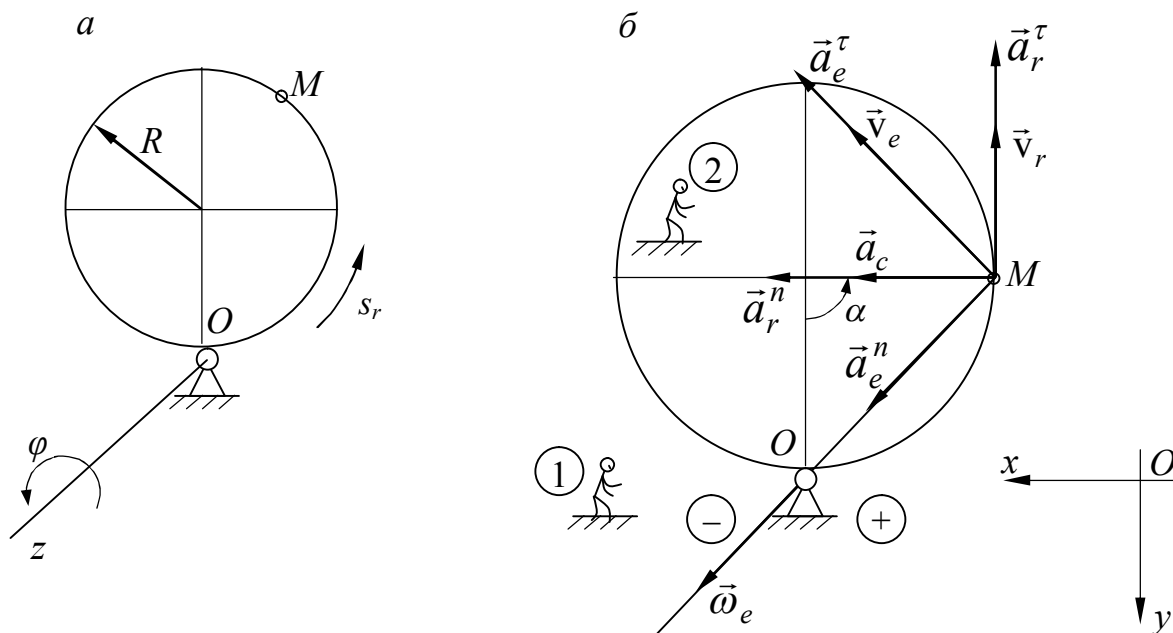
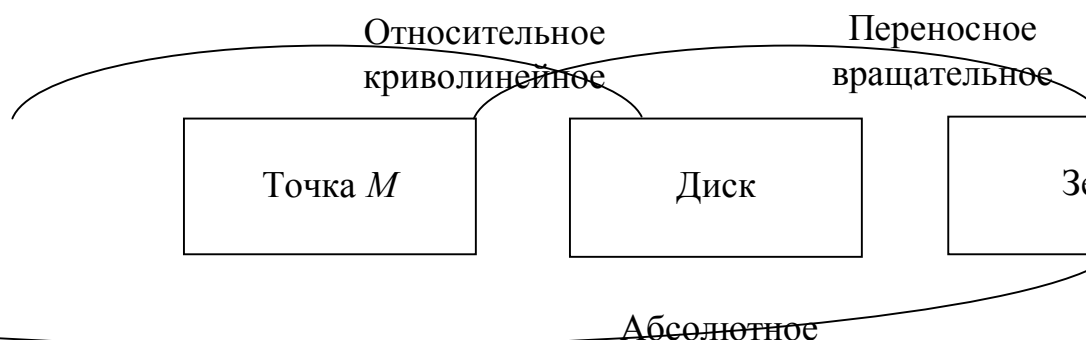


Рис. 9.10

Решение

1. Составим схему разложения движения точки M , связав основную систему отсчета с Землей, подвижную систему – с диском.



Абсолютная скорость $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, абсолютное ускорение при непоступательном переносном движении $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$.

2. Обратим внимание, что точка в данный момент времени будет находиться не там, где показана на рис. 9.10,а. Траекторией точки в относительном движении является окружность радиуса $R = 30$ см, точка O – начало отсчета криволинейной координаты, положение точки M указывает положительное направление отсчета. Для данного момента времени $t = 1$ с длина дуги $\overset{\circ}{OM} = 15\pi t^2 = 15\pi \cdot 1 = 15\pi$ см. Центральный угол α , соответствующий данной дуге, $\alpha = \frac{\overset{\circ}{OM}}{R} = \frac{15\pi}{30} = \frac{\pi}{2}$ рад, и точка находится в положении, указанном на рис. 3.10,б.

3. Относительное движение задано естественным способом. Закон относительного движения $s_r = 15\pi t^2$ см.

Характеристики относительного движения:

$$v_r = \overset{\circ}{s}_r = 30\pi t \text{ см/с}; \quad \vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^n;$$

$$a_r^{\tau} = \overset{\circ}{v}_r = 30\pi \text{ см/с}^2; \quad a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{R}.$$

Для заданного момента времени $t = 1$ с

$$v_r = 94,2 \text{ см/с}; \quad a_r^{\tau} = 94,2 \text{ см/с}^2; \quad a_r^n = 296 \text{ см/с}^2.$$

Векторы относительной скорости, составляющие относительного ускорения показаны на рис. 9.10,б.

4. Условно-переносной траекторией точки M будет окружность радиуса $OM = R\sqrt{2} = 30 \cdot 1,41 = 42,4$ см.

Характеристики переносного вращательного движения диска:

$$\varphi_e = 2t^2 - 2t \text{ рад}; \quad \omega_e = \dot{\varphi}_e = 4t - 2 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Для данного момента времени $t = 1 \text{ с}$

$$\omega_e = 2 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_e = 4 \text{ рад/с}^2,$$

полезно отметить, что диск вращается против часовой стрелки ускоренно.

Переносная скорость и переносное ускорение для данного момента времени:

$$v_e = OM \cdot \omega_e = 42,4 \cdot 2 = 84,8 \text{ см/с};$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n;$$

$$a_e^\tau = OM \cdot \varepsilon_e = 42,4 \cdot 4 = 169,6 \text{ см/с}^2;$$

$$a_e^n = OM \cdot \omega_e^2 = 42,4 \cdot 4 = 169,6 \text{ см/с}^2.$$

Соответствующие векторы показаны на рис. 3.10,б.

5. Ускорение Кориолиса $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$.

Вектор $\vec{\omega}_e$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа: $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$.

Модуль ускорения Кориолиса $a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 94,2 = 376,8 \text{ см/с}^2$, направление показано на рис. 9.10,б.

6. Модуль абсолютной скорости $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

$$v_{ax} = v_e \cos 45^\circ = 84,8 \cdot 0,707 = 59,9 \text{ см/с};$$

$$v_{ay} = -v_e \cos 45^\circ - v_r = -84,8 \cdot 0,707 - 94,2 = -154,1 \text{ см/с};$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{59,9^2 + (-154,1)^2} = 165 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютного ускорения $\vec{a}_a = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_c$.

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_e^\tau \cos 45^\circ + a_e^n \cos 45^\circ + a_r^\tau + a_c = \\ &= 169,6 \cdot 0,707 + 169,6 \cdot 0,707 + 295,8 + 376,8 = 912,4 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ay} &= -a_e^\tau \cos 45^\circ + a_e^n \cos 45^\circ - a_r^\tau = \\ &= -169,6 \cdot 0,707 + 169,6 \cdot 0,707 - 94,2 = -94,2 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{912,4^2 + (-94,2)^2} = 917 \text{ см/с}^2.$$

Пример 9.6. Диск радиуса $R = 30 \text{ см}$ вращается вокруг вертикальной оси AB по закону $\varphi = 4t^2 - 2t \text{ рад}$ (рис. 9.11,а). Одновременно по ободу диска в заданном направлении движется точка M по закону

$s_r = {}^O OM = 10\pi \sin \frac{\pi}{4} t$ см. В заданный момент времени $t = \frac{2}{3}$ с определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения.

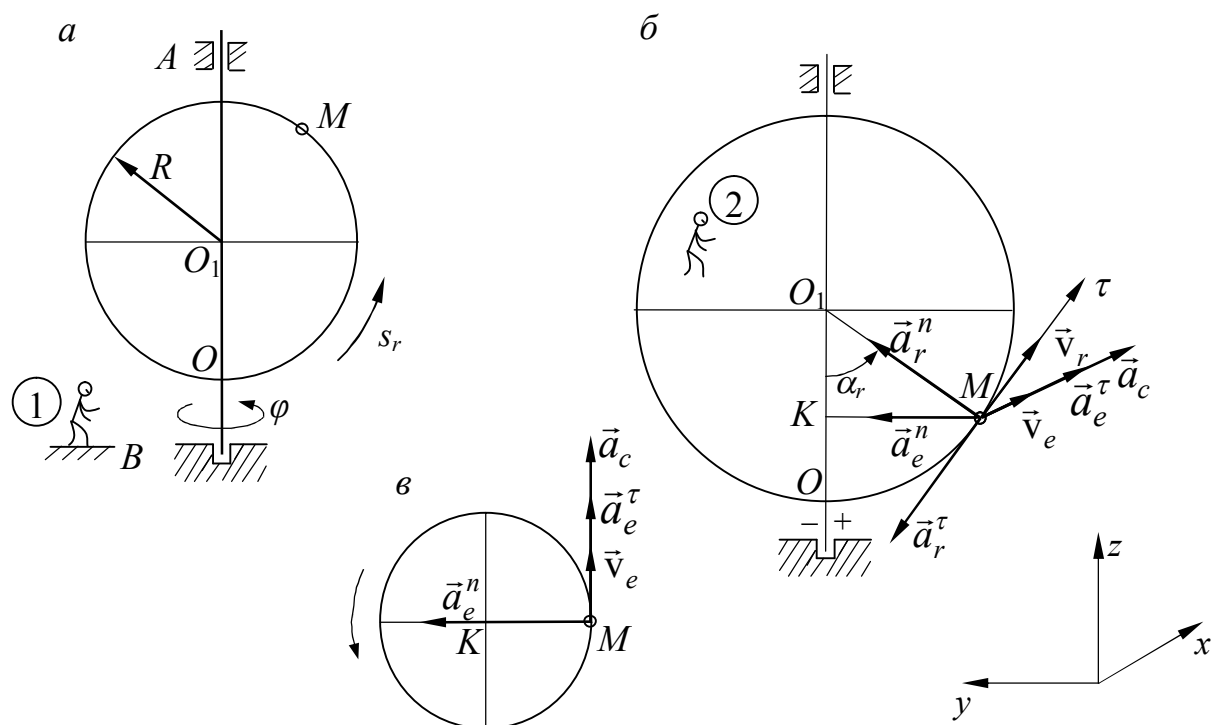
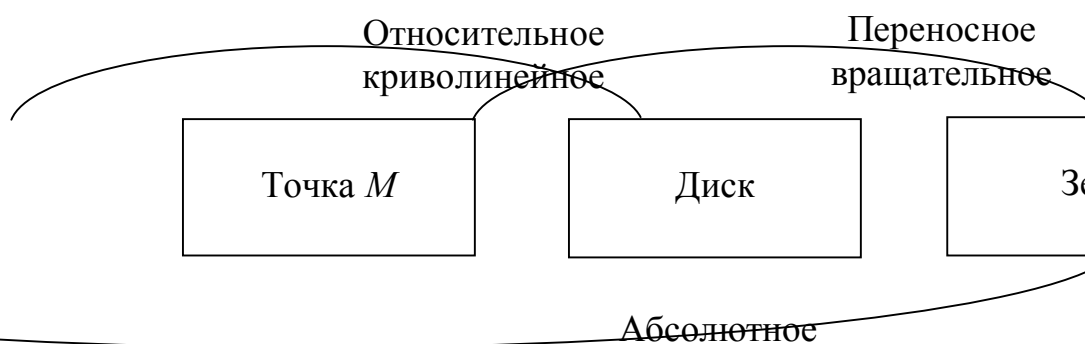


Рис. 9.11

Решение

1. Схема разложения движения точки M



Характеристики абсолютного движения:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r; \quad \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

2. Положение точки относительно подвижной системы отсчета в данный момент времени и положительное направление отсчета криволинейной координаты показаны на рис. 9.11, б, здесь же показано положительное направление касательной в этом движении.

$$^{\cup}OM = 10\pi \sin \frac{\pi}{4} t \text{ см}, \quad t = \frac{2}{3} \text{ с}; \quad ^{\cup}OM = 10\pi \sin \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} = 5\pi \text{ см} (> 0).$$

$$\text{Центральный угол } \alpha_r = \frac{^{\cup}OM}{R} = \frac{5\pi}{30} = \frac{\pi}{6} \text{ рад.}$$

Характеристики относительного движения, заданного естественным способом:

$$s_r = 10\pi \sin \frac{\pi}{4} t \text{ см};$$

$$v_r = \dot{s}_r = \frac{5}{2}\pi^2 \cos \frac{\pi}{4} t \text{ см/с}; \quad \vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^n;$$

$$a_r^{\tau} = \dot{v}_r = -\frac{5}{8}\pi^3 \sin \frac{\pi}{4} t \text{ см/с}^2; \quad a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{R}.$$

$$\text{Для заданного момента времени } t = \frac{2}{3} \text{ с}$$

$$v_r = 21,3 \text{ см/с} (> 0); \quad a_r^{\tau} = -9,7 \text{ см/с}^2 (< 0); \quad a_r^n = 15,1 \text{ см/с}^2.$$

Относительная скорость, составляющие относительного ускорения показаны на рис. 9.11,б.

3. Характеристики вращательного движения диска:

$$\text{уравнение движения } \varphi_e = 4t^2 - 2t \text{ рад};$$

$$\text{угловая скорость } \omega_e = \dot{\varphi} = 8t - 2 \text{ рад/с};$$

$$\text{угловое ускорение } \varepsilon_e = \ddot{\varphi} = 8 \text{ рад/с}^2.$$

$$\text{Значение величин в данный момент времени } t = \frac{2}{3} \text{ с:}$$

$$\omega_e = 3,33 \text{ рад/с} (> 0);$$

$$\varepsilon_e = 8 \text{ рад/с}^2 (\omega \cdot \varepsilon > 0)$$

– диск вращается ускоренно против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси. Вектор угловой скорости направлен по оси вращения вверх.

Характеристики переносного движения:

переносная траектория – окружность радиуса MK (рис. 9.11,б и 9.11,в)

$$MK = R \sin \alpha_r = 30 \cdot \sin 30^\circ = 15 \text{ см};$$

переносная скорость и переносное ускорение в данный момент времени:

$$v_e = MK \cdot \omega_e = 15 \cdot 3,33 = 50 \text{ см/с};$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n; \quad a_e^\tau = MK \cdot \varepsilon_e = 15 \cdot 8 = 120 \text{ см/с}^2;$$

$$a_e^n = MK \cdot \omega_e^2 = 15 \cdot 3,33^2 = 166,3 \text{ см/с}^2.$$

Направление векторов показано на рис. 9.11,б; 9.11,в.

4. Модуль и направление ускорения Кориолиса $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$.

Учтем, что угол между $\vec{\omega}_e$ и \vec{v}_r равен 60° .

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin 60^\circ = 2 \cdot 3,33 \cdot 21,3 \cdot 0,866 = 122,8 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора \vec{a}_c показано на рис. 9.11,б,в.

5. Модуль абсолютной скорости $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$.

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{50^2 + 21,3^2} = 54,3 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютного ускорения $\vec{a}_a = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_c$.

$$a_{ax} = a_e^\tau + a_c = 120 + 122,8 = 242,8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_e^n + a_r^\tau \cos 30^\circ + a_r^n \cos 60^\circ = 166,3 + 9,7 \cdot 0,866 + 15,1 \cdot 0,5 = 182,2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{az} = -a_r^\tau \cos 60^\circ + a_r^n \cos 30^\circ = -9,7 \cdot 0,5 + 15,1 \cdot 0,866 = 8,2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{242,8^2 + 182,3^2 + 8,2^2} = 304 \text{ см/с}^2.$$

Пример 9.7. Механизм строгального станка состоит из двух параллельных валов O и O_1 , кривошипа OA и кулисы O_1B (рис. 9.12,а). Концы кривошипа OA соединен шарнирно с ползуном, скользящим вдоль прорези в кулисе. Кривошип OA длины r вращается с постоянной угловой скоростью ω , расстояние между осями валов $OO_1 = a$. Найти характеристики относительного и переносного движений ползуна A .

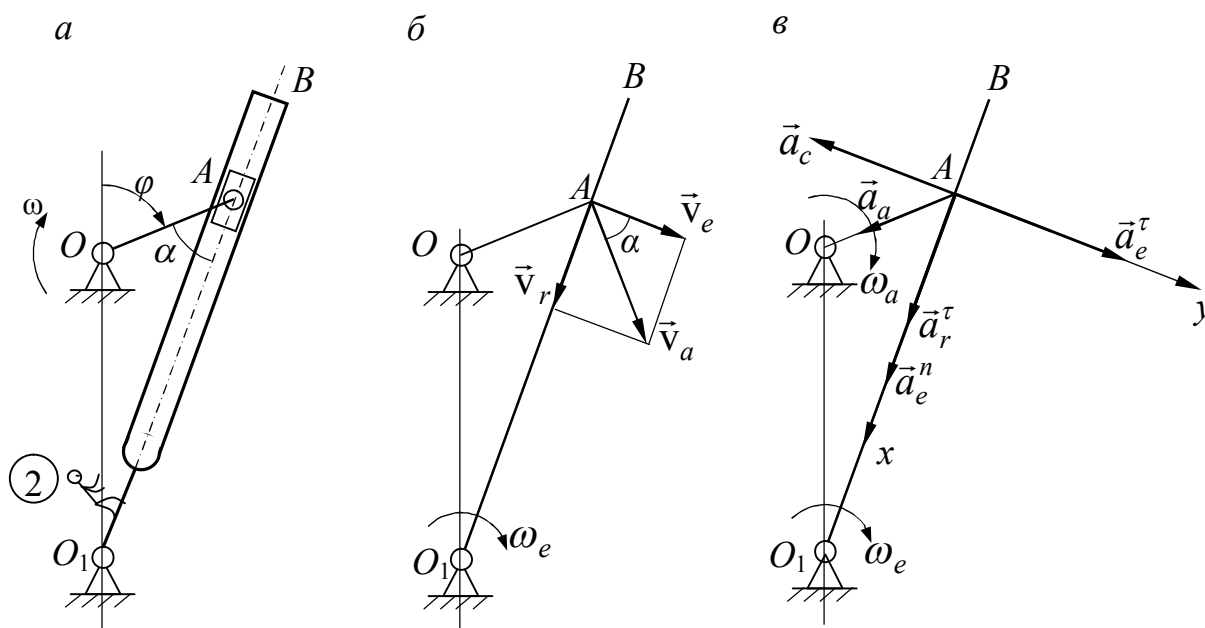
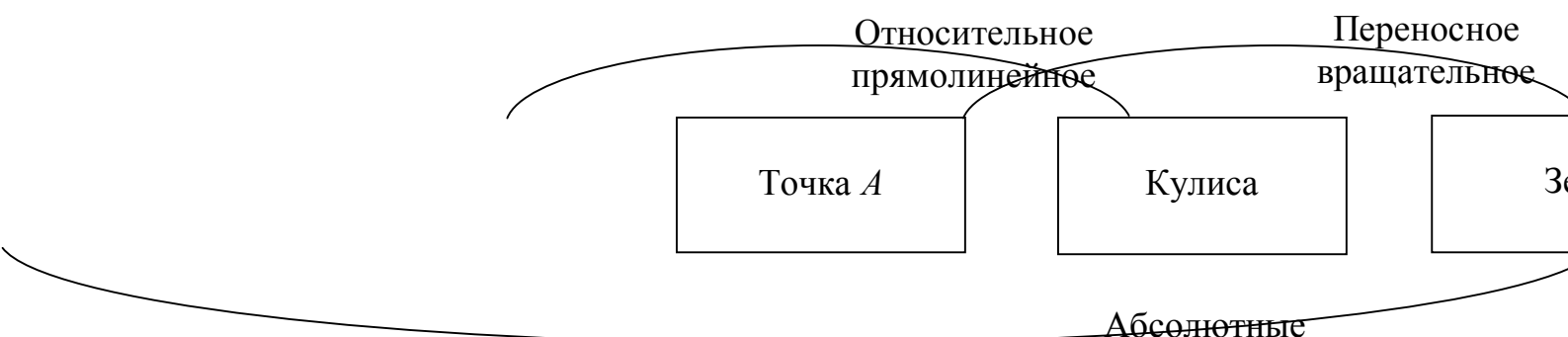


Рис. 9.12

Решение

Составим схему разложения движения ползуна A , связав подвижную систему координат с кулисой O_1B .



Абсолютная скорость и абсолютное ускорение ползуна A :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Следует отметить, что точка A принадлежит кривошипу OA , который совершает вращательное движение. Это позволяет определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A . Поэтому в данном случае имеем задачу разложения движения.

Абсолютная скорость точки A $v_a = r \cdot \omega$; абсолютное ускорение точки A : $\vec{a}_a = \vec{a}_a^r + \vec{a}_a^n$; $\omega = \text{const}$; $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$; $a_a^r = 0$; $a_a^n = OA \cdot \omega^2 = r\omega^2$; $a_a = r\omega^2$.

Векторы абсолютной скорости и абсолютного ускорения показаны на рис. 9.12, б; 9.12, в.

Определяя положение ползуна A относительно кулисы O_1B , полезно указать некоторые геометрические соотношения:

$$O_1A = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi} \text{ — с использованием теоремы косинусов;}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi}} \sin \varphi \text{ — с использованием теоремы синусов.}$$

сов.

$\varphi = \omega t$ — при равномерном вращении кривошипа.

Поскольку относительное движение прямолинейное, а переносное — вращательное, то относительная скорость направлена вдоль кулисы O_1B , а переносная ей перпендикулярна (см. рис. 9.12, б).

Проецируя уравнение $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ на оси x и y , получаем

$$x) v_a \sin \alpha = v_r; \tag{9.26}$$

$$y) v_a \cos \alpha = v_e. \tag{9.27}$$

Зная переносную скорость (9.27), определяем угловую скорость кулисы O_1B :

$$\omega_e = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{v_a \cos \alpha}{O_1A}. \quad (9.28)$$

Векторы, определяющие абсолютное ускорение точки, расположены в одной плоскости, поэтому выражение $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$ после проецирования на оси x и y позволяет найти две неизвестные величины. Покажем это. Абсолютное ускорение \vec{a}_a известно по величине и направлению. Переносное ускорение $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$.

$a_e^\tau = O_1A \cdot \varepsilon_e$ – неизвестно по модулю, известно по направлению, $\vec{a}_e^\tau \perp O_1B$.

$a_e^n = O_1A \cdot \omega_e^2$ – известно по модулю и по направлению (см. рис. 9.12,в).

Относительное ускорение $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$.

$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt}$ – неизвестно по модулю и направлено по прямой O_1B – известно по направлению.

$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = 0$, т.к. относительное движение прямолинейное.

Ускорение Кориолиса:

$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$. Угловая скорость $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ и модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2\omega_e v_r,$$

где ω_e и v_r определяются с помощью формул (9.28) и (9.26).

Направление ускорения Кориолиса показано на рис. 9.12,в. Таким образом, вектор \vec{a}_c известен по модулю и направлению.

В уравнении

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_c \quad (9.29)$$

две неизвестные величины – модуль переносного касательного и модуль относительного касательного ускорений.

Проецируя (9.29) на оси координат, получаем

$$x) a_a \cos \alpha = a_e^n + a_r^\tau;$$

$$y) -a_a \sin \alpha = a_e^\tau - a_c.$$

Из полученной системы алгебраических уравнений находим a_e^τ и a_r^τ . Зная переносное касательное ускорение, определяем угловое ускорение кулисы

$$\varepsilon_e = \frac{a_e^\tau}{O_1 A}. \quad (9.30)$$

Изложенная в главе теория сложного движения точки будет использована в последующем для рассмотрения сложного движения тела.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятиям *переносная скорость* и *переносное ускорение точки*.
2. Может ли модуль абсолютной скорости точки быть меньше, чем модули относительной и переносной скорости?
3. Что характеризует относительное ускорение, переносное ускорение и кориолисово ускорение?
4. Шар вращается вокруг одного из своих диаметров. В каких положениях точки на меридиане ее кориолисово ускорение а) равно нулю; б) имеет максимальное значение?
5. Точка равномерно движется по диаметру диска, который равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр. Зависит ли величина кориолисова ускорения точки от ее положения на диаметре?
6. Диск радиуса R вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг центральной оси, перпендикулярной его плоскости. По ободу диска в направлении, противоположном вращению, движется точка с постоянной относительной скоростью $v_r = R\omega$. Чему равны абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки? Как направлено ускорение Кориолиса?

Глава 10. Сложное движение тела

В предыдущей главе было рассмотрено сложное движение точки, составленное из двух движений: относительного и переносного. Аналогично будет рассматриваться и сложное движение тела. Напомним, что относительным называют движение тела по отношению к подвижной системе отсчета, переносным – движение этой подвижной системы относительно основной, которая условно считается неподвижной. Абсолютным называют результирующее движение тела по отношению к основной системе отсчета. Схема разложения движения была записана ранее. Напомним ее (рис. 10.1).

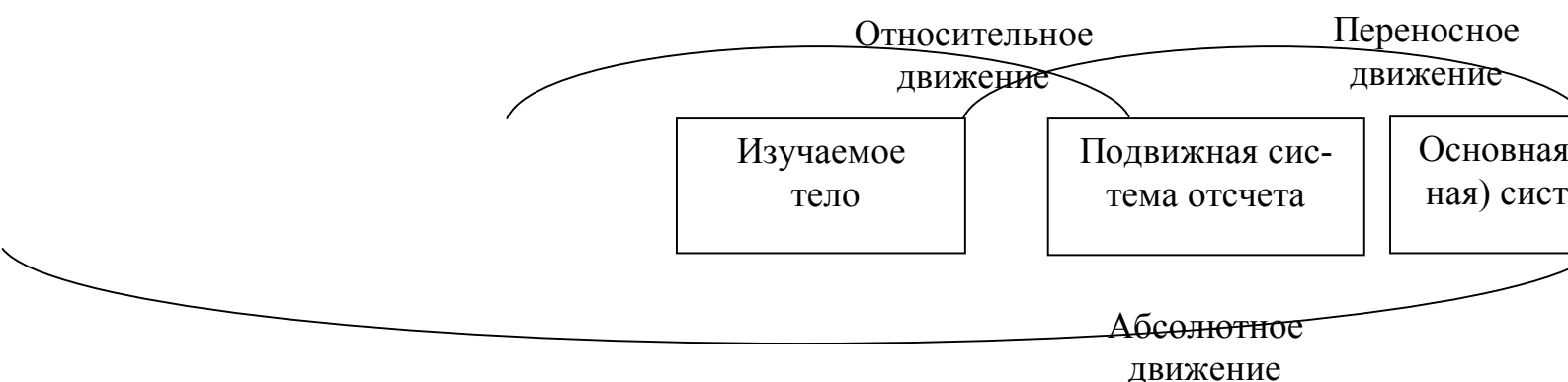


Рис. 10.1

При изучении сложного движения тела последовательно рассматриваются случаи, когда оба из складываемых движений являются поступательными, вращательными, а затем случай, когда одно из движений – поступательное, другое – вращательное. Как и ранее, будем устанавливать связь кинематических характеристик складываемых и абсолютного движений. Ограничимся лишь задачей о связи скоростей (линейных и угловых).

Случай 1. Складываемые движения – поступательные.

Имеет место следующая **теорема**. Если тело находится в двух одновременных поступательных движениях – относительном и переносном, то абсолютное движение тела также будет поступательным и его скорость будет равна геометрической сумме скоростей относительного и переносного движений:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Доказательство. Пусть тело A движется поступательно относительно системы отсчета $Oxyz$ со скоростью \vec{V}_r , а эта система движется поступательно со скоростью \vec{V}_e относительно основной системы $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 10.2).

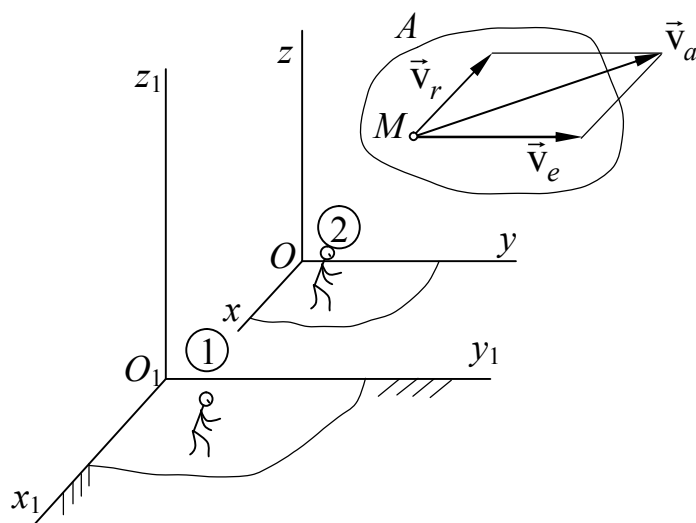


Рис. 10.2

Рассмотрим произвольную точку M тела. Поскольку при поступательном движении все точки тела имеют геометрически равные скорости, то относительные скорости всех точек будут одинаковы и равны \vec{v}_r . Аналогично в переносном поступательном движении скорости всех точек, в том числе и точки M , будут также одинаковы и равны \vec{v}_e . На основании теоремы о сложении скоростей точки запишем

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (10.1)$$

Это равенство можно записать и для всех других точек тела. Следовательно, абсолютные скорости всех точек будут геометрически равными и абсолютное движение тела будет также поступательным.

Примером такого движения является движение тележки A мостового крана, перемещающегося вдоль здания цеха (рис. 10.3).

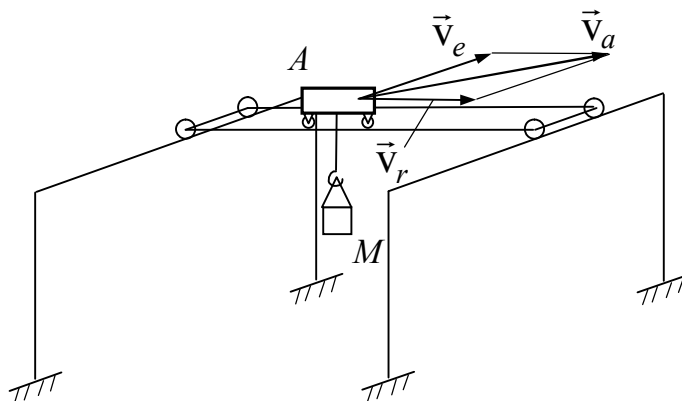


Рис. 10.3

Случай 2. Складываемые движения вращательные.

А. Рассмотрим вначале случай, когда оси вращений пересекаются.

Предположим, что тело, например цилиндр, вращается вокруг оси AD по отношению к рамке $ABCD$, которая вращается вокруг неподвижной оси BC (рис. 10.4).

Обозначим векторы угловых скоростей этих движений через $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$. Требуется выяснить характер абсолютного движения и найти его кинематические характеристики. Этот вопрос решается следующей теоремой.

Теорема о сложении угловых скоростей тела. Если тело находится одновременно в двух вращательных движениях вокруг пересекающихся осей, то абсолютное движение будет вращательным вокруг мгновенной оси, проходящей через точку пересечения осей складываемых движений. Абсолютная угловая скорость тела равна геометрической сумме угловых скоростей этих вращений:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

Доказательство

Пусть тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ вокруг оси Oz и вместе с этой осью вращается вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. Очевидно, что точка O пересечения осей вращений имеет абсолютную скорость, равную нулю, т.к. $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Но у точки O скорости в каждом движении равны нулю.

Построим параллелограмм $OABC$ на заданных угловых скоростях и докажем, что абсолютная скорость точки C тела также равна нулю. Вычислим модули переносной и относительной скоростей точки C :

$$v_e = h_1 \omega_e, \quad v_r = h_2 \omega_r, \quad (10.2)$$

где h_1, h_2 – расстояния от точки C до осей z_1 и z соответственно.

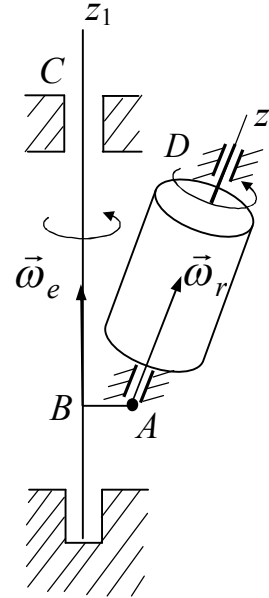


Рис. 10.4

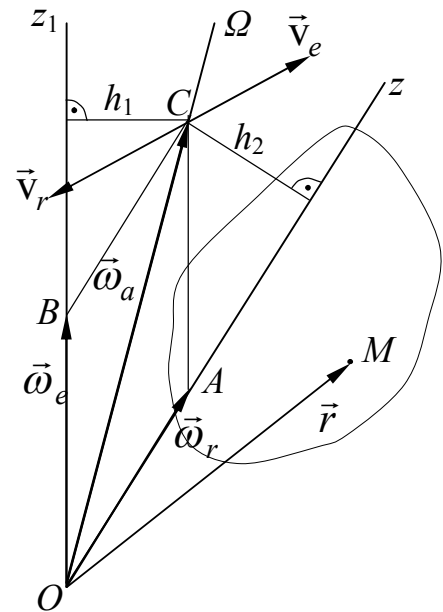


Рис. 10.5

Как видно из рисунка, каждое из этих произведений равно площади параллелограмма $OABC$ и, следовательно, $v_e = v_r$ по модулю. Направления же векторов v_e и v_r , лежащих на одной прямой, противоположны. Таким образом, абсолютная скорость точки C равна нулю, $v_a = 0$. Прямая OQ , проходящая через точки O и C , представляет собой мгновенную ось в абсолютном движении. Поэтому абсолютное движение будет вращательным вокруг мгновенной оси.

Для определения абсолютной угловой скорости тела $\vec{\omega}_a$ рассмотрим произвольную точку M тела. Обозначим $\vec{OM} = \vec{r}$ – радиус-вектор этой точки. Для точки, участвующей в сложном движении, абсолютная скорость

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (10.3)$$

Поскольку все движения вращательные, то линейные скорости определяются с помощью кинематических формул Эйлера:

$$\vec{v}_a = \vec{\omega}_a \times \vec{r}, \quad \vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}, \quad \vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}.$$

Подставляя эти значения в (10.3), получим

$$\vec{\omega}_a \times \vec{r} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{r}.$$

Но так как точка M произвольная, то и радиус-вектор \vec{r} – произвольный, следовательно,

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (10.4)$$

Теорема доказана. Сделаем замечания.

1. Очевидно, что теорему можно обобщить на сложное движение тела, составленное из трех и более мгновенных вращений. В этом случае абсолютная угловая скорость

$$\vec{\omega}_a = \sum \vec{\omega}_s. \quad (10.5)$$

2. Эта теорема обосновывает векторную природу угловой скорости тела, поскольку для нее доказано правило параллелограмма.

Пример 10.1. Определить угловую скорость конической шестерни 1, катящейся по неподвижной шестерне 2, если задана скорость точки A \vec{v}_A и размеры $OA = l$, $AC = R$ (рис. 10.6).

Решение. Абсолютное движение шестерни является результатом сложения двух вращений: относительного вокруг оси OA и переносного – вокруг оси OB с угловыми скоростями $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$. По заданной скорости точки A вычислим переносную угловую скорость:

$$\omega_e = \frac{v_A}{l}.$$

Мгновенная ось вращения, а следовательно, и вектор $\vec{\omega}_a$, направлены по линии ОС, так как скорость точки С равна нулю. Строя параллелограмм угловых скоростей, получаем значение абсолютной угловой скорости

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{\sin \alpha},$$

где $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$

Заметим, что мгновенная ось $O\Omega$ изменяет свое положение в пространстве. Геометрическое место мгновенных угловых скоростей называют аксоидом. В рассматриваемом примере в основной системе неподвижным аксоидом будет круговой конус с вертикальной осью; в системе, жестко связанной с шестерней, подвижным аксоидом будет круговой конус с осью OA . При движении шестерни 1 подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.

Б. Рассмотрим случай, когда переносное и относительное движения тела являются вращениями вокруг параллельных осей, и покажем, что угловые скорости складываются по правилу сложения параллельных векторов.

Допустим, что направления складываемых вращений одинаковы (рис. 10.7). Построим векторы: $\vec{\omega}_e$ – угловой скорости вращения цилиндра относительно рамки $ABCD$ и $\vec{\omega}_r$ – угловой скорости рамки. Покажем, что в каждый момент времени в абсолютном движении существует мгновенная ось вращения.

Рассмотрим точку P тела (рис. 10.8), которая делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные величинам угловых скоростей (эта точка может оказаться и вне тела, тогда точка P принадлежит простран-

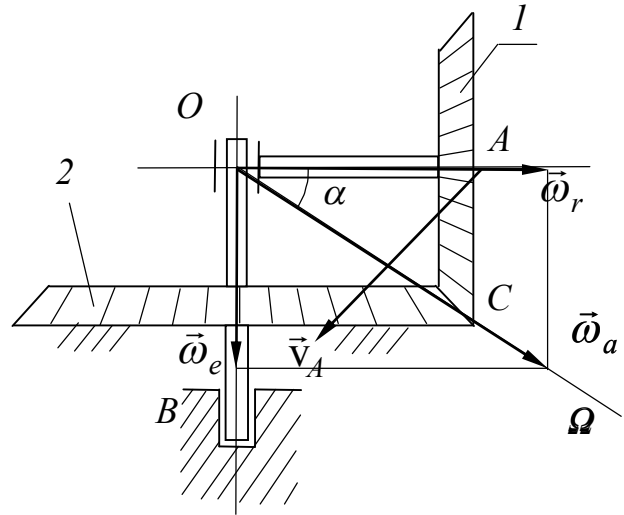


Рис. 10.6

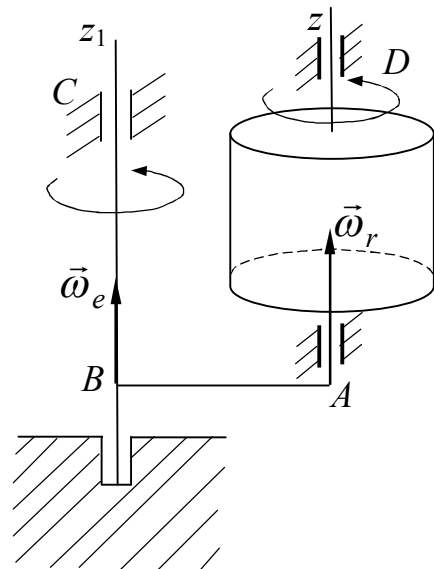


Рис. 10.7

ству, жестко связанному с телом):

$$\frac{BP}{AP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (10.6)$$

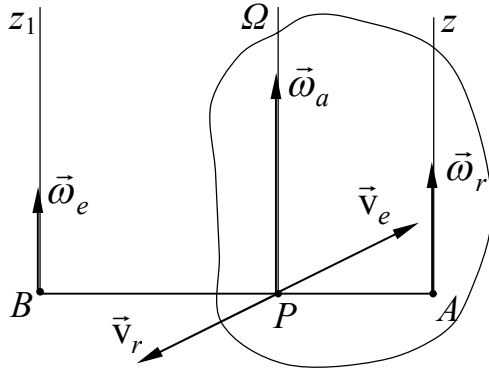


Рис. 10.8

Абсолютная скорость точки P по теореме о сложении скоростей равна $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Соответственно переносная и относительная скорости $v_e = BP\omega_e$, $v_r = AP\omega_r$. С учетом (10.6) эти скорости равны по величине, кроме того, они направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, абсолютная скорость точки P равна нулю ($v_a = 0$). То же самое выполняется и для любой точки прямой, параллельной осям вращений. Поэтому $P\Omega$ – мгновенная ось вращения в абсолютном движении.

лютом движении.

Найдем $\vec{\omega}_a$ – абсолютную угловую скорость тела. Для этого рассмотрим точку A , лежащую на оси относительного вращения, и вычислим ее абсолютную скорость: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Переносная скорость $v_e = AB\omega_e$, $v_r = 0$, $v_a = AP\omega_a$.

Приравнявая модули скоростей, получаем $\omega_a AP = \omega_e AB$. Учитывая, что $AB = BP + AP$, а также (10.6), после несложных преобразований имеем $\omega_a AP = \omega_e(BP + AP)$, $\omega_a AP = \omega_e BP + \omega_e AP$, $\omega_a AP = \omega_r AP + \omega_e AP$ и окончательно

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r. \quad (10.7)$$

Поскольку направления скоростей одинаковы, то, следовательно, направление абсолютного вращения будет таким же. Итак, доказано, что угловые скорости складываются по правилу сложения параллельных векторов.

Совершенно аналогично складываются угловые скорости, когда направления вращений противоположны и угловые скорости различны.

На рис. 10.9 показан случай, когда $\omega_r > \omega_e$. В этом случае вновь $P\Omega$ – мгновенная ось в абсолютном движении и абсолютная угловая скорость ω_a

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e. \quad (10.8)$$

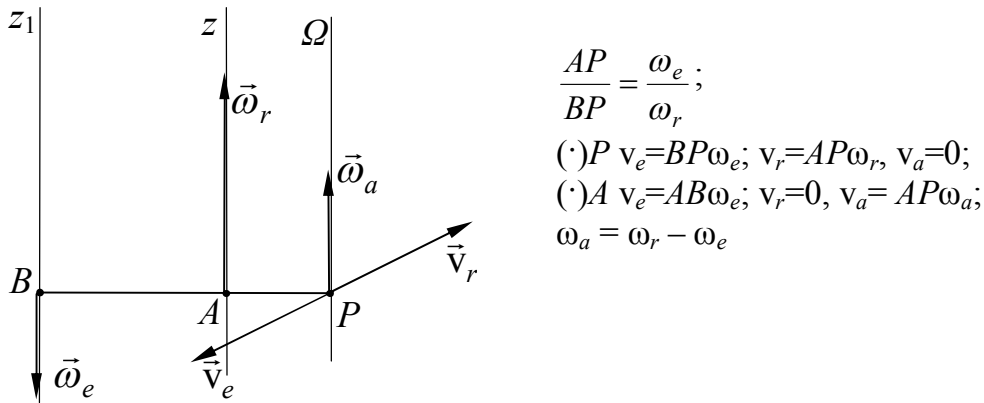


Рис. 10.9

Действительно, рассмотрим точку P , которая делит отрезок AB внешним образом на части, обратно пропорциональные угловым скоростям:

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{AP}{BP}.$$

Скорость этой точки $v_a = v_P = \omega_e BP - \omega_r AP = 0$ и скорость точки A $v_a = v_A = \omega_a AP = \omega_e AB$, откуда $\omega_a = \omega_r - \omega_e$.

Представляет интерес случай, когда направления вращений противоположны и величины угловых скоростей одинаковы.

В. Пара вращений. Дадим определение. Совокупность двух мгновенных вращений тела вокруг параллельных осей с равными по величине и противоположными по направлению угловыми скоростями называют парой вращений. Угловые скорости $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ образуют пару угловых скоростей.

Для этого случая справедлива **теорема**. Если тело участвует в паре вращений, то абсолютное движение будет мгновенным поступательным. Скорость поступательного движения равна моменту пары угловых

скоростей: $\vec{v}_a = \overrightarrow{tom}(\vec{\omega}_e, \vec{\omega}_r)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку M тела (рис. 10.10), для которой связь между векторами имеет вид

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}. \quad (10.9)$$

Угловые скорости образуют пару угловых скоростей

$$\vec{\omega}_e = -\vec{\omega}_r. \quad (10.10)$$

По теореме сложения скоростей для точки M ее абсолютная скорость $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

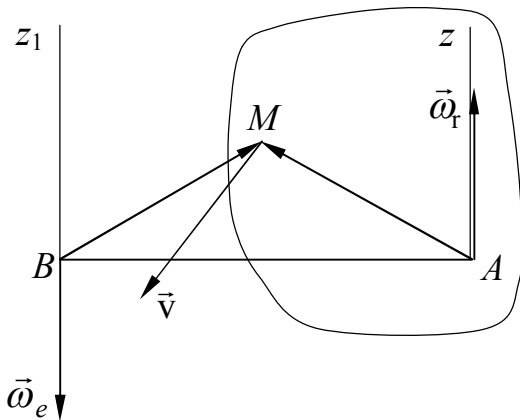


Рис. 10.10

Используем кинематические формулы Эйлера:

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{BM}, \quad \vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AM}.$$

Подставляя в выражение абсолютной скорости, учитывая (10.9) и (10.10), получаем

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &= \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{BM} + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AM} = \\ &= \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{BM} - \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{AM} = \\ &= \vec{\omega}_e \times (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM}) = \\ &= \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}_e = \overrightarrow{BA} \times \vec{\omega}_r = \overrightarrow{tom}(\vec{\omega}_e, \vec{\omega}_r) \end{aligned}$$

– момент пары угловых скоростей.

Поскольку скорость точки M не зависит от ее положения в теле, то скорости всех точек в данный момент времени равны между собой, т.е. твердое тело находится в мгновенном поступательном движении – теорема доказана.

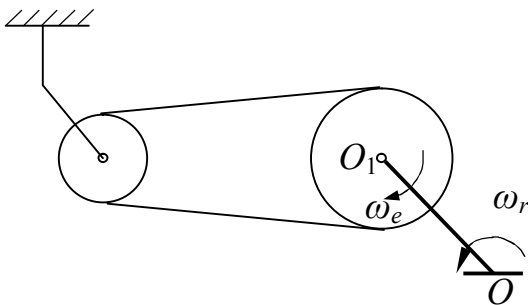


Рис. 10.11

В паре вращений относительно рамы участвует, например, педаль велосипеда (рис. 10.11). Действительно, кривошип OO_1 вращается относительно рамы велосипеда (основной системы отсчета) со скоростью ω_e , а педаль вращается относительно кривошипа (подвижной системы отсчета) с угловой скоростью ω_r . Угловые скорости равны и противоположны по направлению, поэтому движение педали относительно рамы будет поступательным.

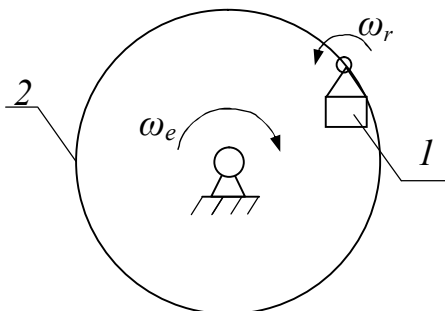


Рис. 10.12

С этих же позиций можно объяснить поступательное (относительно Земли) движение кабины 1 колеса обозрения (рис. 10.12). И в этом случае угловые скорости переносного и относительного движений равны по величине и противоположны по направлению.

Пример 10.2. В планетарном механизме шестерня 1 неподвижна, а кривошип OAB вращается с угловой скоростью ω_4 . Найти абсолютные угловые скорости шестерен 2 и 3, если $r_1 = r_2 = r_3$ (рис. 10.13).

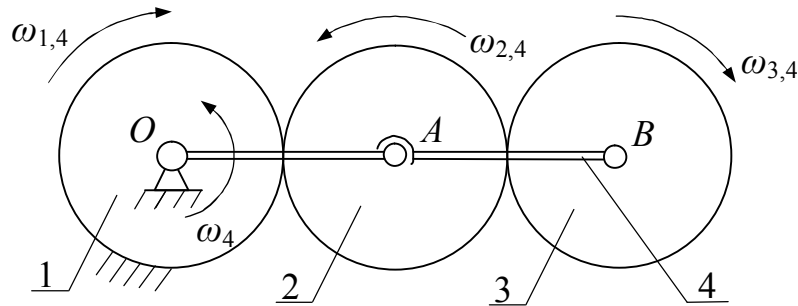


Рис. 10.13

Решение

Шестерни 2 и 3 совершают сложные движения, участвуя каждая в двух вращательных движениях. Составим схемы разложения движения (рис. 10.14).

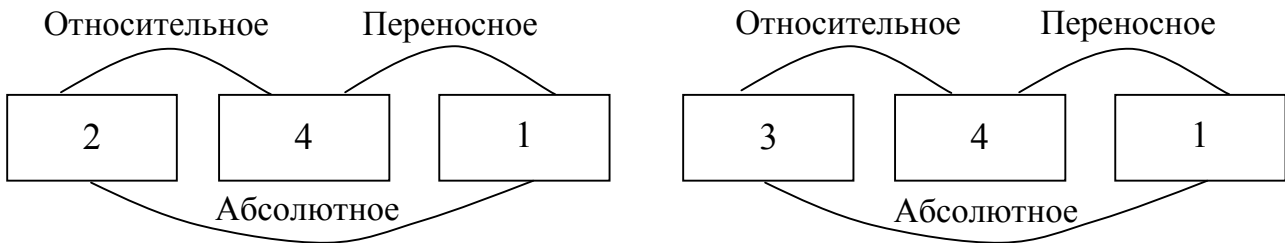


Рис. 10.14

Обозначим абсолютные угловые скорости их через ω_2 и ω_3 , а относительные по отношению к кривошипу — $\omega_{2,4}$ и $\omega_{3,4}$. Для нахождения относительных угловых скоростей применим метод остановки переносного движения (метод Виллиса). Сообщив всей системе угловую скорость ω_4 , направленную в сторону, противоположную вращению кривошипа, получим, что в относительном движении $\omega_{4,4} = 0$, $\omega_{1,4} = \omega_{2,4} = \omega_{3,4} = \omega_4$ (при одинаковых радиусах).

Абсолютная угловая скорость шестерни 2 с учетом одинакового направления переносного и относительного вращений $\omega_2 = \omega_4 + \omega_{2,4} = 2\omega_4$.

Абсолютная угловая скорость шестерни 3 с учетом разного направления переносного и относительного вращений $\omega_3 = \omega_4 - \omega_{3,4} = 0$, т.е. шестерня 3 участвует в паре вращений. Ее движение будет поступательным.

Случай 3. Переносное движение – поступательное, относительное движение – вращательное.

Рассмотрим сложное движение тела, состоящее из поступательного и вращательного движений. Примеры таких сложных движений: движение винта самолета, движение гайки по неподвижному винту, движение колеса автомобиля и т.д. Эти движения отличаются направлениями скорости \vec{v} переносного движения относительно оси относительного движения.

А. Винтовое движение ($\vec{v} \parallel \vec{\omega}$)

Рассмотрим, например, движение винта относительно неподвижной гайки. Это движение является сложным и состоит из поступательного со скоростью \vec{v} и вращательного со скоростью $\vec{\omega}$. В этом случае векторы \vec{v} и $\vec{\omega}$ коллинеарны. Когда векторы направлены в одну сторону, винт называют правым, в противоположные стороны – левым.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точки, лежащей на оси винта, называют шагом h винта. Если величины v и ω постоянны, то шаг также будет постоянным. Обозначив время одного оборота через T , получим $vT = h$, $\omega T = 2\pi$, откуда $h = 2\pi \frac{v}{\omega}$. Отношение $\frac{v}{\omega} = p$ называют параметром винта. Траекторией любой точки M тела, не лежащей на оси, будет винтовая линия.

Б. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси относительного вращения ($\vec{v} \perp \vec{\omega}$).

Рассмотрим, например, движение колеса автомобиля на прямолинейном участке пути (рис. 10.15,а).

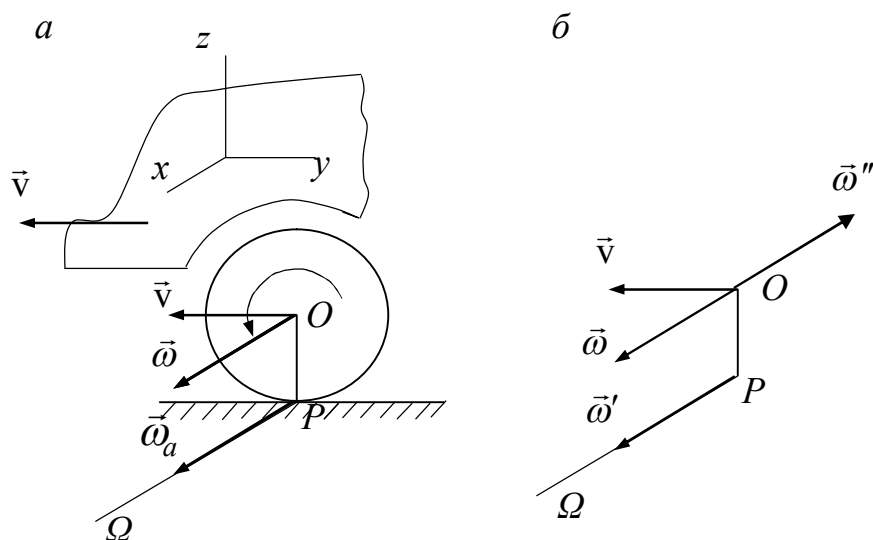


Рис. 10.15

Из рисунка видно, что скорость переносного движения – движение кузова вместе с осью колеса – будет перпендикулярна оси относительного вращения (движение относительно кузова).

Если условие $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ выполняется в течение некоторого промежутка времени, то траекториями точек тела будут плоские кривые и движение тела будет плоскопараллельным. Это движение тела будем подробно рассматривать в следующей главе, ибо плоское движение совершают многие детали машин и звенья механизмов.

Здесь же отметим только, что поле скоростей точек тела в абсолютном движении будет таким же, как и во вращательном движении, т.е. в абсолютном движении существует мгновенная ось вращения. Покажем это (см. рис. 10.15,б). Пусть колесо совершает указанное сложное движение: вращение вокруг оси, проходящей через точку O , и поступательное движение со скоростью \vec{v} . Вектор \vec{v} заменим парой угловых скоростей $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$ на основании теоремы о паре вращений, выбрав угловые скорости $\omega' = \omega'' = \omega$. Расстояние OP определяется из равенства $v = OP\omega'$, т.е. $OP = v/\omega$. Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ дают при сложении нуль и, следовательно, абсолютное движение будет вращательным вокруг мгновенной оси PQ с угловой скоростью, равной угловой скорости относительного вращения, т.е. $\omega_a = \omega$.

В. Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения.

Отметим, что аналогичную ситуацию мы имели в статике, рассматривая частные случаи приведения системы сил к простейшему виду, когда главный вектор \vec{R} образует произвольный угол с главным моментом \vec{M}_O (приведение к силовому или динамическому винту). Полезно подчеркнуть, что сила \vec{F} и угловая скорость $\vec{\omega}$ – скользящие векторы, а момент пары \vec{M} и скорость \vec{v} при поступательном движении – свободные векторы, если изучают абсолютно твердое тело.

На рис. 10.16 приведен знакомый из курса статики частный случай приведения системы сил к центру, допускающий упрощение эквивалентной системы сил.

На рис. 10.17 показано сложение поступательного и вращательного движений тела, когда абсолютным движением будет мгновенное винтовое движение. Пусть

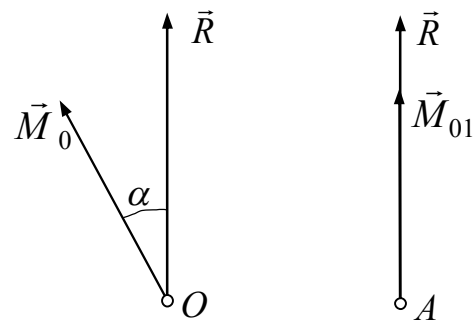


Рис. 10.16

скорость переносного поступательного движения образует произвольный угол α с осью вращения (рис. 10.17,а). Разложим вектор скорости \vec{v} на составляющие \vec{v}' и \vec{v}'' , направленные вдоль вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и перпендикулярно ему (рис. 10.17,б).

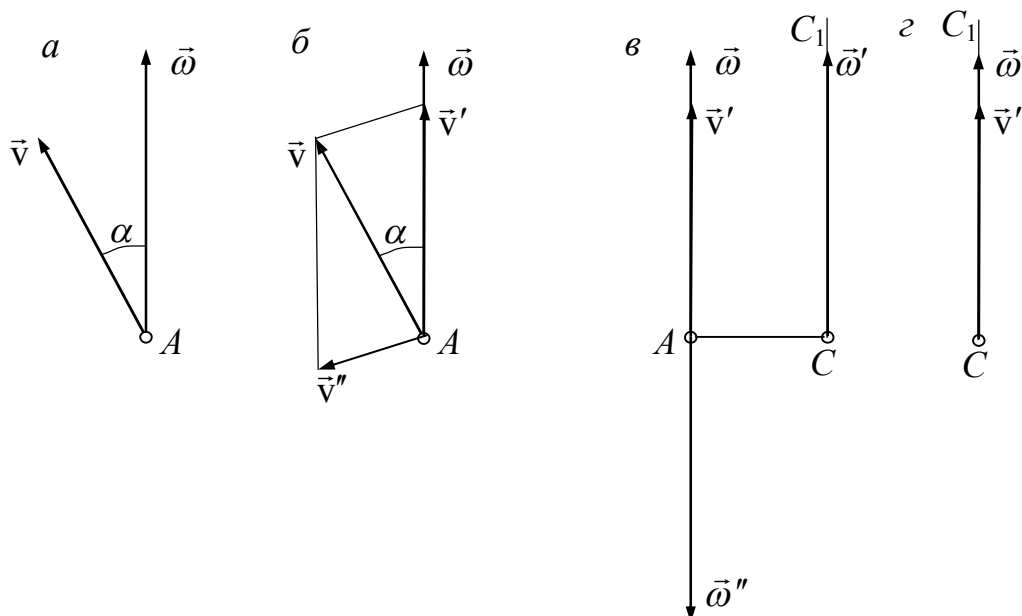


Рис. 10.17

При этом значения составляющих скоростей: $v' = v \cos \alpha$, $v'' = v \sin \alpha$. Заменим вектор \vec{v}'' парой угловых скоростей $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$, угловые скорости $\vec{\omega}, \vec{\omega}', \vec{\omega}''$ равны между собой по величине: $\omega' = \omega'' = \omega$ (рис. 10.17,в). Два вращения с угловыми скоростями $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ (равными по модулю и противоположными по направлению) эквивалентны покою. Остаются поступательное движение со скоростью \vec{v}' и вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ вокруг оси C_1C , причем вектор \vec{v}' как свободный вектор может быть перенесен в точку C (рис. 10.17,г). Тогда абсолютное движение тела будет мгновенным винтовым движением. Расстояние AC (аналогично статике) определяется по формуле

$$AC = \frac{v''}{\omega} = \frac{v \sin \alpha}{\omega}.$$

Теория сложного движения тела, рассмотренная в этой главе, использована в дальнейшем при изучении плоского движения (гл. 11), сферического движения и движения свободного твердого тела (гл. 12).

Вопросы для самопроверки

1. Скорость движения крана относительно здания цеха 3 м/с , скорость движения тележки относительно крана 4 м/с . Чему равна скорость тележки относительно здания цеха? Ответ поясните.
2. Что представляет собой абсолютное движение тела, участвующего в нескольких вращениях вокруг сходящихся мгновенных осей?
3. Как определяют угловую скорость твердого тела, вращающегося вокруг двух параллельных осей в одну и разные стороны?
4. Что называют парой вращений? Каким будет движение тела в этом случае? Чему равна скорость этого движения?
5. Какие понятия из статики аналогичны угловой скорости вращающегося тела и поступательной скорости тела?
6. Что называют параметром кинематического винта?
7. При каком взаимном расположении скорости переносного движения и оси относительного вращательного движения абсолютное движение будет плоскопараллельным, мгновенным винтовым?

Глава 11. Плоскопараллельное движение тела

В этой главе подробно рассматривается один из видов сложного движения тела – плоское, или плоскопараллельное движение.

Плоским движением тела называют такое движение его, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Вращение вокруг неподвижной оси является одним из частных случаев такого движения.

Плоское движение часто встречается в технике. Большинство механизмов имеют звенья, совершающие плоские движения. Такие механизмы называют плоскими. Примеры – планетарные редукторы, кривошипно-ползунные, кулисные и другие механизмы, используемые для преобразования и передачи движения.

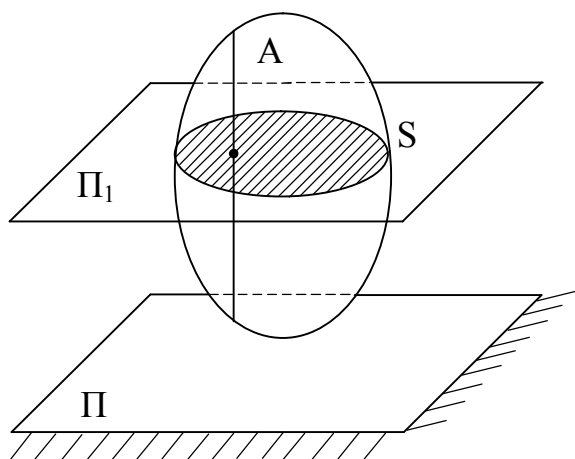


Рис. 11.1

Пусть тело A совершает плоское движение, параллельное плоскости Π (рис. 11.1). Рассечем тело плоскостью Π_1 , параллельной плоскости Π . В сечении получим плоскую фигуру S , которая во время движения тела будет оставаться в плоскости Π_1 . При плоском движении все точки тела, расположенные на перпендикуляре к сечению S , описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения, ибо

эта прямая движется параллельно своему первоначальному положению. Аналогично движение остальных точек плоской фигуры определяет движение перпендикулярных к фигуре прямых. Таким образом, плоское движение тела вполне определяется движением плоской фигуры в своей плоскости.

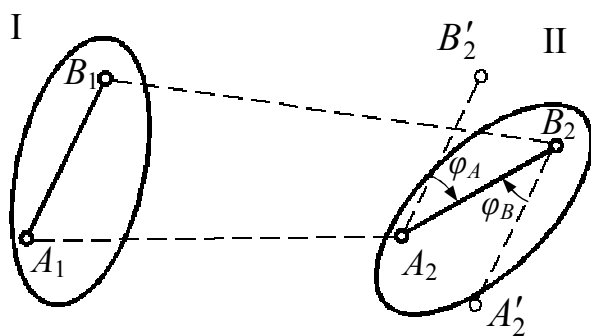


Рис. 11.2

Поскольку положение плоской фигуры на плоскости вполне определяется положением двух ее точек или положением отрезка, соединяющего эти точки, то движение плоской фигуры можно изучать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости (рис. 11.2).

11.1. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение плоского движения на простейшие движения

Начнем изучение движения плоской фигуры с установления способа задания движения. Пусть фигура S движется в плоскости xOy , AB – некоторый отрезок, выбранный на этой фигуре (рис. 11.3). Очевидно, положение этого отрезка можно задать тремя параметрами: x_A , y_A – координатами одной точки и φ – углом, который этот отрезок составляет с осью Ox .

При движении эти параметры изменяются и уравнения

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (11.1)$$

определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями плоского движения тела. Здесь $x_A(t)$, $y_A(t)$, $\varphi(t)$ – однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции времени.

Покажем, что плоское движение можно рассматривать как сложное движение, составленное из поступательного и вращательного движений. Введем подвижную систему Ax_1y_1 , которая движется поступательно вместе с произвольной точкой A тела. Эту точку будем называть полюсом. Составим схему разложения движения:



Относительное движение фигуры будет вращательным вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры S , проходящей через полюс. Переносное движение – поступательное вместе с полюсом.

Первые два уравнения из (11.1) определяют поступательное движение подвижной системы отсчета (движение полюса), а третье уравнение дает закон относительного вращательного движения. По первым двум

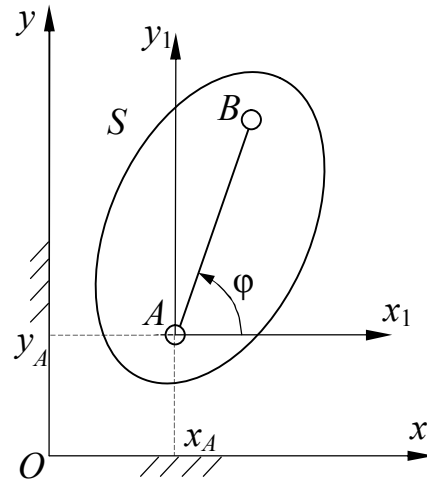


Рис. 11.3

уравнениям можно найти скорость и ускорение полюса, а по третьему – угловую скорость и угловое ускорение относительного вращения:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}, & \omega &= \dot{\varphi}, \\ \vec{a}_A &= \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j}, & \varepsilon &= \ddot{\varphi}.\end{aligned}\tag{11.2}$$

Нетрудно заметить, что поступательная часть плоского движения зависит от выбора полюса, а вращательная часть, т.е. φ , ω и ε , не зависит от этого выбора.

Действительно, траектории, скорости и ускорения точек плоской фигуры различны, т.к. движение фигуры непоступательное. Проведя через разные полюсы отрезки, жестко связанные с фигурой и параллельные между собой, получим, что все время при движении они, оставаясь параллельными между собой, будут составлять одинаковые углы с осью Ox .

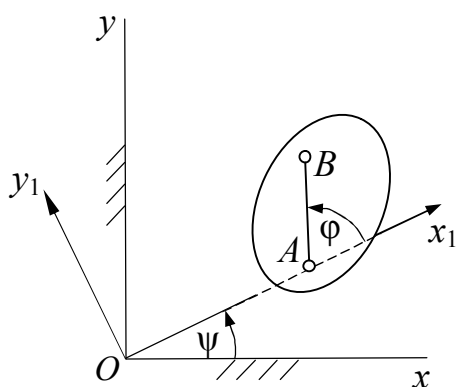


Рис. 11.4

Плоское движение тела можно составить и из двух вращательных движений, если подвижная система будет вращаться вокруг некоторой оси (рис. 11.4), что было рассмотрено в гл. 10.

Перейдем далее к изучению полей скоростей и ускорений точек тела, совершающего плоское движение.

11.2. Скорости точек плоской фигуры

Теорема. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Движение плоской фигуры будем рассматривать как сложное, составленное из переносного поступательного вместе с полюсом и относительного вращательного вокруг этого полюса. Тогда и любая точка плоской фигуры будет участвовать в этих двух движениях. Абсолютная скорость \vec{v}_B произвольной точки B фигуры на основании теоремы о сложении скоростей точки будет определяться как геометрическая сумма скоростей складываемых движений:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Но так как переносное движение поступательное, то переносная скорость \vec{v}_e любой точки равна скорости полюса $\vec{v}_e = \vec{v}_A$.

Относительное движение является вращательным. Обозначим скорость во вращательном движении \vec{v}_{BA} , т.е. скорость точки B во вращении вокруг полюса A . Тогда $\vec{v}_r = \vec{v}_{BA}$, причем $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$, $v_{BA} = \omega \cdot AB$ и вектор \vec{v}_{BA} направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону относительного вращения (рис. 11.5).

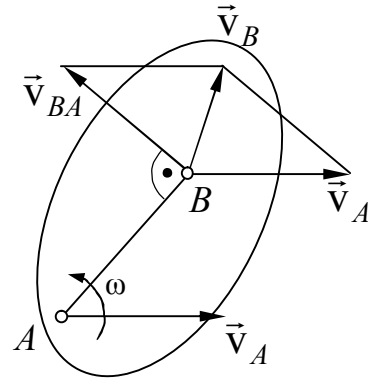


Рис. 11.5

Итак,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (11.3)$$

Эта формула дает распределение скоростей точек плоской фигуры.

Следствие. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой.

Это свойство скоростей двух точек твердого тела было доказано ранее для *любого* движения тела. Для плоского движения это свойство видно из рис. 11.6:

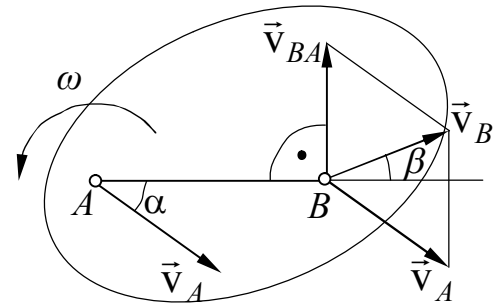


Рис. 11.6

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta. \quad (11.4)$$

11.3. Мгновенный центр скоростей (МЦС). Использование МЦС для определения скоростей точек

При непоступательном движении плоской фигуры существует единственная точка этой фигуры (или плоскости, жестко связанной с ней), у которой абсолютная скорость в данный момент времени равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей*.

Пусть точка A плоской фигуры выбрана полюсом (рис. 11.7), \vec{v}_A – скорость полюса, ω – угловая скорость плоской фигуры. Тогда скорость любой точки фигуры будет равна геометрической сумме скорости \vec{v}_A и вращательной скорости точки вокруг полюса. Проведем из точки A перпендикуляр к направлению скорости \vec{v}_A . Абсолютная скорость любой точки M этой прямой будет равна

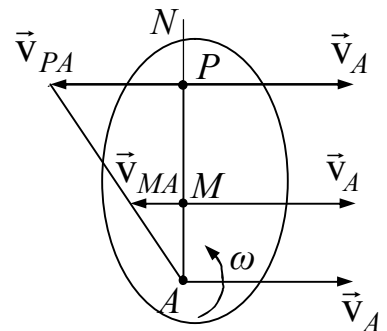


Рис. 11.7

алгебраической сумме двух скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_{MA} , т.к. эти векторы лежат на одной прямой:

$$v_M = v_A - v_{MA} = v_A - \omega \cdot AM.$$

Совершенно очевидно, что на этой полупрямой только у одной точки абсолютная скорость равна нулю. Обозначим эту точку буквой P . Тогда

$$v_{PA} = v_A = \omega \cdot AP, \quad \text{причем} \quad AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

У остальных точек плоской фигуры скорости отличны от нуля, т.к. на всех остальных прямых, проходящих через точку A , скорость полюса и скорость во вращательном движении вокруг полюса не лежат на одной прямой.

Точка P является мгновенным центром скоростей.

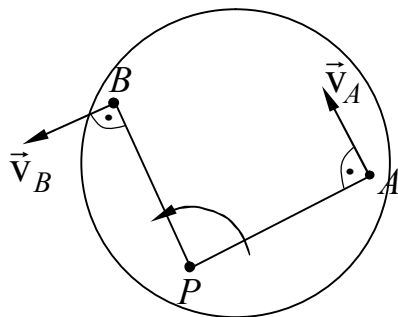


Рис. 11.8

Будем определять скорости точек плоской фигуры, приняв за полюс точку P (рис. 11.8). Тогда согласно (11.3)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}.$$

Поскольку $\vec{v}_P = 0$, следовательно, $\vec{v}_A = \vec{v}_{AP}$, $\vec{v}_B = \vec{v}_{BP}$ и т.д.

Итак, скорость любой точки фигуры при плоском движении определяется как в простом вращательном движении вокруг оси, проходящей через МЦС. Поле скоростей то-

чек плоской фигуры будет таким же, как и при вращении вокруг неподвижной оси. Отсюда следует:

1) $v_M = \omega \cdot MP$ – модуль скорости любой точки равен произведению угловой скорости фигуры на расстояние от рассматриваемой точки до мгновенного центра скоростей (МЦС);

2) скорости точек перпендикулярны расстояниям (отрезкам) до МЦС, т.е. $\vec{v}_M \perp MP$;

3) модули скоростей точек пропорциональны расстояниям до МЦС:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (11.5)$$

Рассмотрим различные случаи определения положения МЦС.

1. Известны скорость точки \vec{v}_A и угловая скорость тела ω . Положение МЦС определяется, как было показано выше: повернуть вектор \vec{v}_A на прямой угол в сторону вращения и отложить отрезок $AP = \frac{v_A}{\omega}$ (см. рис. 11.7).

2. Известны направления скоростей двух точек фигуры (см. рис. 11.8). Для определения положения МЦС нужно провести перпендикуляры к скоростям данных точек. Пересечение их и дает точку P (МЦС).

3. Если направления скоростей двух точек плоской фигуры параллельны, а перпендикуляры к ним сливаются, то для нахождения МЦС нужно знать модули этих скоростей. Тогда, используя свойство (11.5), можно построить точку P , как указано на рис. 11.9.

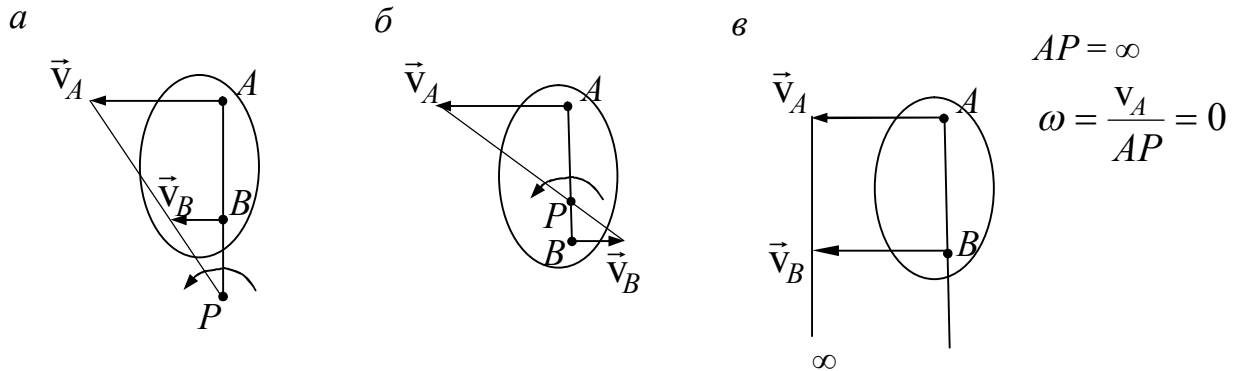


Рис. 11.9

4. Если скорости заданных точек параллельны, а перпендикуляры к ним также параллельны (не совпадают друг с другом), то в этом случае мгновенный центр скоростей находится в бесконечности (рис. 11.10). Угловая скорость плоской фигуры в этом случае равна нулю, $\omega = 0$, скорости точек равны по модулю, что следует из (11.4): $v_A \cos \alpha = v_B \cos \alpha$ и $v_A = v_B$. Следовательно, скорости и всех остальных точек плоской фигуры будут такими же: $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C \dots$

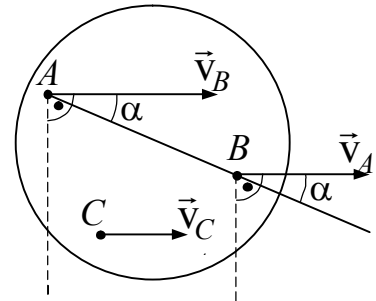


Рис. 11.10

Такое состояние плоской фигуры иногда называют *мгновенно поступательным*. При этом ускорения точек и траектории их будут различными.

5. Качение без скольжения по неподвижной поверхности, например колесо трамвая катится по рельсу без скольжения. В этом случае точка контакта плоской фигуры S с неподвижной кривой будет иметь скорость, равную нулю, $v_P = 0$, т.е. эта точка и будет мгновенным центром скоростей (рис. 11.11).

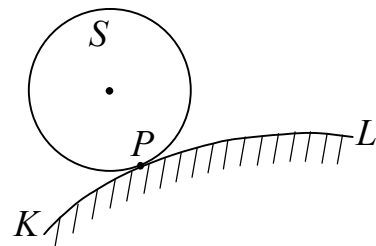


Рис. 11.11

Замечание. Слово *мгновенный* означает, что точка P является центром скоростей только для данного момента времени. В следующий момент уже другая точка фигуры будет иметь скорость, равную нулю. При непрерывном движении плоской фигуры МЦС (точка P) перемещается как по плоской фигуре, так и по неподвижной плоскости. Линии, по которым перемещается МЦС, называются подвижной и неподвижной центроидами, при этом подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения. Так, например, для катящегося без скольжения колеса трамвая неподвижной центроидой будет прямая линия, совпадающая с рельсом, а подвижной центроидой – окружность, совпадающая с ободом колеса. Рассмотрим далее простые примеры определения скоростей точек и угловой скорости при плоском движении тела.

Пример 11.1

Стержень движется так, что концы его скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найти скорость точки B и угловую скорость стержня для положения, когда $\varphi = 60^\circ$, если известно, что скорость точки A $v_A = 3$ м/с и $AB = l = 2$ м (рис. 11.12).

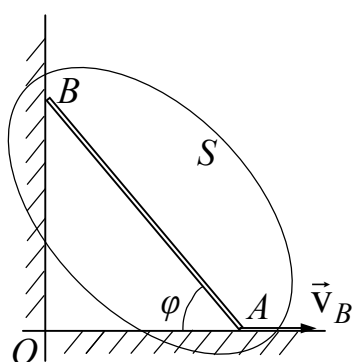


Рис. 11.12

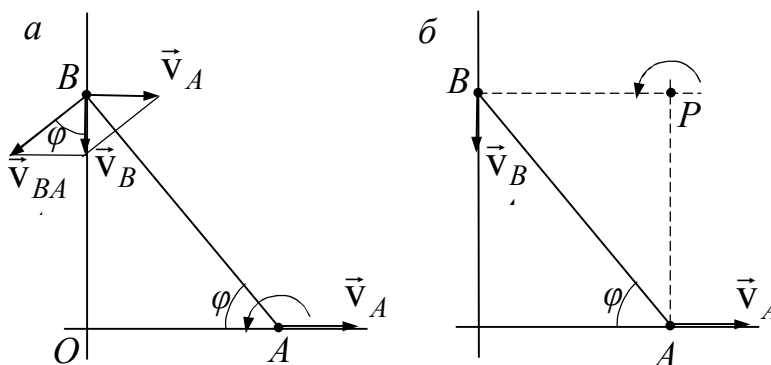


Рис. 11.13

Решение. Способ 1

Рассмотрим движение стержня как сложное, состоящее из поступательного движения вместе с полюсом A и вращательного вокруг этого полюса (рис. 11.13,а).

По теореме сложения скоростей для плоского движения (11.3) запишем скорость точки B и построим параллелограмм скоростей (рис. 11.13,а):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Проектируя это равенство на ось, проведенную через точки A и B , получаем согласно (11.4) равенство проекций скоростей:

$$v_B \cos(90^\circ - \varphi) = v_A \cos \varphi, \quad v_B = v_A \operatorname{ctg} \varphi.$$

Угловая скорость стержня определится по формуле

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}.$$

Способ 2

Построим мгновенный центр скоростей стержня, проведя перпендикуляры к направлениям скоростей точек A и B (рис. 11.13,б). Тогда движение стержня можно рассматривать как мгновенно вращательное вокруг точки P (МЦС) и $v_B = \omega \cdot BP$, $v_A = \omega \cdot AP$, откуда

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP} = \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$v_B = v_A \operatorname{ctg} \varphi = 3 \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ м/с}$$

$$\text{и} \quad \omega = \frac{v_A}{l \sin \varphi} = \frac{3}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ рад/с}.$$

Пример 11.2

Колесо радиусом $R = 0,25$ м катится без скольжения по прямолинейному рельсу, скорость центра колеса $v_C = 10$ м/с. Найти угловую скорость колеса, скорости точек M_1 и M_2 , находящихся на вертикальном и горизонтальном диаметрах, а также скорость точки M , положение которой задано углом φ (рис. 11.14).

Решение

Качение колеса по неподвижному рельсу проходит без скольжения, следовательно, точка P контакта обода с рельсом имеет нулевую скорость и является мгновенным центром скоростей. Тогда модули скоростей заданных точек определяются формулами

$$v_C = \omega \cdot CP, \quad v_1 = \omega \cdot M_1P, \quad v_2 = \omega \cdot M_2P \quad \text{и} \quad v_M = \omega \cdot MP,$$

$$\text{откуда} \quad \omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{10}{0,25} = 40 \text{ рад/с}; \quad v_1 = \omega \cdot 2R = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \omega R \sqrt{2} = 40 \cdot 0,25 \cdot \sqrt{2} \approx 14,1 \text{ м/с}; \quad v_M = \omega 2R \cos \varphi = 20 \cos \varphi.$$

Направления скоростей перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки с МЦС.

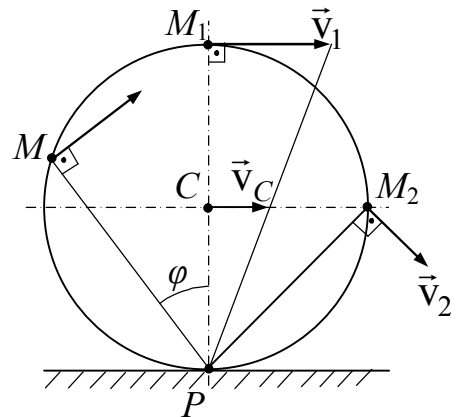


Рис. 11.14

11.4. Ускорения точек тела при плоском движении

Ускорения точек плоской фигуры можно найти так же, как и скорости, рассматривая движение фигуры, составленным из переносного движения (поступательное вместе с полюсом) и относительного (вращение вокруг полюса).

Теорема. Ускорение любой точки плоской фигуры при плоском движении равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Пусть точка A – полюс, \vec{a}_A – ускорение полюса, ω и ϵ – угловые скорость и ускорение фигуры. Точка B – произвольная точка фигуры (рис. 11.15,а). Найдем ее ускорение, используя теорему о сложении ускорений при сложном движении точки:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r,$$

кориолисово ускорение \vec{a}_c равно нулю, т.к. переносное движение поступательное. Переносное ускорение точки B $\vec{a}_e = \vec{a}_A$, т.к. в поступательном движении ускорения всех точек тела одинаковы. Относительное ускорение \vec{a}_r точки B при вращении вокруг полюса A обозначим \vec{a}_{BA} (рис. 11.15,б).

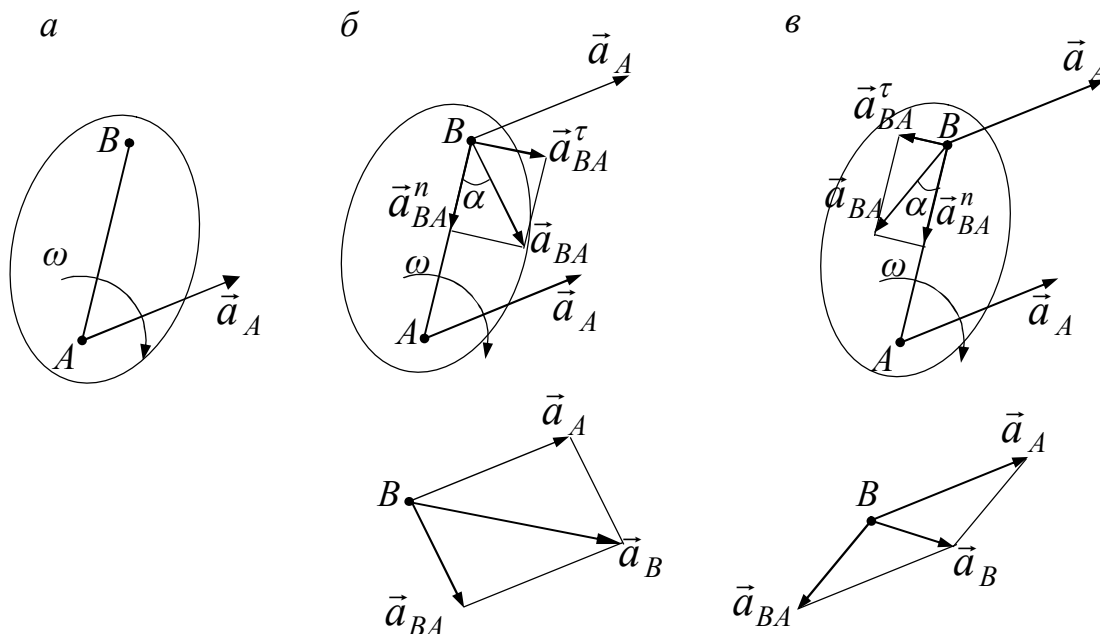


Рис. 11.15

Тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (11.6)$$

Ускорение \vec{a}_{BA} во вращательном движении вокруг полюса можно разложить на два ускорения: центростремительное (нормальное) и вращательное (касательное). Тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (11.7)$$

Модули ускорений a_{BA}^n , a_{BA}^τ и a_{BA} находим по известным формулам для вращательного движения тела:

$$a_{BA}^n = \omega^2 AB, \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB, \quad a_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Направления \vec{a}_{BA}^n , \vec{a}_{BA}^τ для случаев ускоренного и замедленного вращений показаны на рис. 11.15,б и 11.15,в. Ускорение \vec{a}_{BA} составляет с отрезком AB угол α , который можно определить, вычислив

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_{BA}^\tau|}{a_{BA}^n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Из этой формулы следует, что для всех точек плоской фигуры этот угол одинаков: ускорения в относительном вращательном движении составляют одинаковые углы с отрезками, соединяющими эти точки с полюсом.

Мгновенный центр ускорений (МЦУ)

Докажем, что в каждый момент времени у плоской фигуры (или плоскости, жестко с ней связанной) имеется единственная точка, ускорение которой равно нулю. Эту точку называют мгновенным центром ускорений. Обозначим ее буквой Q .

Пусть заданы ускорение полюса \vec{a}_A , угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры (рис. 11.16). Проведем полупрямую AC под углом α к вектору \vec{a}_A (повернем вектор \vec{a}_A в сторону вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону в противном случае), причем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$. На полученной полупрямой откладываем отрезок

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (11.8)$$

У полученной таким образом точки Q абсолютное ускорение равно нулю:

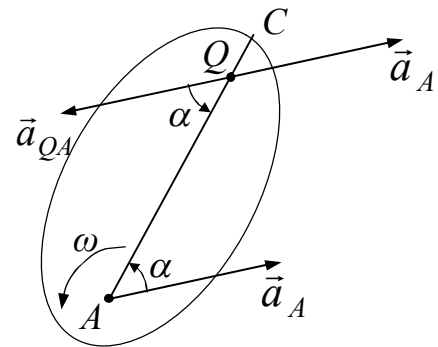


Рис. 11.16

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA},$$

$$a_Q = a_A - a_{QA} = a_A - AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0.$$

У всех других точек этой полупрямой сумма слагаемых ускорений будет отлична от нуля. У всех точек фигуры, не лежащих на прямой AC , ускорения не лежат на одной прямой, поэтому их сумма отлична от нуля.

Если при расчете ускорений точек плоской фигуры за полюс принять точку Q (МЦУ), то ускорения будут определяться так же, как в простом вращательном движении вокруг оси:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AQ} = \vec{a}_{AQ}, \text{ т.к. } \vec{a}_Q = 0; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{BQ} \text{ и т.д.}$$

Модули ускорений точек

$$a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}, \quad (11.9)$$

т.е. ускорения пропорциональны расстояниям до МЦУ. Векторы ускорений направлены под углом α к соответствующим отрезкам (рис. 11.17).

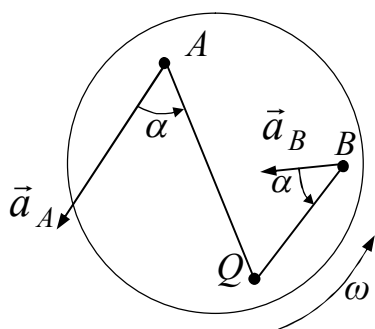


Рис. 11.17

Не следует смешивать МЦУ с МЦС: для каждого момента времени это *различные*, не совпадающие друг с другом, точки плоской фигуры. Так, например, для диска, катящегося без скольжения по прямолинейному отрезку с постоянной скоростью (равномерно), МЦУ находится в центре диска, а МЦС – в точке касания диска с опорной поверхностью.

Ускорения точек плоской фигуры при плоском движении подобно скоростям точек можно определять двумя путями: 1) по формуле, выражающей зависимость ускорений двух точек и 2) с помощью МЦУ. Обычно МЦУ, кроме некоторых частных случаев, располагается на плоской фигуре так, что трудно производить вычисления расстояний от точек до него. Поэтому в большинстве практических задач определение ускорений производят по теореме о связи ускорений двух точек фигуры (без использования МЦУ).

Основные способы определения угловой скорости и углового ускорения при плоском движении

Во многих задачах кинематики плоского движения приходится предварительно определять угловую скорость ω и угловое ускорение ε плоских

фигур, а затем уже вычислять скорости и ускорения точек. Рассмотрим основные, наиболее часто встречающиеся способы определения ω и ε .

1. Если задан закон вращательного движения плоской фигуры $\varphi = \varphi(t)$, то

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}.$$

2. Если известны скорость и ускорение точки A и положение МЦС (точки P), то

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_A}{AP}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{AP} \cdot \frac{dv_A}{dt} + v_A \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{AP} \right), \\ \varepsilon &= \frac{a_{A\tau}}{AP} + v_A \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{AP} \right). \end{aligned} \quad (11.10)$$

В частном случае, когда $AP = \text{const}$ – расстояние до МЦС не меняется в процессе движения, угловое ускорение определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{AP} \cdot a_{A\tau}. \quad (11.11)$$

Это выполняется, например, при качении без скольжения дисков по неподвижной поверхности (колес, шестерен).

3. Угловую скорость можно найти по относительной скорости точки во вращении вокруг полюса (без МЦС):

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB}, \quad (11.12)$$

где A и B – две любые точки плоской фигуры.

Аналогично можно получить и угловое ускорение ε :

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}. \quad (11.13)$$

Относительное ускорение a_{BA}^τ можно в некоторых случаях получить проектированием векторного равенства, связывающего ускорения двух точек фигуры. Далее покажем этот прием в примере 11.4.

Пример 11.3

Центр колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без проскальзывания, имеет в данный момент времени скорость $v_0 = 1$ м/с и ускорение $a_0 = 2$ м/с². Радиус колеса $R = 0,2$ м. Определить ускорения точек A и P (рис. 11.18,а).

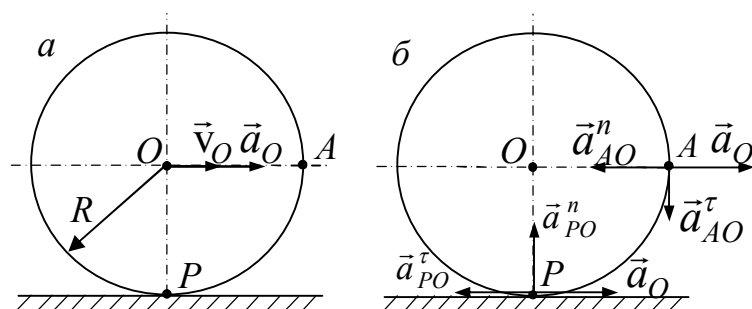


Рис. 11.18

Решение

Рассмотрим плоское движение колеса. Поскольку качение по неподвижной поверхности происходит без скольжения, то точка P – МЦС. Определим вначале ω и ε колеса. Угловая скорость колеса ω определяется формулой

$$\omega = \frac{v_0}{OP}; \quad \omega = \frac{v_0}{R}, \quad \omega = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ рад/с.}$$

Поскольку расстояние от точки O колеса до точки P (МЦС) остается неизменным ($OP = R$) при движении, то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{OP} \right); \quad \varepsilon = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_0}{dt} = \frac{a_0}{R}; \quad \varepsilon = \frac{2}{0,2} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Не следует думать, что если по условию задачи $v_0 = 1$ м/с, то величина v_0 – постоянна. Значение v_0 дано в условии для заданного момента времени, с течением же времени v_0 изменяется, т.к. $a_0 \neq 0$; в данном случае $\frac{dv_0}{dt} = a_0$, т.к. движение точки O – прямолинейное, в общем случае $\frac{dv_0}{dt} = a_{0\tau}$ равно касательному ускорению полюса.

Приняв точку O за полюс, найдем ускорения точек A и P , используя формулу (11.7):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^\tau,$$

где a_0 – задано;

$$a_{AO}^n = \omega^2 AO = 5^2 \cdot 0,2 = 5 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{AO}^\tau = \varepsilon \cdot AO = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим векторы на рисунке 11.18,б и построим в масштабе многоугольник ускорений. Определим модуль ускорения \vec{a}_A координатным способом.

$$a_{Ax} = a_O - a_{AO}^n = 2 - 5 = -3;$$

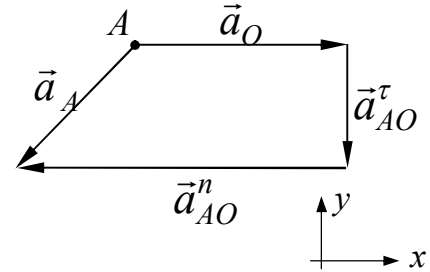
$$a_{Ay} = -a_{AO}^\tau = -2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{9 + 4} \approx 3,6 \text{ м/с}^2.$$

Аналогично вычисляем \vec{a}_P

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{a}_{PO}^n + \vec{a}_{PO}^\tau, \quad a_{PO}^\tau = \varepsilon \cdot OP = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{PO}^n = \omega^2 \cdot OP = 5 \text{ м/с}^2.$$



Построив векторы (рис. 11.18,б), видим, что сумма векторов \vec{a}_O и \vec{a}_{PO}^τ равна нулю и $\vec{a}_P = \vec{a}_{PO}^n$; $a_P = 5 \text{ м/с}^2$ и направлено по радиусу OP к центру колеса. Получим, что ускорение точки P (МЦС) не равно нулю.

Пример 11.4

Колесо 1 радиуса 0,5 м катится без скольжения с постоянной скоростью 2 м/с по горизонтальной плоскости. К колесу шарниром в точке A прикреплен стержень 2, который скользит по этой плоскости. Определить в указанном положении системы (рис. 11.19) угловую скорость и угловое ускорение стержня, скорость и ускорение точки B .

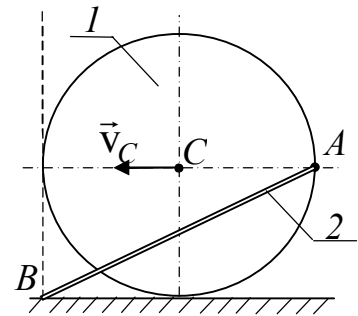


Рис. 11.19

Решение. Проведем вначале расчет скоростей. Колесо катится по неподвижной плоскости без скольжения, поэтому точка P_1 является его мгновенным центром скоростей (рис. 11.20, а). Тогда угловая скорость колеса

$$\omega_1 = \frac{v_C}{CP_1} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ рад/с, причем } \omega_1 = \text{const, т.к. } v_0 \text{ и } CP_1 = R \text{ не зависят от}$$

времени. Скорость точки A $v_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4 \cdot 0,5\sqrt{2} \approx 2,83 \text{ м/с}$.

Стержень движется в вертикальной плоскости и его МЦС – точку P_2 – можно построить, проведя перпендикуляры к скоростям точек A и B . Тогда $BP_2 = BP_1 = R$; $AP_2 = 2AP_1$.

$$\text{Угловая скорость стержня } \omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{\omega_1 AP_1}{AP_2} = 0,5\omega_1 = 2 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B $v_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}$ в указанном положении системы.

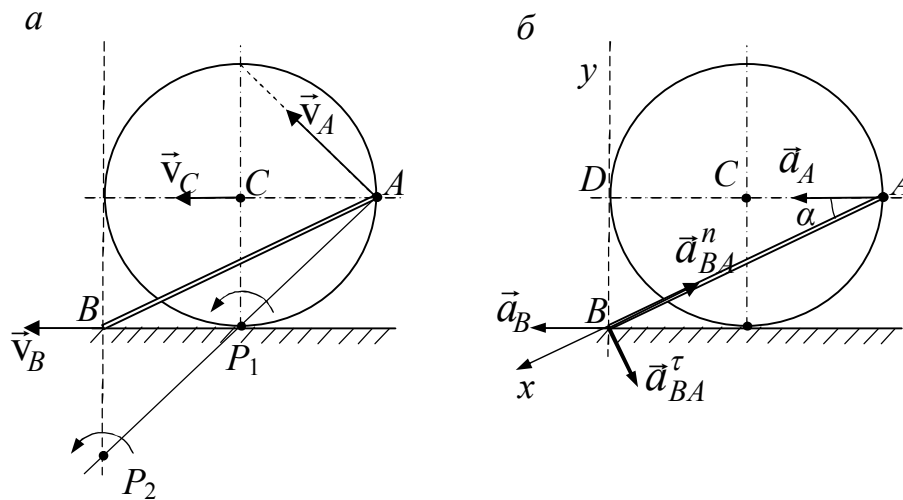


Рис. 11.20

Найдем далее ускорение точки B и угловое ускорение ε_2 стержня. Ускорение точки A колеса определим по формуле (11.7):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^\tau,$$

но $a_C = 0$, $a_{CA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot R = 0$, т.к. колесо катится равномерно и величины v_C и ω_1 – постоянные по условию задачи.

Тогда $a_A = a_{AC}^n = \omega_1^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ м/с}^2$ и направлено к центру колеса (рис. 11.20, б).

Ускорение точки B стержня также по (11.7)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (11.14)$$

где $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB$, $AB = \sqrt{R^2 + (2R)^2} = 0,5\sqrt{5}$ и $a_{BA}^n = 2^2 \cdot 0,5\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \text{ м/с}^2$.

Проектируя уравнение (11.14) на ось Ax , получаем

$$a_B \cos \alpha = a_A \cos \alpha - a_{BA}^n,$$

где $\cos \alpha = \frac{AD}{AB}$ из $\triangle ADB$ и, следовательно, $a_B \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$, откуда $a_B = 3 \text{ м/с}^2$.

Проектируя уравнение (11.14) на вертикальную ось By , вычислим a_{BA}^τ : $0 = a_{BA}^n \sin \alpha - a_{BA}^\tau \cos \alpha$, $a_{BA}^\tau = a_{BA}^n \cdot \tan \alpha = 2\sqrt{5} \cdot 0,5 = \sqrt{5} \text{ м/с}^2$.

Угловое ускорение ε_2 стержня найдем по формуле (11.13):

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{0,5\sqrt{5}} = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Пример 11.5

Стержень 1 длины $l = 0,2$ м вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 4$ рад/с и приводит в движение шарнирно соединенный с ним стержень 2, который проходит через кулису 3. Определить для заданного положения механизма угловую скорость и угловое ускорение стержня 2, а также скорость и ускорение точки B , если $AC = CB$ (рис. 11.21).

Решение. Проведем вначале расчет скоростей. Скорость точки A вращающегося стержня $v_A = \omega_1 l = 4 \cdot 0,2 = 0,8$ м/с. Стержень 2 совершает плоское движение, известны направления скоростей двух его точек A и C , по которым строим МЦС (точку P), показанный на рис. 11.22,а. Тогда

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{0,8}{0,8} = 1 \text{ рад/с}$$

$$\text{и } v_B = \omega_2 BP = 0,8 \text{ м/с,}$$

т.к. $AP = AB = BP = 0,8$ м. Скорость точки C находим по теореме о проекциях скоростей двух точек (11.4):

$$v_A \cos 30^\circ = v_C, \quad v_C = 0,4\sqrt{3} \approx 0,69 \text{ м/с.}$$

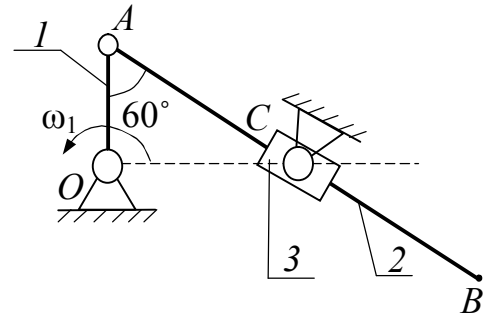


Рис. 11.21

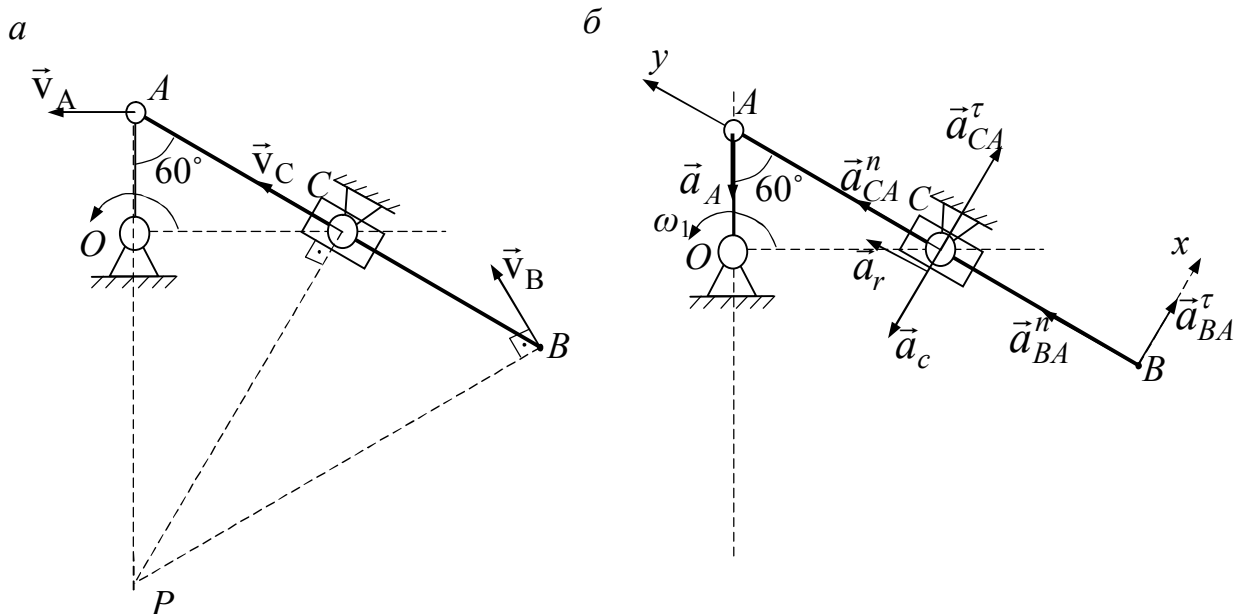


Рис. 11.22

Расчет ускорений. Ускорение точки A для стержня OA будет равно нормальному ускорению, т.к. вращение равномерное:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l = 4^2 \cdot 0,2 = 3,2 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки B записываем по формуле (11.7):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + a_{BA}^\tau,$$

где $a_{BA}^n = \omega_2^2 AB = 1^2 \cdot 0,8 = 0,8 \text{ м/с}^2$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 AB$, причем ε_2 – неизвестная величина.

Проектируя на оси Bx и By (рис. 11.22,б), получаем

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= -a_A \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau, \\ a_{By} &= -a_A \cos 60^\circ + a_{BA}^n. \end{aligned} \quad (11.15)$$

В двух уравнениях (11.15) имеем три неизвестных: a_{Bx} , a_{By} и a_{BA}^τ .

Для получения дополнительных уравнений рассмотрим точку C стержня AB , совпадающую с осью вращения кулисы 3. Ее ускорение можно записать аналогично ускорению точки B :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau, \quad (11.16)$$

где $a_{CA}^n = \omega_2^2 AC = 1^2 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ м/с}^2$, $a_{CA}^\tau = \varepsilon_2 AC$.

Если спроектировать (11.16) на координатные оси, то добавятся еще две неизвестные a_{Cx} и a_{Cy} и уравнений недостаточно для решения. Поэтому ускорение точки C определим еще *другим способом*, используя сложное движение точки. Введем подвижную систему координат, связав ее с кулисой. Тогда движение точки C можно сложить из относительного вдоль кулисы и переносного вместе с ней. Скорость и ускорение этой точки определяются теоремами $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$.

Переносная скорость и переносное ускорение равны нулю, т.к. точка C находится на оси переносного вращения. Тогда $\vec{v}_C = \vec{v}_a = \vec{v}_r$, $\vec{a}_C = \vec{a}_r + \vec{a}_c$.

Относительное ускорение a_r направлено вдоль стержня, кориолисово ускорение определяется по формуле $a_c = 2\omega_3 \cdot v_r \sin 90^\circ$, где $\omega_3 = \omega_2$. Направлено ускорение a_c по правилу Жуковского перпендикулярно AC (см. рис. 11.22,б). Составим векторное уравнение:

$$\vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + a_{CA}^\tau = \vec{a}_r + \vec{a}_c. \quad (11.17)$$

Проектируя (11.17) на оси Bx и By , получаем

$$\begin{aligned} -a_A \sin 60^\circ + a_{CA}^{\tau} &= -a_c, \\ -a_A \cos 60^\circ + a_{CA}^n &= a_r. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Из первого уравнения (11.18) находится угловое ускорение ε_2 :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{AC} [a_A \sin 60^\circ - 2\omega_2 v_C] = \frac{1}{0,4} \left[3,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 1 \cdot 0,4\sqrt{3} \right] = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ рад/с}^2.$$

Из второго уравнения определяется относительное ускорение a_r :

$$a_r = -3,2 \cdot 0,5 + 0,4 = -1,2 \text{ м/с}^2.$$

Подставив вычисленное значение ε_2 в (11.15), найдем ускорение точки B :

$$a_{Bx} = -a_A \sin 60^\circ + \varepsilon_2 \cdot AB = -3,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \cdot 0,8 = 0,$$

$$a_{By} = -a_A \cos 60^\circ + \omega_2^2 \cdot AB = -3,2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,8 = -0,8.$$

Итак, ускорение точки B $a_B = 0,8 \text{ м/с}^2$ и направлено вдоль стержня AB .

Вопросы для самопроверки

1. Какими будут переносное и относительное движения в случае плоского движения тела? Как можно представить плоское движение, если за полюс принять мгновенный центр скоростей?
2. Какие кинематические характеристики плоского движения зависят от выбора полюса, какие – не зависят?
3. В кривошипно-ползунном механизме (рис. 11.23) кривошип OA вращается с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10 \text{ рад/с}$. Длины кривошипа OA и шатуна AB соответственно $OA = 0,2 \text{ м}$, $AB = 1 \text{ м}$. Для положений механизма, показанных на рис. 11.23,а,б, определить скорость точки B и угловую скорость шатуна AB .
4. На рис. 11.23,а скорость точки B равна скорости точки A . Будут ли равны их ускорения? На рис. 11.23,б скорость точки B равна нулю. Будет ли равно нулю ускорение точки B ?
5. Полагая, что кривошип OA вращается равномерно, определить ускорение ползуна B для положений механизма, показанных на рис. 11.23,а, а также положение мгновенного центра ускорений для шатуна AB (рис. 11.23,б).

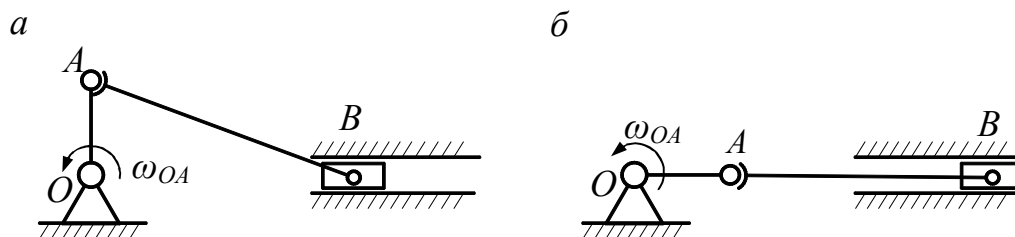


Рис. 11.23

6. Какие существуют способы определения угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры?
7. Будет ли равно нулю ускорение мгновенного центра скоростей при плоском движении тела?
8. В примере 11.4 определите положения мгновенных центров ускорений для катка и для стержня.

Глава 12. Сферическое движение тела. Движение свободного тела

Рассмотрим движение твердого тела, когда одна из точек его неподвижна (закреплена). Примеры такого движения: движение волчка, конуса, катящегося по боковой поверхности другого конуса (рис. 12.1), и т.д. При

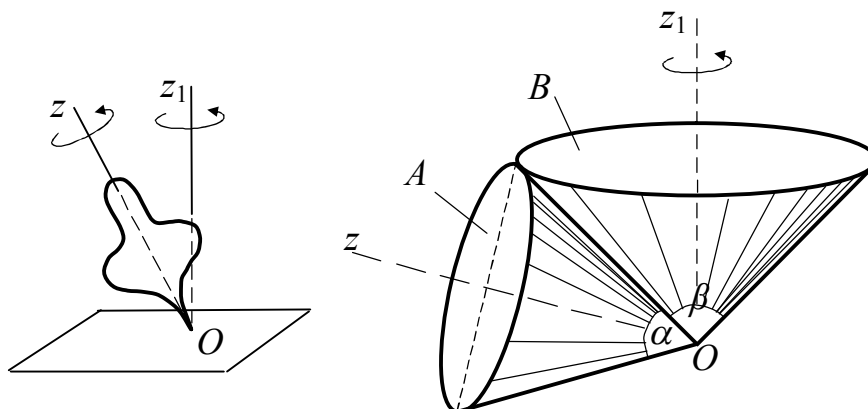


Рис. 12.1

таком движении все остальные точки тела движутся по сферам, центры которых находятся в закреплённой точке тела. Поэтому такое движение называют сферическим, или вращением вокруг неподвижной точки.

12.1. Уравнение сферического движения тела. Углы Эйлера

Для определения положения тела возьмем две системы координат: неподвижную $Ox_1y_1z_1$ и подвижную $Oxyz$, жестко связанную с телом. Начало координат этих систем совместим с неподвижной точкой тела (рис. 12.2).

Положение тела относительно неподвижной системы полностью определяется положением подвижной системы относительно неподвижной. Из аналитической геометрии известно, что направляющие косинусы координатных осей подвижной системы (их девять) связаны шестью соотношениями и независимых из них будет три, следовательно, положение тела определяется тремя параметрами.

Можно провести и другое рассуждение: положение тела можно определить двумя точками A и B , не лежащими на одной прямой с неподвижной точкой O тела. Их положение определяется шестью декартовыми координатами, связанными тремя уравнениями – расстояния между точками в теле остаются постоянными. Поэтому независимых координат будет три и тело с закреплённой точкой имеет три степени свободы. Для оп-

ределения положения тела чаще всего используют углы Эйлера: ψ , θ , φ , (рис. 12.2).

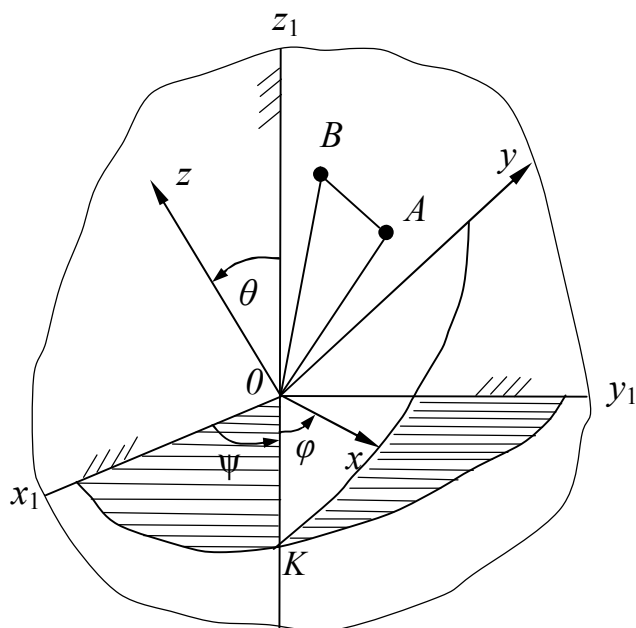


Рис. 12.2

Отметим линию пересечения плоскостей x_1Oy_1 и xOy — ее называют линией узлов OK — и введем углы: ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения. Названия углов взяты из астрономии. Направления отсчета углов показаны на рисунке. Все девять направляющих косинусов подвижных осей с неподвижными выражаются через тригонометрические функции этих углов.

Когда тело с одной закрепленной точкой движется, углы Эйлера изменяются. Уравнениями сферического движения тела будут зависимости

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (12.1)$$

В частном случае, если будет изменяться только один из углов, например $\varphi = f(t)$, $\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, то тело будет вращаться вокруг неподвижной оси Oz .

В основе теории сферического движения тела лежат теоремы о его перемещении. Согласно одной из них, доказанной Эйлером в 1770 году, любое перемещение тела с одной неподвижной точкой можно осуществить посредством трех вращений (поворотов) вокруг осей, проходящих через неподвижную точку (например, вокруг Oz_1 — на угол ψ , вокруг линии узлов OK — на угол θ и Oz — на угол φ). Ранее при изучении темы сложное движение тела (см. гл. 10) было показано, что при сложении вращений вокруг пересекающихся осей абсолютное движение тела будет вращательным вокруг мгновенной оси. Угловая скорость абсолютного

движения будет равна геометрической сумме угловых скоростей складываемых вращений. В случае сферического движения, рассматриваемого как совокупность трех вращений вокруг осей Oz_1 , OK и Oz (рис 12.3, а, б),

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3, \quad (12.2)$$

где $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\theta}$, $\omega_3 = \dot{\phi}$. Следовательно, в каждый момент времени существует мгновенная ось вращения, проходящая через неподвижную точку O , на которой и будет расположен вектор $\vec{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости тела (рис. 12.4).

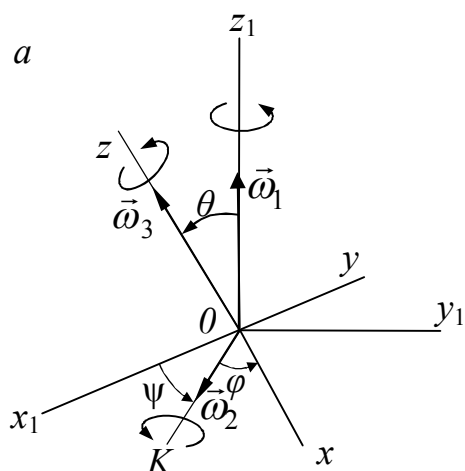


Рис. 12.3

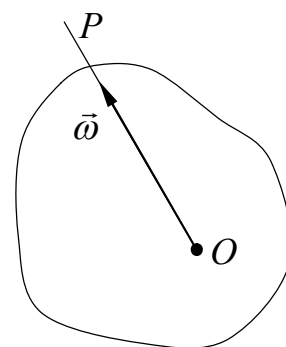
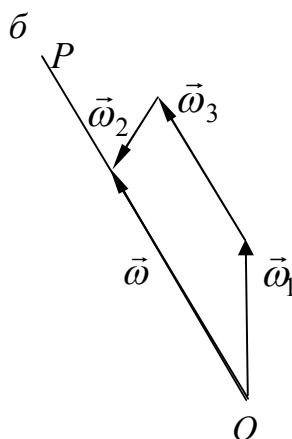


Рис. 12.4

12.2. Угловая скорость при сферическом движении тела

Итак, в каждый момент времени при сферическом движении тела существует мгновенная ось вращения OP , на которой может быть построен вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$. В каждый момент времени элементарное перемещение тела с неподвижной точкой можно рассматривать как элементарный поворот вокруг оси OP . Поскольку в каждый последующий момент времени мгновенная ось будет занимать новое положение, то вектор $\vec{\omega}$ в общем случае будет менять свое направление и модуль. При движении тела конец вектора $\vec{\omega}$, отложенного от неподвижной точки, будет перемещаться по линии, называемой годографом угловой скорости (рис. 12.5).

Геометрическое место мгновенных осей в пространстве образует коническую поверхность с вершиной в неподвижной – неподвиж-

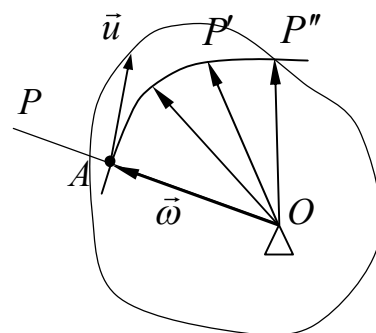


Рис. 12.5

ный аксоид. Геометрическое место мгновенных осей в пространстве, связанном с телом, образует подвижный аксоид. При сферическом движении тела происходит качение одного аксоида по другому. Аналогичная картина была рассмотрена при плоскопараллельном движении тела – качение подвижной центроиды по неподвижной.

Мгновенную угловую скорость $\vec{\omega}$ можно определить по проекциям на координатные оси – подвижные или неподвижные. Спроектировав равенство (12.2) на оси координат подвижной системы $Oxyz$, получим

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_1 \sin \theta \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \omega_1 \sin \theta \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \omega_3 + \omega_1 \cos \theta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{12.3}$$

Проектируя аналогично (12.2) на неподвижные оси координат, получаем

$$\begin{aligned}\omega_{x1} &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y1} &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z1} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{12.4}$$

Полученные формулы для проекций вектора $\vec{\omega}$ называют кинематическими формулами Эйлера. Возводя в квадрат и складывая, получаем

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_{x1}^2 + \omega_{y1}^2 + \omega_{z1}^2.$$

Подставив вычисленные проекции, находим модуль мгновенной угловой скорости тела

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta}.\tag{12.5}$$

12.3. Угловое ускорение при сферическом движении тела

Угловое ускорение тела определим как производную по времени от вектора угловой скорости

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.\tag{12.6}$$

Производная по времени от вектора $\vec{\omega} = \vec{OA}$ (см. рис. 12.5) является скоростью точки А в ее движении по годографу угловой скорости, т.е.

$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OA}) = \vec{u}$. Построив в точке O вектор $\vec{\varepsilon} = \vec{u}$, получим, что угловое ускорение лежит на прямой OQ , которую назовем осью мгновенного углового ускорения (рис. 12.6). Как видим, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не лежат на одной прямой, т.к. изменяется направление угловой скорости при движении тела.

Если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не прямой, то можно разложить угловое ускорение на два вектора (рис. 12.7):

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2. \quad (12.7)$$

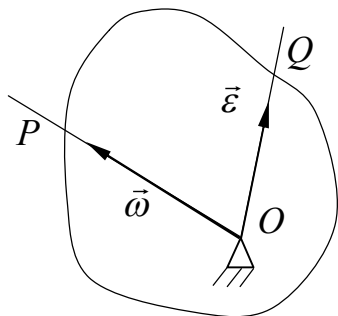


Рис. 12.6

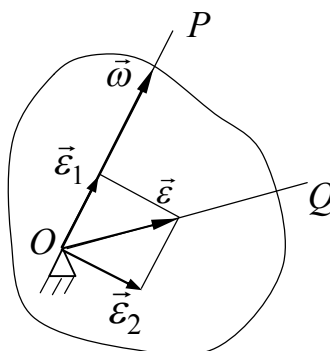


Рис. 12.7

Вектор $\vec{\varepsilon}_1$, направленный по вектору $\vec{\omega}$, характеризует изменение численного значения (модуля) угловой скорости и равен производной от модуля угловой скорости $\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt}$ по времени. Вектор $\vec{\varepsilon}_2$ является характеристикой изменения направления вектора $\vec{\omega}$ и направлен перпендикулярно мгновенной оси OP .

Угловое ускорение можно найти и аналитически, используя формулы (12.4). Проекции вектора $\vec{\varepsilon}$ на неподвижные оси координат определяются как производные по времени от соответствующих проекций угловой скорости:

$$\varepsilon_{x1} = \dot{\omega}_{x1}, \quad \varepsilon_{y1} = \dot{\omega}_{y1}, \quad \varepsilon_{z1} = \dot{\omega}_{z1}. \quad (12.8)$$

Модуль углового ускорения $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{x1}^2 + \varepsilon_{y1}^2 + \varepsilon_{z1}^2}$.

Пример 12.1. Диск радиуса R приводится в движение горизонтальным кривошипом OC длины l , вращающимся вокруг вертикальной оси по

закону $\psi = at^2$ (рис. 12.8). Определить угловую скорость и угловое ускорение диска при его движении без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости в момент времени $t = 1$ с.

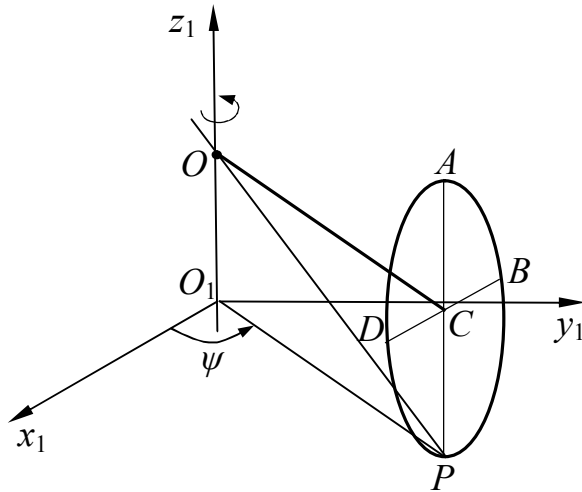


Рис. 12.8

Решение. Способ 1

Движение диска является сложным и его можно составить из переносного движения – вращения вокруг вертикальной оси Oz_1 с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\psi}$ и относительного движения – вращения вокруг подвижной оси OC с угловой скоростью ω_2 . Эти оси перпендикулярны и пересекаются в неподвижной точке O . Поскольку диск катится по неподвижной плоскости без проскальзывания, то скорость точки контакта $v_p = 0$ и, следовательно,

прямая, проходящая через две неподвижные точки O и P , будет мгновенной осью сферического движения диска (рис. 12.9). Построим векторы угловых скоростей переносного и относительного вращений, учитывая направления движений. Тогда угловая скорость диска

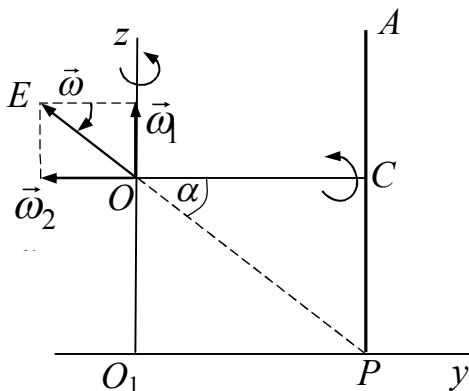


Рис. 12.9

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin \alpha},$$

где $\omega_1 = \dot{\psi} = 2at$ и $\sin \alpha = \frac{CP}{OP} = \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}$.

Следовательно,

$$\omega = \frac{2a\sqrt{l^2 + R^2}}{R} t.$$

Определим угловое ускорение диска $\vec{\varepsilon}$.

Поскольку угловая скорость $\vec{\omega}$ изменяется и по модулю, и по направлению, то со-

гласно (12.7) $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$, где $\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt}$ и $\varepsilon_2 = \omega_1 \cdot \omega \cos \alpha = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha$. Эти формулы получены как скорость конца вектора $\vec{\omega}$, т.е. точки E (см. рис. 12.9), в движении по годографу угловой скорости.

Подставив данные, получим $\varepsilon_1 = \frac{\ddot{\psi}}{\sin \alpha} = \frac{2a\sqrt{l^2 + R^2}}{R}$ и $\varepsilon_2 = \dot{\psi}^2 \frac{l}{R}$.

Окончательно $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$.

$$\varepsilon = \frac{2a}{R} \sqrt{l^2 + R^2 + 4a^2 l^2 t^4}.$$

Способ 2

Диск вращается вокруг неподвижной точки O (см. рис. 12.8). Опишем его сферическое движение с помощью углов Эйлера. Подвижную систему осей $Oxyz$, связанную жестко с диском, выбираем следующим образом: оси Ox и Oy возьмем в вертикальной плоскости, параллельной диску и проходящей через точку O , а ось Oz направим вдоль стержня OC .

Тогда линия узлов OK (рис. 12.10) перпендикулярна стержню OC и уравнениями движения будут зависимости

$$\psi = at^2 - \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \text{const} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{l}{R} at^2.$$

Последнее уравнение получено из условия равенства нулю скорости точки P , где диск касается неподвижной

плоскости ($\dot{\psi}l = R\dot{\varphi}$).

Угловую скорость диска можно вычислить по кинематическим формулам Эйлера (12.3) или (12.4).

Из уравнений движения имеем

$$\dot{\psi} = 2at, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{2al}{R} t.$$

Подставив эти значения, например, в (12.4), получим $\omega_{x1} = \dot{\varphi} \sin \psi$,

$$\omega_{y1} = -\dot{\varphi} \cos \psi, \quad \omega_{z1} = \dot{\psi}.$$

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2} = 2\frac{a}{R} t \sqrt{R^2 + l^2}.$$

Угловое ускорение диска можно найти по проекциям на неподвижные оси координат, используя (12.8):

$$\varepsilon_{x1} = \dot{\omega}_{x1} = \ddot{\varphi} \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi;$$

$$\varepsilon_{y1} = \dot{\omega}_{y1} = -\ddot{\varphi} \cos \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi;$$

$$\varepsilon_{z1} = \dot{\omega}_{z1} = \ddot{\psi};$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{x1}^2 + \varepsilon_{y1}^2 + \varepsilon_{z1}^2} = \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 \dot{\psi}^2 + \ddot{\psi}^2} = \frac{2a}{R} \sqrt{l^2 + R^2 + 4a^2 l^2 t^4}.$$

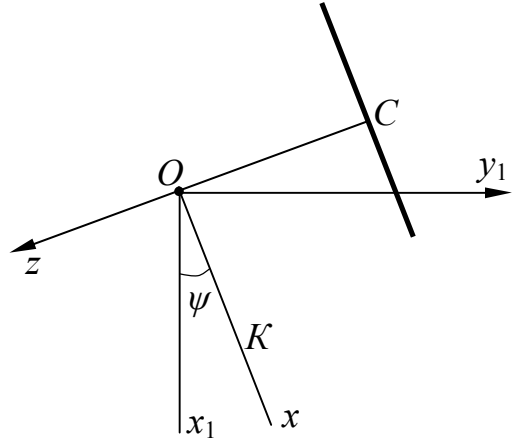


Рис. 12.10

12.4. Скорость и ускорение точки при сферическом движении тела

Сферическое движение тела в каждый момент времени можно рассматривать как вращательное вокруг мгновенной оси и, следовательно, скорость любой точки определить по формуле Эйлера

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (12.9)$$

где $\vec{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости, построенный на мгновенной оси OP ; \vec{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки, проведенный из неподвижной точки (рис. 12.11).

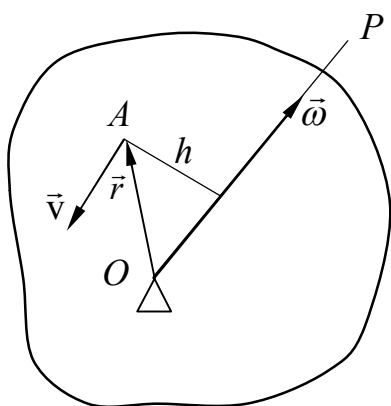


Рис. 12.11

Модуль скорости определяется по формуле

$$v = \omega h, \quad (12.10)$$

где h – длина перпендикуляра, опущенного из точки на мгновенную ось OP . Направлен вектор скорости перпендикулярно плоскости, проходящей через точку A и мгновенную ось OP , в сторону вращения тела.

Проекции вектора скорости точки на координатные оси (подвижные и неподвижные) можно найти, записав векторное произведение через определитель

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Тогда для проекций скорости на подвижные оси имеем

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y;$$

$$v_y = \omega_z x - \omega_x z;$$

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Аналогично запишутся и проекции на неподвижные оси координат.

Для нахождения ускорения произвольной точки тела воспользуемся формулой

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

где скорость точки определяется формулой (12.9).

Подставив это значение скорости и продифференцировав, получим

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

или, учитывая, что $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ и $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$,

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (12.11)$$

Первое слагаемое называют вращательным ускорением, а второе – осеостремительным ускорением

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{вр}} + \vec{a}^{\text{ос}}. \quad (12.12)$$

Найдем модули и направления этих ускорений (рис. 12.12). Модуль вращательного ускорения $a^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\beta = \varepsilon \cdot h_1$, где h_1 – кратчайшее расстояние от точки до оси углового ускорения OQ . Направление вектора вращательного ускорения $\vec{a}^{\text{вр}}$ перпендикулярно плоскости, проходящей через точку (точка A на рисунке) и ось OQ мгновенного углового ускорения. Таким образом, $\vec{a}^{\text{вр}}$ – вращательное ускорение вокруг оси OQ мгновенного углового ускорения.

Модуль осеостремительного ускорения $a^{\text{ос}} = \omega \cdot v \cdot \sin 90^\circ$. Но модуль скорости точки (согласно (12.10)) $v = \omega h$, где h – расстояние до мгновенной оси OP , на которой расположен вектор $\vec{\omega}$. Тогда $a^{\text{ос}} = \omega^2 h$.

Осеостремительное ускорение $\vec{a}^{\text{ос}}$ направлено к мгновенной оси OP и лежит в плоскости, проходящей через точку A и мгновенную ось вращения.

В общем случае векторы $\vec{a}^{\text{вр}}$ и $\vec{a}^{\text{ос}}$ не будут перпендикулярны друг другу, и модуль ускорения точки нужно определять по теореме косинусов или же по проекциям на координатные оси.

Пример 12.2. Диск радиуса $R = 0,3$ м приводится в движение горизонтальным кривошипом длины $l = 0,4$ м, вращающимся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 0,6$ рад/с (рис. 12.8). Определить скорости и ускорения точек A , B , C , P , если диск катится по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения, причем $AC \perp BC$.

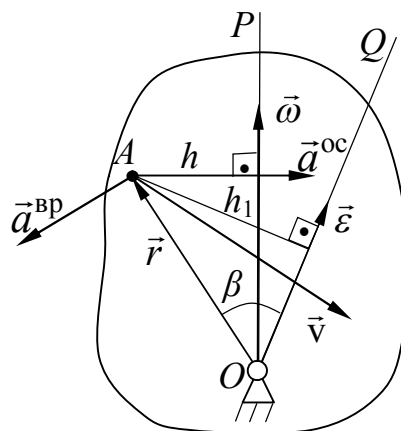


Рис. 12.12

Решение

Движение диска, как было показано в примере 12.1, будет вращательным (сферическим) вокруг неподвижной точки O . Скорости точек можно определить по формуле Эйлера ((12.9), (12.10)) как скорости во вращении вокруг мгновенной оси OP . На рис. 12.13 показано сечение диска вертикальной плоскостью, проходящей через точки O и C . Угловая скорость диска $\omega = \frac{v_c}{CD}$, где $v_c = \omega_1 l = 0,24$ м/с, $CD = l \sin \alpha = 0,24$ м и $\omega = 1$ рад/с.

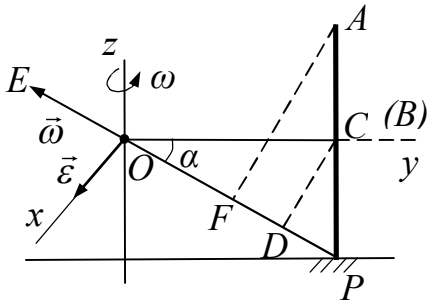


Рис. 12.13

Скорость точки A $v_A = \omega AF = 2v_c = 0,48$ м/с, скорость точки B $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB}$ найдем по проекциям на подвижные оси координат (рис. 12.13).

$v_{Bx} = \omega_y z - \omega_z y$, $v_{By} = \omega_z x - \omega_x z$, $v_{Bz} = \omega_x y - \omega_y x$, где $\vec{\omega} (0; -0,8; 0,6)$ и $\vec{OB} (-0,3; 0,4; 0)$.

Тогда $v_{Bx} = -0,24$ м/с, $v_{By} = -0,18$ м/с, $v_{Bz} = -0,24$ м/с и $v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2 + v_{Bz}^2} \cong 0,38$ м/с.

Скорость точки P равна нулю, т.к. она лежит на мгновенной оси вращения.

Перейдем к вычислению ускорений точек, используя формулы (12.11) и (12.12). Предварительно найдем угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ диска как скорость конца вектора $\vec{\omega}$ – точки E – в ее движении по годографу (см. рис. 12.9).

Годографом $\vec{\omega}$ будет окружность радиуса $OE \cos \alpha$. Тогда $\varepsilon = u_E = \omega_1 \omega \cos \alpha = 0,6 \cdot 1 \cdot 0,8 = 0,48$ рад/с², причем вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси Ox в положительном направлении.

Начнем определение ускорений с точки P , лежащей на мгновенной оси вращения:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{\text{вп}} + \vec{a}_P^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P.$$

Осестремительное ускорение этой точки равно нулю, т.к. $v_P = 0$. Вращательное ускорение точки $|\vec{a}_P^{\text{вп}}| = \varepsilon \cdot OP \cdot \sin 90^\circ = 0,48 \cdot 0,5 = 0,24$ м/с² и направлено перпендикулярно отрезку OP (рис. 12.14).

Ускорение точки C можно определить как ускорение точки стержня OC , вращающегося равномерно,

$$a_C = \omega^2 l = 0,62 \cdot 0,4 = 0,144 \text{ м/с}^2,$$

или же как точки C диска по формуле

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^{\text{вп}} + \vec{a}_C^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OC} + \vec{\omega} \times \vec{v}_C,$$

где $a_C^{\text{вп}} = \varepsilon \cdot OC \sin 90^\circ = 0,48 \cdot 0,4 = 0,192 \text{ м/с}^2$,

$$a_C^{\text{ос}} = \omega \cdot v_C \sin 90^\circ = 1 \cdot 0,24 = 0,24 \text{ м/с}^2.$$

Направления векторов показаны на рис. 12.14. Модуль ускорения (катет прямоугольного треугольника)

$$a_C = \sqrt{(a_C^{\text{ос}})^2 - (a_C^{\text{вп}})^2} = 0,144 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{вп}} + \vec{a}_A^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{v}_A,$$

где $a_A^{\text{вп}} = \varepsilon \cdot OA \cdot \sin 90^\circ = 0,24 \text{ м/с}^2$;

$$a_A^{\text{ос}} = \omega^2 \cdot AF = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

Вращательное ускорение перпендикулярно отрезку OA , а осестремительное ускорение направлено к мгновенной оси OP и, следовательно, они не перпендикулярны друг к другу. Модуль ускорения a_A определяется или теоремой косинусов, или по проекциям на координатные оси:

$$a_A = \sqrt{a_{\text{вп}}^2 + a_{\text{ос}}^2 - 2a_{\text{вп}}a_{\text{ос}} \cos 2\alpha} = \sqrt{a_{Ay}^2 + a_{Az}^2} = 0,473 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\text{вп}} + \vec{a}_B^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B$$

вычислим по компонентам этих векторов: $\vec{\varepsilon}(0,48; 0; 0)$, $\vec{OB}(-0,3; 0,4; 0)$, $\vec{\omega}(0; -0,8; 0,6)$, $\vec{v}_B(-0,24; -0,18; -0,24)$.

Проекции ускорения \vec{a}_B на координатные оси:

$$a_{Bx} = \varepsilon_y z_B - \varepsilon_z y_B + \omega_y v_{Bz} - \omega_z v_{By} = 0,8 \cdot 0,24 + 0,6 \cdot 0,18 = 0,3;$$

$$a_{By} = \varepsilon_z x_B - \varepsilon_x z_B + \omega_z v_{Bx} - \omega_x v_{Bz} = -0,6 \cdot 0,24 = -0,144;$$

$$a_{Bz} = \varepsilon_x y_B - \varepsilon_y x_B + \omega_x v_{By} - \omega_y v_{Bx} = 0,48 \cdot 0,4 - 0,8 \cdot 0,24 = 0.$$

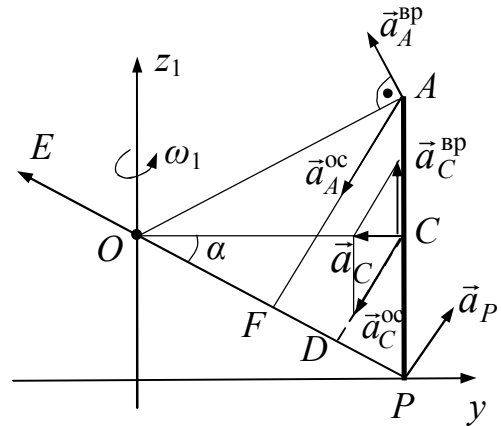


Рис. 12.14

Модуль ускорения точки В $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2 + a_{Bz}^2} \cong 0,33 \text{ м/с}^2$ и вектор ускорения $\vec{a}_B = 0,3\vec{i} - 0,144\vec{j}$.

Скорости и ускорения точек можно найти *другим способом*, разложив сложное движение диска на переносное вращение вокруг вертикальной оси и относительное вращение вокруг оси OC . Затем, используя теорему о сложении скоростей и сложении ускорений (теорема Кориолиса), провести определение абсолютных скоростей и ускорений указанных точек. Предлагаем читателю проделать эти вычисления самостоятельно и сравнить трудоемкость этих двух способов расчета.

Пример 12.3. Круговой конус, высота которого $h = 0,4 \text{ м}$ и радиус основания $r = 0,3 \text{ м}$, катится по плоскости без скольжения. Вершина конуса (точка O) – неподвижна. Определить угловую скорость и угловое ускорение конуса, а также скорости и ускорения точек A , B , C (рис. 12.15) в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$, если задан закон движения центра основания конуса (точка C) уравнением $s = 0,24t^2 \text{ м}$. В начальный момент точка C находилась в плоскости Oy_1z_1 .

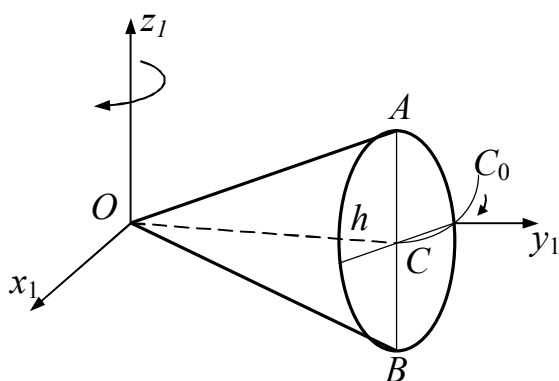


Рис. 12.15

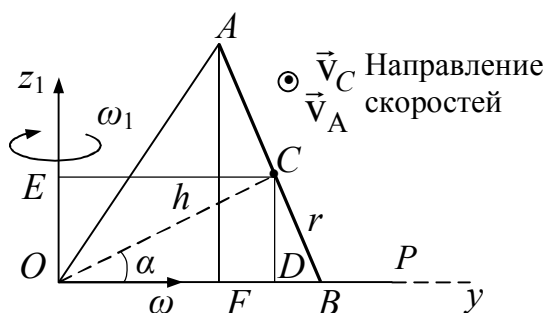


Рис. 12.16

Решение

1. Конус совершает сферическое движение вокруг неподвижной точки O . Мгновенная ось вращения OP конуса совпадает с образующей его, которая касается неподвижной плоскости. Изобразим сечение конуса вертикальной плоскостью симметрии (рис. 12.16). Эта плоскость вращается вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью

$$\omega_1 = \frac{\dot{s}}{CE}, \quad \text{где} \quad CE = h \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = 0,8, \quad \dot{s} = 0,48t.$$

$$\text{Тогда } \omega_1 = \frac{0,48t}{0,4 \cdot 0,8} = 1,5t \text{ рад/с.}$$

Мгновенная угловая скорость конуса согласно (12.10)

$$\omega = \frac{v_C}{CD},$$

где $CD = h \sin \alpha = 0,24 \text{ м}$;

$$\omega = \frac{\dot{s}}{CD} = \frac{0,48t}{0,24} = 2t \text{ рад/с.}$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси OP так, что вращение конуса видно с конца этого вектора происходящим против хода часовой стрелки.

2. Угловое ускорение конуса $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ найдем как скорость конца вектора $\vec{\omega}$ в его движении по годографу угловой скорости, который в рассматриваемом примере будет спиралью, лежащей на плоскости Ox_1y_1 . Поскольку $\vec{\omega}$ изменяется и по модулю и по направлению, то $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$.

Вектор $\vec{\varepsilon}_1$, направленный по оси OP , $\varepsilon_1 = \dot{\omega} = 2 \text{ рад/с}^2$, а вектор $\vec{\varepsilon}_2$ численно равен произведению ω_1 на ω , т.е. $\varepsilon_2 = \omega_1 \omega = 3t^2$, и направлен перпендикулярно OP :

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \sqrt{2^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4 + 9t^4}.$$

При $t_1 = 1 \text{ с}$ $\varepsilon = \sqrt{13} \cong 3,6 \text{ рад/с}^2$ и вектор $\vec{\varepsilon}$ лежит на оси мгновенного углового ускорения OQ (рис. 12.17).

3. Скорости точек конуса можно определять как вращательные вокруг мгновенной оси по формуле Эйлера ((12.9), (12.10)). Скорость точки B равна нулю, т.к. она лежит на мгновенной оси вращения OP . Скорость точки A $v_A = 2v_C = 2\dot{s} = 2 \cdot 0,48t = 0,96t \text{ м/с}$, т.к. $AF = 2CD$. Векторы скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_C направлены перпендикулярно плоскости Oyz (см. рис. 12.16). При $t_1 = 1 \text{ с}$ $v_C = 0,48 \text{ м/с}$, $v_A = 0,96 \text{ м/с}$.

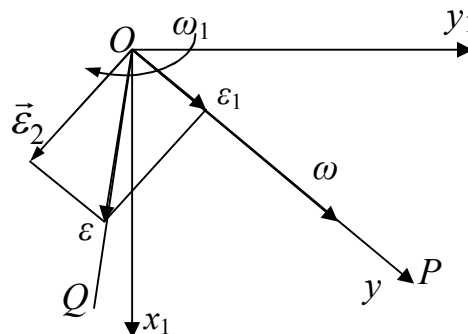


Рис. 12.17

4. Ускорения точек конуса определим по формулам (12.11) и (12.12) как суммы вращательных и осестремительных ускорений.

Для точки B $\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\text{вр}} + \vec{a}_B^{\text{ос}}$ или $\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OB} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B$, но $v_B = 0$ и $\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OB} = 0$, т.к. векторы лежат на одной прямой. Тогда

$$a_B = \varepsilon_2 \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = 3t^2 \cdot 0,5 = 1,5t^2.$$

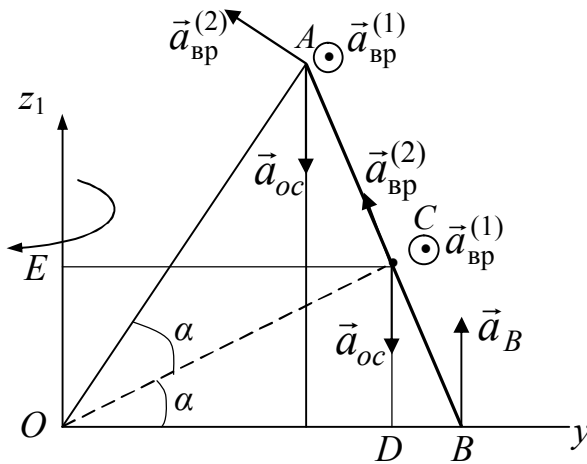


Рис. 12.18

При $t_1 = 1$ с $a_B = 1,5$ м/с² и $\vec{a}_B \perp \vec{OB}$ (рис. 12.18). Ускорение точки C можно получить двумя способами. Во-первых, известно, что точка движется по заданному закону $s(t)$, описывая окружность радиуса $CE = h \cos \alpha$.

Тогда $a_{ct} = \ddot{s} = 0,48$ м/с²,
 $a_{cn} = \frac{v_c^2}{CE} = \frac{(0,48t)^2}{0,32} = 0,72t^2$ и при $t_1 = 1$ с $a_C = \sqrt{a_{ct}^2 + a_{cn}^2} = 0,865$ м/с².

Во-вторых, ускорение точки C находится по формуле

$$\vec{a}_C = \vec{\varepsilon} \times \vec{OC} + \vec{\omega} \times \vec{v}_C = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OC} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{OC} + \vec{\omega} \times \vec{v}_C = \vec{a}_{вр}^{(1)} + \vec{a}_{вр}^{(2)} + \vec{a}_{oc},$$

где $a_{вр}^{(1)} = \varepsilon_1 \cdot h \sin \alpha = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,48$ м/с²;

$$a_{вр}^{(2)} = \varepsilon_2 \cdot h \cdot \sin 90^\circ = 3t^2 \cdot 0,4 = 1,2t^2;$$

$$a_{oc} = \omega \cdot v_C \cdot \sin 90^\circ = 2t \cdot 0,48t = 0,96t^2.$$

При $t_1 = 1$ с $a_{вр}^{(1)} = 0,48$ м/с², $a_{вр}^{(2)} = 1,2$ м/с², $a_{oc} = 0,96$ м/с². Направления векторов таковы: $a_{вр}^{(1)}$ – параллельно оси Ox, $a_{вр}^{(2)}$ – перпендикулярно OC и \vec{a}_{oc} направлено к мгновенной оси OP. По проекциям на координатные оси находим ускорение точки C (см. рис. 12.18):

$$a_{Cx} = a_{вр}^{(1)} = 0,48;$$

$$a_{Cy} = -a_{вр}^{(2)} \sin \alpha = -0,72;$$

$$a_{Cz} = a_{вр}^{(2)} \cos \alpha - a_{oc} = 1,2 \cdot 0,8 - 0,96 = 0.$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2 + a_{Cz}^2} = \sqrt{0,48^2 + 0,72^2 + 0} = 0,865 \text{ м/с}^2.$$

Аналогично вычисляем ускорение точки A:

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{v}_A = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OA} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{v}_A,$$

где $a_{вр}^{(1)} = \varepsilon_1 \cdot OA \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,96 = 0,96$ м/с² и направлено параллельно оси Ox;

$a_{\text{вр}}^{(2)} = \varepsilon_2 \cdot OA \cdot \sin 90^\circ = 3t^2 \cdot 0,5 = 1,5t^2$, при $t_1 = 1$ с $a_{\text{вр}}^{(2)} = 1,5$ м/с² и направлено перпендикулярно OA .

$a_{oc} = \omega \cdot v_A \cdot \sin 90^\circ = 2t \cdot 0,96t = 1,92t^2$ и направлено вертикально к мгновенной оси вращения.

По проекциям на координатные оси находим для $t_1 = 1$ с

$$a_{Ax} = a_{\text{вр}}^{(1)} = 0,96;$$

$$a_{Ay} = -a_{\text{вр}}^{(2)} \sin 2\alpha = -1,5 \cdot 0,96 = -1,44;$$

$$a_{Az} = a_{\text{вр}}^{(2)} \cos 2\alpha - a_{oc} = 1,5 \cdot 0,28 - 1,92 = -1,5;$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2 + a_{Az}^2} = 2,29 \text{ м/с}^2$$

и вектор ускорения точки A

$$\vec{a}_A = 0,96\vec{i} - 1,44\vec{j} - 1,5\vec{k}.$$

12.5. Движение свободного тела

Свободным телом называется тело, для которого любые перемещения в пространстве являются возможными, т.е. на него не наложены никакие связи. Примером свободного движения является движение ракеты, артиллерийского снаряда (пули) после вылета из ствола орудия (винтовки), движение самолета при выполнении фигур высшего пилотажа и т.д.

Нетрудно убедиться, что движение свободного тела в пространстве можно представить состоящим из поступательного движения вместе с выбранной точкой (полюсом) и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса. Поступательное движение вместе с осями $Ox_1y_1z_1$ (рис. 12.19) является переносным движением, а относительным движением будет вращение вокруг полюса (точки O). Относительное движение в общем случае будет сферическим движением. Положение тела в пространстве (в системе отсчета $O_2x_2y_2z_2$) можно задать шестью параметрами: координатами полюса x_0, y_0, z_0 и углами Эйлера ψ, θ, φ .

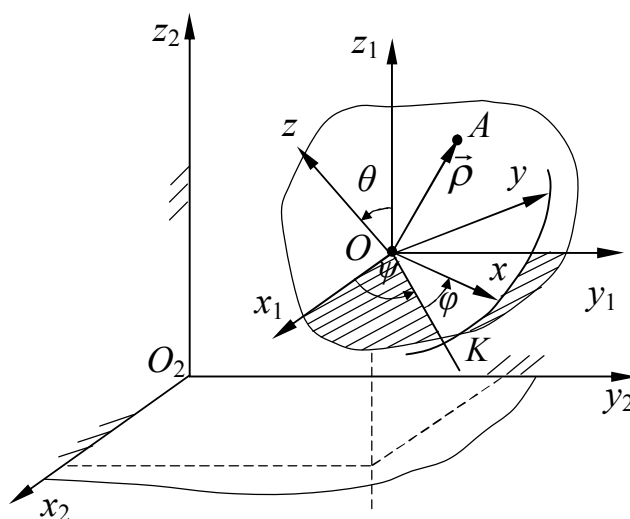


Рис. 12.19

Уравнениями свободного движения тела в общем случае будут зависимости

$$x_0 = f_1(t), y_0 = f_2(t), z_0 = f_3(t), \psi = f_4(t), \theta = f_5(t), \varphi = f_6(t). \quad (12.13)$$

Нетрудно показать, что относительное движение, т.е. углы ψ, θ, φ , не зависит от выбора полюса. Не будут зависеть от этого выбора и векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ относительного сферического движения.

Скорости и ускорения точек свободного тела могут быть получены по теоремам сложения скоростей и ускорений точки:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r; \quad \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

Здесь ускорение Кориолиса отсутствует (равно нулю), т.к. переносное движение является поступательным. Скорость и ускорение точки в переносном движении равны скорости и ускорению полюса, а скорость и ускорение в относительном движении определяются как скорость и ускорение точки в сферическом движении. Тогда для любой точки тела (точка A на рис. 12.19, $\vec{\rho} = \vec{OA}$)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{AO}, \quad (12.14)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{AO}^{вр} + \vec{a}_{AO}^{ос} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{AO}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какими параметрами определяются положение и движение тела при его сферическом движении?
2. Что можно сказать о траекториях точек тела, совершающего сферическое движение?
3. Можно ли говорить о равномерном движении тела, имеющего одну неподвижную точку?
4. Чему равно и как направлено угловое ускорение тела при сферическом движении, если угловая скорость его по модулю постоянна?
5. Каково геометрическое место точек тела, совершающего сферическое движение, скорости которых равны по модулю в данный момент времени?
6. Будут ли равны по модулю ускорения точек, если у них модули скоростей равны?

7. Определить величину и направление углового ускорения тела в сферическом движении, если заданы уравнения движения $\psi = 3t$, $\varphi = 4t$, $\theta = \frac{\pi}{6} = \text{const}$. Ответ: $\varepsilon = 6$ рад/с и направлено по линии узлов.
8. Какую точку свободного тела можно принимать за полюс при разложении его движения на переносное и относительное движения?
9. Сколько степеней свободы имеет твердое тело при а) поступательном, б) вращательном вокруг неподвижной оси, в) плоскопараллельном, г) сферическом, д) свободном движениях?

Глава 13. Кинематика системы тел

Совокупность движущихся тел, связанных между собой тем или иным способом и передающих движение от одного тела к другому, образует систему тел или кинематическую цепь. Естественно, характеристики движения отдельных тел (координаты, скорости, ускорения) будут связаны между собой некоторыми уравнениями, называемыми уравнениями связей. Если в уравнения связей входят только координаты (линейные и угловые), то связь называется геометрической, если же в уравнениях содержатся скорости, то связь является кинематической. Механизмы, широко используемые в технике, представляют собой систему твердых тел, связанных между собой и преобразующих движение одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Механизмы входят в состав многих машин, так как выполнение механических движений для преобразования энергии, материалов и информации требует обычно преобразования движения, получаемого от двигателя. Механизмы состоят из многих деталей, и твердые тела, входящие в состав механизма, называются звеньями. В механизме принято различать ведущие (входные) и ведомые звенья.

Ведущим называется звено, к которому приложена движущая сила или момент, закон движения которого считается известным. Все остальные подвижные звенья механизма называются ведомыми. Ведомое звено, совершающее требуемое движение, для осуществления которого предназначен механизм, называется рабочим (выходным) звеном.

Положение точек механизма, звенья которого совершают то или иное движение, можно определять, например, декартовыми координатами, являющимися функциями времени. Если положение точек механизма определяется двумя координатами, то такой механизм относится к разряду плоских механизмов. Если же положение точек механизма определяется тремя координатами, то механизм относится к разряду пространственных механизмов.

Однако не все координаты, определяющие положение звеньев механизма (а также производные координат по времени), являются независимыми величинами. Поясним это на примерах.

Пример 13.1. Кривошипно-ползунный механизм, используемый для преобразования вращательного движения в поступательное, состоит из трех подвижных звеньев: 1 – кривошип $OA = r$, 2 – шатун $AB = l$ и 3 – ползун B (рис 13.1). Положение звеньев задается координатами φ , x_B , ψ , которые в процессе движения связаны между собой. Эту связь можно получить, введя векторы \vec{OA} и \vec{OB} и записав векторную сумму $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$.

Проецируя на координатные оси, получаем

$$\begin{aligned} x_B &= r \cos \varphi + l \cos(180^\circ - \psi) = r \cos \varphi - l \cos \psi, \\ 0 &= r \sin \varphi - l \sin(180^\circ - \psi) = r \sin \varphi - l \sin \psi \end{aligned} \quad (13.1)$$

Из полученных двух уравнений геометрических связей можно найти координаты ведомых звеньев через координату ведущего звена, которую называют *обобщенной* координатой механизма:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{r}{l} \sin \varphi, \\ x_B &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

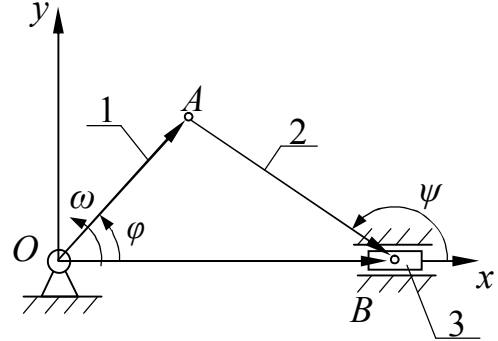


Рис. 13.1

Дифференцируя по времени уравнения геометрических связей, получим уравнения кинематических связей, из которых можно найти связи между скоростями. В рассматриваемом примере, взяв производные по времени от (13.1) и (13.2), получим после преобразований

$$\begin{aligned} \omega_2 = \dot{\psi} &= +\omega_1 \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}, \\ v_{Bx} = \dot{x}_B &= r\omega_1 \left[-\sin \varphi - \frac{r \sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right], \end{aligned} \quad (13.3)$$

где $\omega_1 = \dot{\varphi}$ – угловая скорость ведущего звена, которая называется также *обобщенной скоростью* системы (механизма).

Уравнения связей можно также получить, вычисляя скорости общих точек, в которых передается движение от одного звена к другому.

В механизмах скорости отдельных звеньев механизма связаны между собой. Так, в зубчатом механизме (рис. 13.2) угловые скорости шестерни 1 и колеса 2 связаны соотношением

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{или} \quad r_1 \dot{\varphi}_1 = r_2 \dot{\varphi}_2, \quad (13.4)$$

где φ_1 и φ_2 – углы поворота шестерни и колеса.

В планетарном механизме (рис. 13.3) скорость точки P подвижного звена 2 равна нулю (мгновенный центр скоростей звена, совершающего плоское движение), что может быть выражено уравнением, связывающим переносную и относительную скорости точки P :

$$(r_1 + r_2)\omega_3 = r_2\omega_2 \quad \text{или} \quad (r_1 + r_2)\dot{\varphi}_3 = r_2\dot{\varphi}_2, \quad (13.5)$$

где φ_3, φ_2 – углы поворота кривошипа OA и колеса 2.

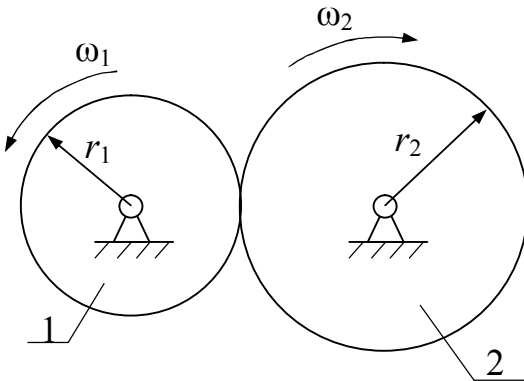


Рис. 13.2

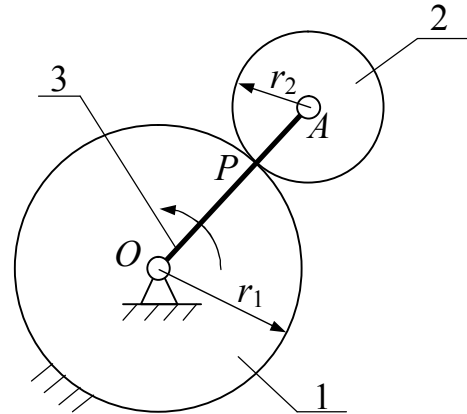


Рис. 13.3

Уравнения (13.4) - (13.5) являются кинематическими связями.

Отметим, что во многих случаях уравнение кинематической связи может быть проинтегрировано. Так, после интегрирования уравнений (13.4) и (13.5) получаем связь между угловыми координатами:

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2 \quad (13.6)$$

$$\text{и} \quad (r_1 + r_2)\varphi_3 = r_2\varphi_2. \quad (13.7)$$

Связи, накладывающие ограничения на координаты точек системы или на координаты и скорости, но допускающие интегрирование, называются *голономными* связями.

Если же уравнение кинематической связи нельзя проинтегрировать, то связь называется *неголономной*.

В механизме фрикционной бесступенчатой передачи (рис. 13.4) от вала 1 к валу 2 при отсутствии проскальзывания уравнение связи

$$r_1\dot{\varphi}_1 = \rho\dot{\varphi}_2 \quad (13.8)$$

нельзя проинтегрировать, если $\rho = \rho(t)$ является какой-то функцией времени.

При качении без скольжения шара по шероховатой поверхности уравнение связи, выражающее равенство нулю скорости точки касания шара и поверхности, нельзя проинтегрировать, и эта связь будет неголономной, если центр шара движется не прямолинейно.

Связи можно делить на стационарные и нестационарные. Стационарные связи не зависят от времени, нестационарные – зависят от времени. Все рассмотренные в примерах связи являются стационарными, не зависящими от времени.

Если ведущих звеньев в изучаемом механизме будет два или более, то и в уравнения связей будут входить две или более независимых координаты. Например, в планетарном редукторе входными звеньями могут быть водило и вращающееся солнечное колесо.

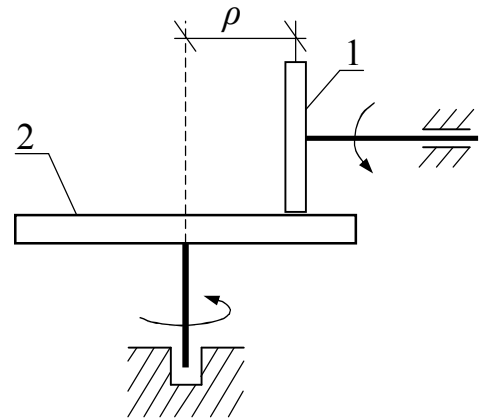


Рис. 13.4

Дадим **определение**. *Обобщенными координатами называются независимые величины, позволяющие в любой момент времени однозначно определить положение всех тел системы. Если система имеет только голономные связи, то число обобщенных координат равно числу степеней свободы этой системы.*

Кинематический анализ системы состоит в определении вида движений отдельных тел и установлении соотношений между их кинематическими характеристиками. Кинематический анализ механизмов состоит в определении движения звеньев механизма по заданному движению ведущего звена. При кинематическом исследовании механизмов решаются следующие основные задачи: а) определение положения звеньев механизма и построение траекторий отдельных точек звеньев; б) нахождение линейных скоростей точек механизма и угловых скоростей звеньев; в) установление связей между координатами и скоростями отдельных тел системы (механизма). Отметим, что более подробно методы исследования механизмов рассматриваются в очень важной инженерной дисциплине, тесно связанной с теоретической механикой, – теории механизмов и машин.

При установлении связей между телами изучаемой системы (звеньями механизма) чаще всего используются общие точки, принадлежащие различным звеньям и имеющие одинаковые скорости.

При кинематическом анализе механизмов можно рекомендовать следующую последовательность рассуждений:

- 1) представить назначение механизма;
- 2) указать ведущее звено механизма;
- 3) определить число степеней свободы механизма;
- 4) установить характер движения каждого звена механизма, используя классификацию видов движения твердого тела;

5) выполнить кинематический анализ, устанавливая соотношения между кинематическими характеристиками отдельных точек и отдельных звеньев (записать уравнения связей);

6) установить методы исследования движений отдельных звеньев механизма и выразить выходные характеристики через характеристики входных звеньев.

Приведем примеры наиболее часто встречающихся механизмов.

I. Кулачковые механизмы (рис. 13.5)

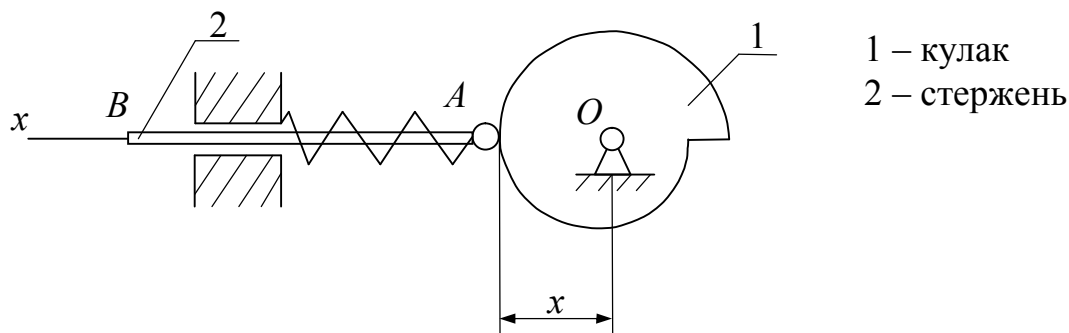


Рис. 13.5

Механизм служит для преобразования вращательного движения кулака в поступательное движение стержня. Ведущим звеном является кулак (кулачок), ведомым – стержень. Механизм имеет одну степень свободы. Кулачок совершает вращательное движение, стержень – поступательное.

Закон движения стержня находится по заданному закону движения кулачка.

II. Планетарные механизмы с внешним и внутренним зацеплением (рис. 13.6,а,б)

Механизм служит для передачи вращательных движений между параллельными валами, используется в планетарных редукторах с большим значением передаточного отношения.

В механизме: 1 – кривошип (водило); 2 – подвижное колесо (сателлит); 3 – неподвижное центральное колесо.

Ведущим звеном является кривошип, ведомым – подвижное колесо (сателлит). Механизм имеет одну степень свободы $N = 1$, в качестве обобщенной координаты можно взять угол поворота кривошипа φ_1 .

Кривошип совершает вращательное движение, подвижное колесо – плоское движение. Точка подвижного колеса P является мгновенным центром скоростей. Общей точкой, используемой для установления кинематических соотношений, является точка A .

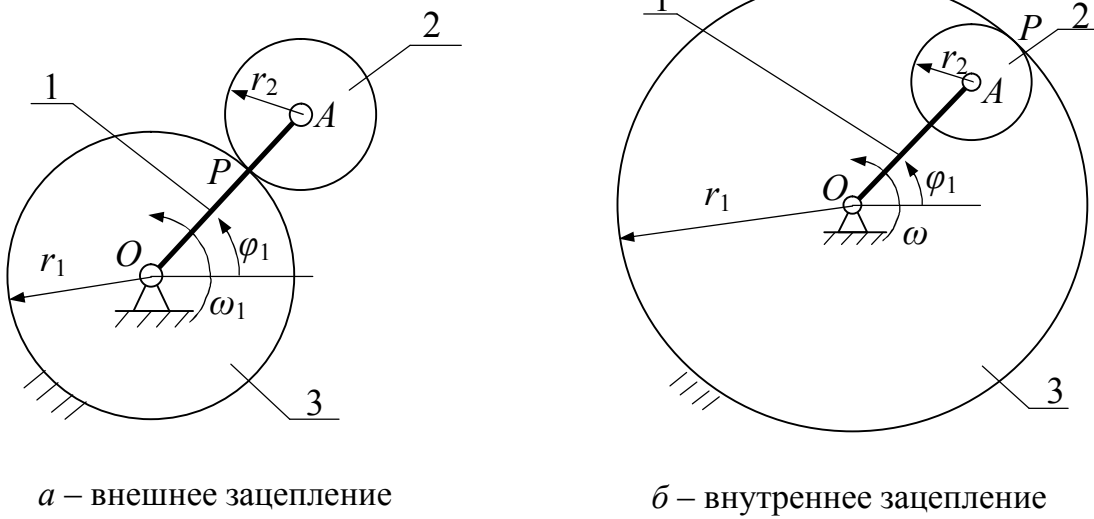


Рис. 13.6

Последовательность соотношений:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1; \quad v_A = OA \cdot \omega_1; \quad \omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{OA \cdot \omega_1}{AP}.$$

Для определения других кинематических характеристик подвижного колеса используется теория плоского движения.

III. Дифференциальные механизмы с внешним и внутренним зацеплением (рис. 13.7, *a*, *б*).

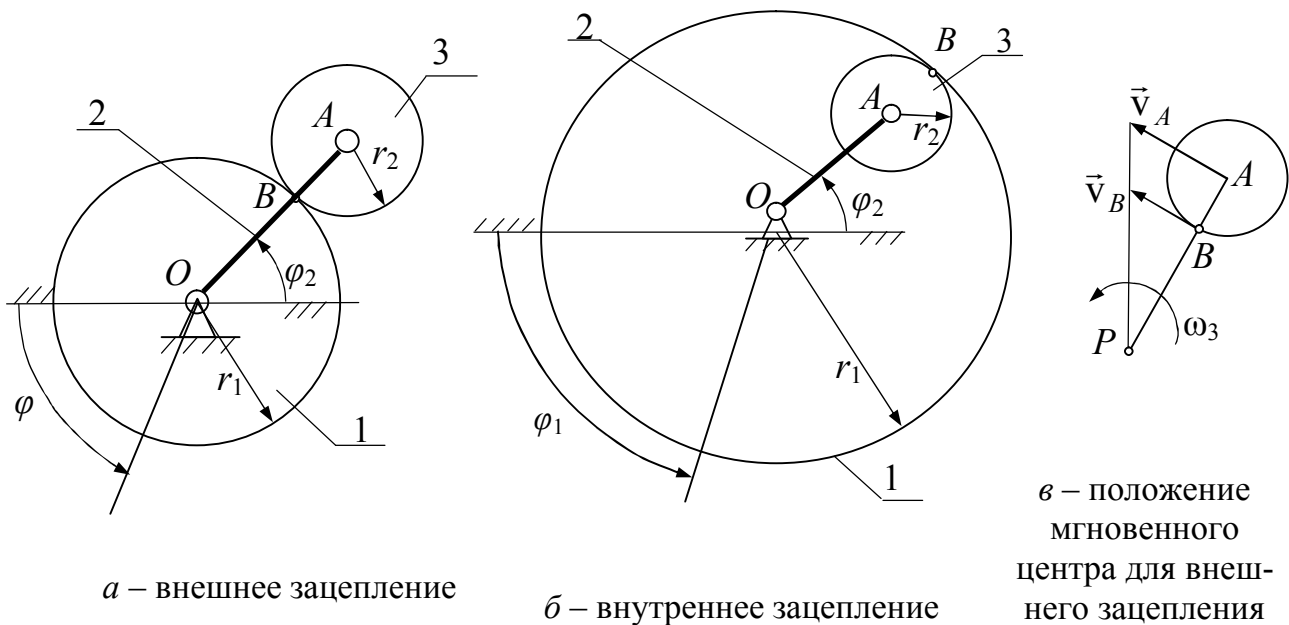


Рис. 13.7

Служат для передачи вращательных движений между параллельными валами, используются в дифференциальных редукторах с большим значением передаточного отношения.

В механизме: 1 – подвижное центральное колесо; 2 – кривошип (водило); 3 – подвижное колесо (сателлит).

Ведущими звеньями являются центральное колесо 1 и водило 2. Механизм имеет две степени свободы $N = 2$ и в качестве обобщенных координат можно рекомендовать углы поворота центрального колеса 1 и водила 2 ($q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$).

В механизме центральное колесо и водило совершают вращательные движения, сателлит – плоское движение.

В качестве общих точек для установления кинематических связей можно рекомендовать точки A и B сателлита. На рис. 13.7,в показано положение мгновенного центра скоростей сателлита для внешнего зацепления.

Последовательность кинематических соотношений:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1; \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2; \quad v_A = OA\omega_2; \quad v_B = OB\omega_1;$$

$$\omega_3 = \frac{v_A - v_B}{AB} = \frac{(r_1 + r_2)\dot{\varphi}_2 - r_1\dot{\varphi}_1}{AB}.$$

Если проинтегрировать это уравнение, то получим голономную связь, определяющую угол φ_3 .

IV. Кривошипно-ползунные механизмы (рис. 13.8)

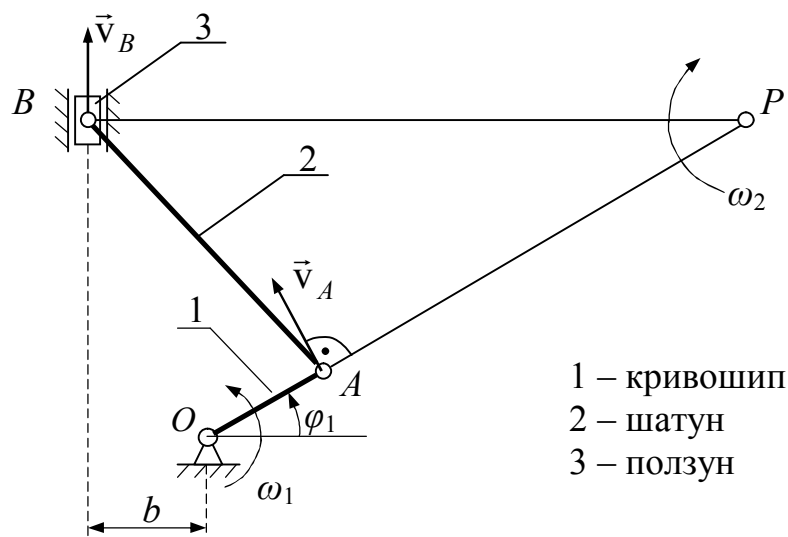


Рис. 13.8

Механизмы служат для преобразования вращательного движения кривошипа в поступательное движение ползуна (компрессоры) или поступательного движения ползуна во вращательное движение кривошипа (двигатели внутреннего сгорания).

Для двигателя внутреннего сгорания ведущим является кривошип, ведомым – ползун.

Механизм имеет одну степень свободы $N = 1$, в качестве обобщенной координаты можно принять угол поворота кривошипа φ_1 .

В начале этой главы уже был рассмотрен центральный кривошипно-ползунный механизм, и уравнения связи для него были получены проецированием векторного многоугольника на координатные оси. Для изображенного на рис. 13.8 нецентрального кривошипно-ползунного механизма, естественно, можно выполнить то же самое. Но можно уравнения связей получить и по скоростям общих точек.

В качестве общей точки можно рассмотреть точку A , принадлежащую кривошипу и шатуну. На рис. 13.8 показано положение мгновенного центра скоростей шатуна. Кинематические соотношения имеют вид

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1; \quad v_A = OA\omega_1; \quad \omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{OA}{AP}\omega_1.$$

Для определения других кинематических характеристик шатуна AB следует использовать теорию плоского движения.

V. Четырехзвенные (четырёхшарнирные) механизмы (рис. 13.9)

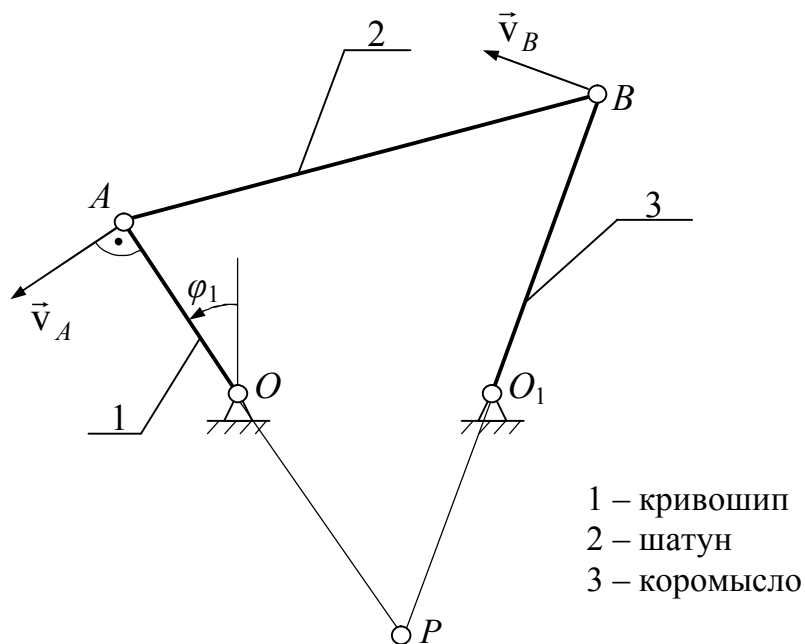


Рис. 13.9

Механизмы служат для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-вращательное движение коромысла. Ведущим звеном является кривошип, ведомым – коромысло. Механизм имеет одну степень свободы $N = 1$, в качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол поворота кривошипа φ_1 .

Кривошип 1 и коромысло 3 совершают вращательные движения, шатун 2 – плоскопараллельное.

В качестве общих точек для установления кинематических связей можно взять точки A и B .

На рис 13.9 показано положение мгновенного центра скоростей шатуна и кинематические соотношения, записываемые в виде

$$v_A = OA \cdot \omega_1; \quad \omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{OA}{AP} \omega_1; \quad v_B = BP \cdot \omega_2;$$

$$\omega_3 = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{BP}{O_1B} \omega_2 = \frac{OA \cdot BP}{AP \cdot O_1B} \omega_1,$$

где $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ – обобщенная скорость, через которую, как видно, выражаются все остальные скорости.

VI. Кривошипно-кулисные механизмы с поступательным и вращательным движением кулисы (рис. 13.10)

Механизм служит для преобразования вращательного движения кривошипа в поступательное (рис. 13.10,а) или возвратно-вращательное (рис. 13.10,б) движение кулисы.

Ведущим звеном является кривошип, ведомым – кулиса. Механизм имеет одну степень свободы $N = 1$, в качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол поворота кривошипа φ_1 .

Кривошип совершает вращательное движение, ползун – поступательное в относительном движении, кулиса – поступательное (рис. 13.10,а), возвратно-вращательное движение (рис. 13.10,б).

В качестве общей точки, используемой для установления кинематических соотношений, следует принять точку A . Полученные кинематические соотношения имеют вид

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1; \quad v_a = OA \cdot \omega_1; \quad v_r = v_a \sin \varphi_1; \quad v_e = v_a \cos \varphi_1 \quad (\text{рис. 13.10,а});$$

$$v_r = v_a \sin \alpha; \quad v_e = v_a \cos \alpha; \quad \omega_3 = \frac{v_e}{O_1A} \quad (\text{рис. 13.10,б}).$$

Для определения других кинематических характеристик кулисы следует использовать теорию сложного движения точки.

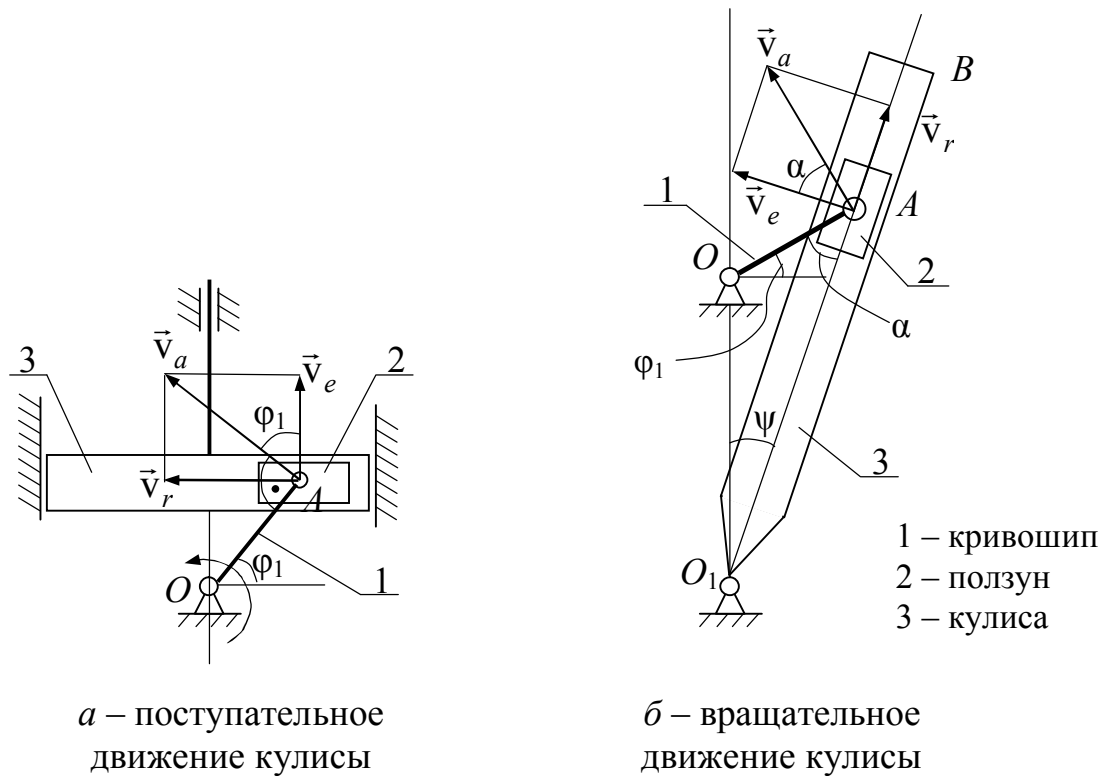


Рис. 13.10

Координаты ведомых звеньев (ползуна и кулисы) можно получить непосредственно, рассмотрев треугольник O_1OA и применив теорему косинусов. Обозначив постоянные отрезки $OO_1 = b$ и $OA = r$, имеем

$$O_1A = S = \sqrt{b^2 + r^2 + 2br \sin \varphi_1},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \cos \varphi_1}{b + r \sin \varphi_1},$$

где $S = O_1A$ – координата ползуна относительно кулисы;

ψ – угол поворота кулисы.

Дифференцируя по времени уравнения геометрических связей, получим выражения для относительной скорости ползуна и угловой скорости кулисы для произвольного положения механизма, определяемого обобщенной координатой φ .

VII. Шарнирно-рычажные механизмы (рис. 13.11)

Механизм служит для преобразования вращательных движений кривошипа и коромысла в поступательное движение ползуна.

Ведущими звеньями являются кривошип 1 и коромысло 2, ведомым (выходным) звеном – ползун 6. Механизм имеет две степени свободы $N=2$, в качестве обобщенных координат следует выбрать угловые величины φ_1 и φ_2 .

Кривошип 1 и коромысло 2 совершают вращательные движения, шатуны 3, 4, 5 – плоское, ползун 6 – поступательное. В качестве общих точек, используемых для установления кинематических соотношений, берутся точки A, C, B, D, E. Можно рекомендовать следующую последовательность расчета:

$\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$ – обобщенные скорости.

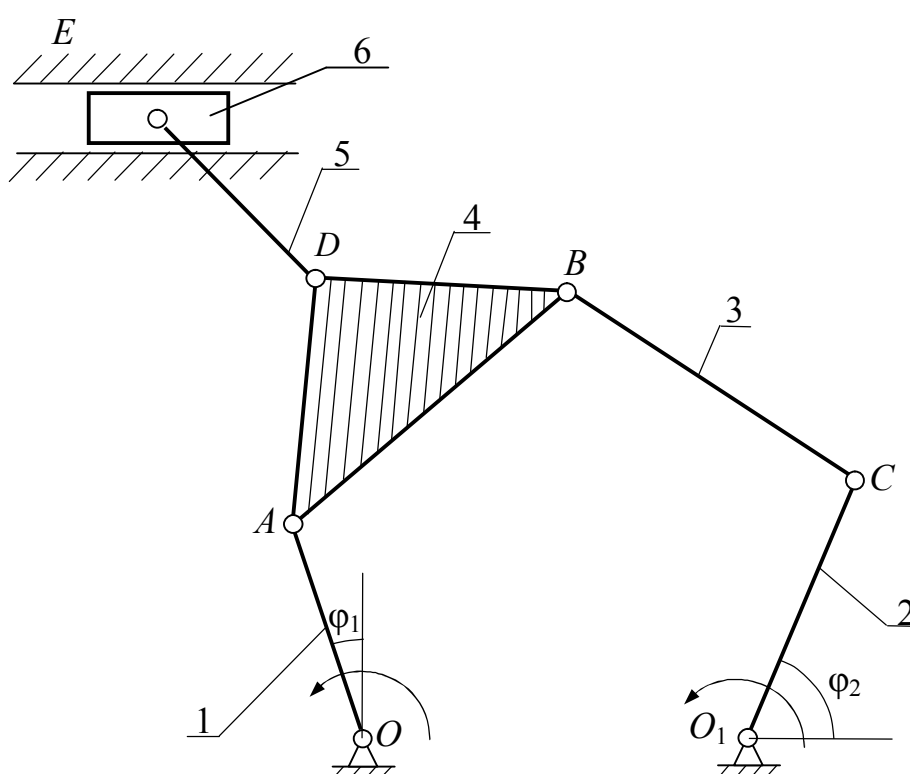


Рис. 13.11

Скорости точек A и C: $v_A = OA \cdot \omega_1$, $v_C = O_1C \cdot \omega_2$.

Скорость точки B: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$,

откуда
$$\vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}. \quad (13.9)$$

В выражении (13.9) две неизвестные величины ω_4 и ω_3 . Проецируя на оси координат формулу (13.9), учитывая, что векторы расположены в одной плоскости, находим эти неизвестные.

Поскольку звено 4 совершает плоскопараллельное движение, то скорость точки D :

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}. \quad (13.10)$$

Выражение (13.10) содержит две неизвестные величины – модуль и направление скорости точки D , которые определяются проецированием формулы (13.10) на оси координат. Отметим, что в качестве полюса можно было принять точку B и выразить скорость точки D в виде $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}$.

Скорость точки E :

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_{ED}, \quad (13.11)$$

где две неизвестные величины – модуль скорости точки E и угловая скорость шатуна 5 определяются из двух алгебраических уравнений, получаемых проецированием формулы (13.11) на оси координат.

Для определения координат точек механизма, угловых ускорений звеньев следует использовать теорию плоского движения.

В заключение главы, которая практически отсутствует в разделе "Кинематика" учебников и учебных пособий, отметим следующее:

1) изложение материала при исследовании кинематики системы тел, кинематики механизмов предполагает использование методов теоретической механики без привлечения знаний по теории движения механизмов;

2) уточнив последовательность кинематического анализа механизмов, читатели могут пополнить рассматриваемый ряд механизмов и рассмотреть новые, используя предложенный алгоритм анализа;

3) данная глава будет полезна читателям при изучении дисциплины "Теория механизмов и машин", где эти сведения будут дополнены новыми, позволяющими выполнять кинематический и динамический анализ механизмов и машин.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение геометрических, кинематических, стационарных, нестационарных связей.
2. Какие связи называются голономными, неголономными?
3. Для планетарного механизма (рис. 13.6) определите ускорение точки P .
4. В четырехзвенном механизме (рис. 13.9) при равномерном вращении кривошипа OA составьте схему определения ускорения точки B и углового ускорения звена O_1B .

Часть 3. Динамика

Введение

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных сил. В кинематике движение тел изучалось с геометрической точки зрения, в динамике рассматривается движение тел с учетом сил взаимодействия и инертности этих тел, характеризующих их массой. Поэтому динамика представляет собой наиболее общий раздел механики, имеющий большое значение для решения многих практических задач в различных областях техники.

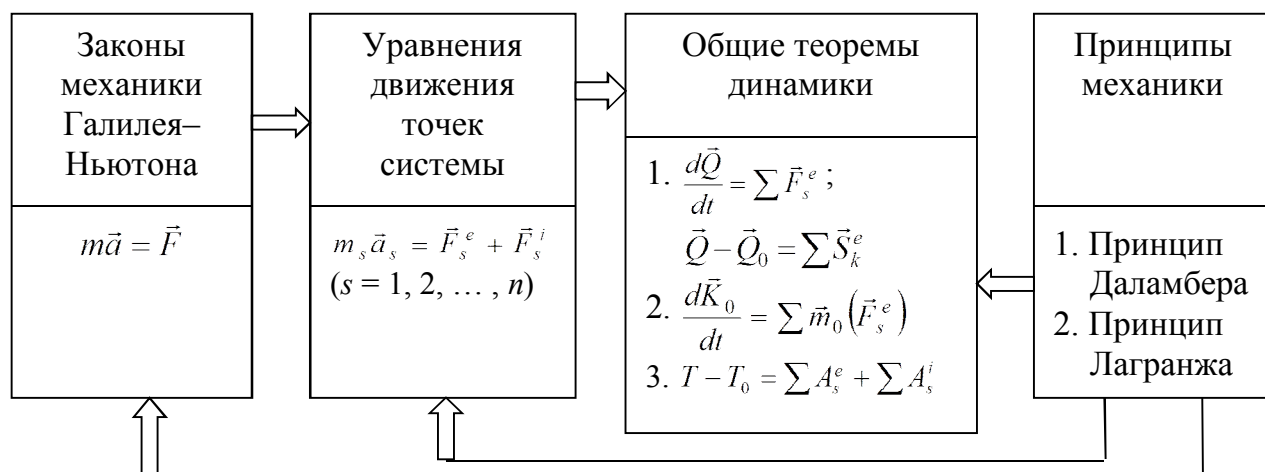
Динамика является логическим продолжением двух предыдущих разделов механики – статики и кинематики. В динамике рассматриваются те же модели материальных тел: материальная точка, механическая система, абсолютно твердое тело. Действительно, в статике рассматривались механические силовые взаимодействия твердых тел, находящихся в равновесном состоянии. В кинематике были установлены методы изучения происходящих в пространстве и во времени механических движений твердых тел и механических систем, но без учета силового взаимодействия, определяющего эти движения. Динамика ставит целью изучение движения материальных тел с учетом механического взаимодействия между ними. Последнее вытекает из существа задач механики, так как между действующими силами и движением существует внутренняя связь, которая заложена уже в самом определении понятия силы.

Динамика использует из статики законы сложения сил и принятые в кинематике способы описания движений. В динамике ставится задача установления законов связи действующих сил с кинематическими характеристиками движений.

При всем разнообразии задач динамики их делят на два основных типа. К первому типу относятся задачи, в которых движение тела (или механической системы) является заданным и требуется найти силы, под действием которых это движение происходит (первая задача). Ко второму типу относятся задачи, где действующие силы заданы и при некоторых до-

полнительных условиях требуется определить законы движения (вторая задача).

Основы механики как науки были заложены Галилеем в начале XVII столетия и после него развивались Гюйгенсом, Гуком и другими учеными. Основные принципы классической механики были сформулированы Ньютоном в его замечательном трактате "Математические начала натуральной философии" (1687). Полученные в классической механике уравнения движения материальных объектов, а также общие теоремы динамики позволяют решать многие задачи о движении механических систем. Однако в основу построения механики можно положить вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами механики. Из этих принципов можно вывести уравнения движения и общие теоремы динамики (см. рисунок).



Связь законов классической механики

Применение принципов механики позволяет решать многие задачи динамики (а также статики) более просто. В предлагаемом учебнике наряду с динамикой Ньютона рассматриваются два общих принципа: принцип Даламбера и принцип возможных перемещений. Принцип возможных перемещений вместе с принципом Даламбера применяется для движущихся механических систем. С использованием обобщенных координат рассматриваются условия равновесия и движения механической системы – механика Лагранжа.

Глава 14. Динамика материальной точки

14.1. Основные понятия и определения

Понятие о силе как о мере механического взаимодействия тел было введено в статике. При этом в статике силы считались постоянными, не изменяющимися во времени. Между тем, на движущиеся тела наряду с постоянными силами могут действовать и переменные силы, у которых модуль и направление изменяются с течением времени. Как установлено опытным путем, переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}).$$

Например, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата (рис. 14.1,*а*), от положения точки зависит сила тяготения $F = \frac{\mu m_1 m_2}{r^2}$ (рис. 14.1,*б*) и сила упругости пружины $F = cx$ (рис. 14.1,*в*), от скорости зависит сила сопротивления среды (воды, воздуха) $R = kv$, $R = kv^2$ (рис. 14.1,*г*).

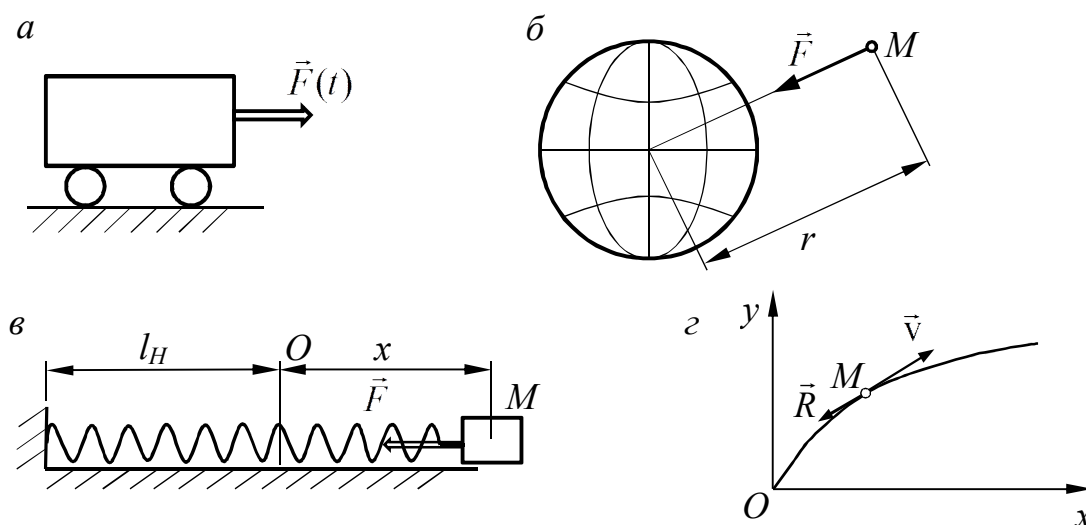


Рис. 14.1

Чаще всего на движущуюся материальную точку одновременно действуют несколько сил различных типов. Так, в случае свободных колебаний точки (рис. 14.1,*в*) на нее действуют сила упругости и сила сопротивления движению, в случае движения материальной точки, брошенной под углом к горизонту (рис. 14.1,*г*), на нее действуют сила тяжести и сила сопротивления среды и т.д.

При изучении законов движения материальные тела мы будем заменять моделями этих тел. Используются в динамике следующие три модели:

1) *материальная точка* – точка, имеющая массу, – простейший объект реального тела. Материальной точкой, как известно из физики, называется тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Практически тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела, велики по сравнению с размерами самого тела. Например, можно считать материальной точкой искусственный спутник Земли (ИСЗ) в задаче о движении его вокруг земного шара, артиллерийский снаряд при определении дальности его полета и т. д.;

2) *абсолютно твердое тело* – реальное тело, у которого в процессе движения можно пренебречь изменением его формы (деформацией). Модель абсолютно твердого тела использовалась нами ранее в статике и кинематике;

3) *механическая система* – мысленно выделенная по какому-нибудь признаку совокупность взаимодействующих материальных точек или тел. Материальное тело (твердое, упругое, жидкое, газообразное), любая машина, механизм, любое сооружение в динамике рассматриваются как механические системы.

Различают неизменяемые и изменяемые механические системы. В неизменяемой механической системе расстояния между точками остаются неизменными в процессе движения. Примером такой системы является абсолютно твердое тело.

В изменяемой системе расстояния между точками изменяются: упругие, жидкие тела; механизмы, составленные из твердых тел, и т. д.

К понятию об инертности тел мы приходим, сравнивая результаты действия одной и той же силы на разные материальные тела. Опыт показывает, что эти тела за один и тот же промежуток времени пройдут разные расстояния и будут иметь различные скорости. *Инертность* представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять свою скорость под действием приложенных сил. Это свойство инертности зависит от массы тела, которая может служить мерой инертности.

14.2. Законы механики Галилея–Ньютона (аксиомы динамики)

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения опытов и наблюдений за движением тел и проверенные всей практикой человечества. Эти законы впервые четко сформулированы И. Ньютоном в сочинении "Математические начала натуральной философии" (1687).

Эти законы, обычно называемые законами Ньютона, носят аксиоматический характер, не требуют математических доказательств. Сформулированы эти законы для простейшего материального объекта – материальной точки.



И. Ньютон (1643–1727)



Г. Галилей (1564–1642)

Творчество Ньютона по праву относится к вершинам научной мысли. В нем сочетались мастерство экспериментатора и смелость мысли теоретика. С именем Ньютона связывают установление основных положений классической механики. Ньютон сформулировал целую научную программу, под влиянием которой физика развивалась в XVII – XIX вв.

В первой половине XVII в. были получены важные конкретные научные результаты (создан телескоп, установлен закон преломления света, определены законы движения планет и др.). В то же время активно формировалась новая методология науки. На этом фоне особенно выделяется деятельность ученого, который в своей исследовательской практике вырабатывал эту методологию и значительностью сделанных им открытий доказывал ее эффективность. Этим ученым был итальянец Г. Галилей.

I. Закон инерции

Первый закон, сформулированный еще до Ньютона Галилеем в 1638 году, описывает простейшее из возможных движений – так называемое инерциальное движение точки.

Материальная точка, на которую не действуют силы, находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

$$\vec{v} = \vec{v}_0(\text{const}) \quad \text{или} \quad \vec{v} = 0.$$

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется инерциальной системой отсчета. Для большинства технических задач систему отсчета, связанную с Землей, можно приближенно считать инерциальной.

II. Закон зависимости между силой и ускорением (основное уравнение динамики точки)

Пусть на точку действует одна сила (рис. 14.2).

Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, имеющее направление силы и пропорциональное этой силе:

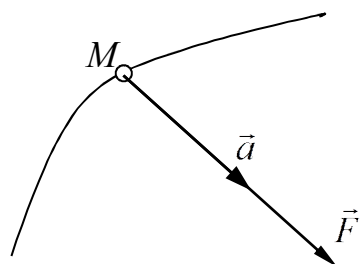


Рис. 14.2

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (14.1)$$

Записанное уравнение называют также *основным уравнением динамики точки*.

Этот закон имеет место только в инерциальной системе отсчета. Из этого закона видно, что масса m материальной точки является мерой инертности: $a = \frac{F}{m}$.

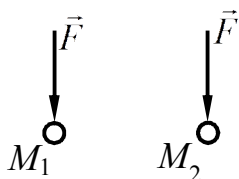


Рис. 14.3

Если к различным материальным точкам с массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) приложить одинаковые силы \vec{F} , то ускорения, полученные точками, будут различными, $a_1 < a_2$ (рис. 14.3). Чем больше масса точки, тем меньшее ускорение получает точка при действии силы \vec{F} .

Массу точки можно найти по ускорению, которое она получает под действием известной силы. В частности, такой силой является сила тяжести P . Под действием силы P вблизи Земли ускорение свободно падающей точки равно g . Тогда $m = \frac{P}{g}$.

Заметим, что сила тяжести P , как и ускорение g , изменяются с изменением широты места и высоты над уровнем моря, а величина массы m будет одинаковой.

III. Закон равенства действия противодействию

Силы взаимодействия двух материальных точек всегда действуют по одной прямой, противоположно направлены и численно равны между собой. Силы взаимодействия двух движущихся точек M_1 и M_2 (рис. 14.4):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad F_1 = F_2.$$

Аналогичная аксиома была сформулирована в статике. Отметим, что силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не уравновешиваются, так как они приложены к различным телам (точкам). Применяв второй закон Ньютона, получим $m_1 a_1 = F_1$ и $m_2 a_2 = F_2$, но в силу равенства $F_1 = F_2$ имеем $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ – ускорения точек будут обратно пропорциональны массам.

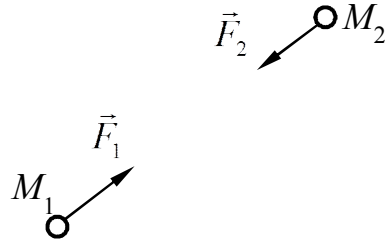


Рис. 14.4

IV. Закон независимости действия сил

Пусть на движущуюся точку действуют одновременно несколько сил, каждая из которых сообщает соответствующее ускорение:

$$(\bullet) M \rightarrow m \rightarrow \{\vec{F}_s\} \rightarrow \{\vec{a}_s\} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Закон независимости: Если на материальную точку действуют несколько сил, то ускорение точки равно сумме ускорений от действия каждой из сил в отдельности:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad (14.2)$$

где $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}$; $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}$; ...; $\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}$.

Подставив эти значения ускорений, получим

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum \vec{F}_s. \quad (14.3)$$

Выражение (14.3) представляет собой основное уравнение динамики точки при действии на нее нескольких сил.

Выражение (14.3) можно записать в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (14.4)$$

где $\vec{F} = \sum \vec{F}_s$ – равнодействующая сил, действующих на точку.

Замечание. Законы Ньютона сформулированы для свободных материальных точек. Однако, приняв принцип освобожденности от связей, можно распространить применение основного уравнения динамики точки и на несвободные точки. Принцип освобожденности: не нарушая покоя или движения точек, можно отбросить наложенные на них связи и заме-

нить их действие введением соответствующих сил реакций. Тогда уравнение динамики точки примет вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N},$$

где \vec{F} – равнодействующая активных сил;

\vec{N} – равнодействующая сил реакций связей.

14.3. Основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета – уравнение относительного движения точки

Если изучается движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета, то в основное уравнение динамики помимо действующих сил нужно ввести добавочные силы – переносную и кориолисову силы инерции. Покажем это.

Пусть имеем две системы отсчета – основную $O_1x_1y_1z_1$ (инерциальную) и подвижную $Oxyz$ (неинерциальную) (рис. 14.5).

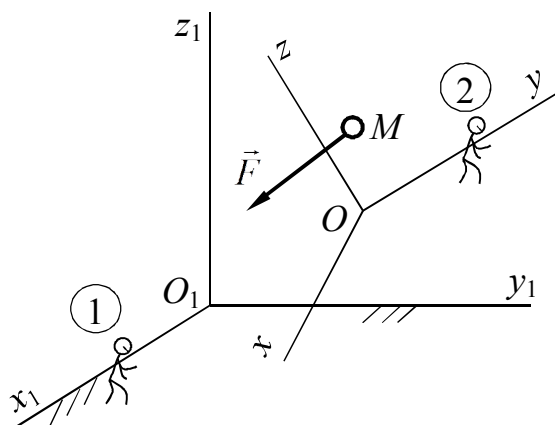


Рис. 14.5

На точку M действует сила \vec{F} . Точка участвует в сложном движении. В основной системе отсчета основное уравнение динамики

$$m\vec{a}_a = \vec{F}. \quad (14.5)$$

Абсолютное ускорение точки в основной системе отсчета по теореме Кориолиса:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad (14.6)$$

где \vec{a}_e – переносное;

\vec{a}_r – относительное;

\vec{a}_c – кориолисово ускорения.

Подставляя (14.6) в (14.5) и перенося в правую часть два слагаемых, запишем

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c).$$

Векторы $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ и $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$ называют соответственно переносной и кориолисовой силами инерции. Эти силы определяются движением подвижной системы отсчета $Oxyz$. В жизни человек может чувствовать действие этих сил, находясь, например, в трамвае, автобусе при резком торможении или ускорении последнего.

С учетом этого основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета запишется в виде

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (14.7)$$

Это уравнение называют *основным уравнением динамики относительного движения точки или вторым законом Ньютона в неинерциальной системе отсчета*.

Если точка находится в покое в подвижной системе отсчета, то уравнение относительного покоя

$$0 = \vec{F} + \vec{\Phi}_e. \quad (14.8)$$

Если переносное движение поступательное, неравномерное, то (14.7) примет вид

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e. \quad (14.9)$$

В случае, если переносное движение поступательное, равномерное, прямолинейное, то уравнение (14.7) можно представить в виде

$$m\vec{a}_r = \vec{F}. \quad (14.10)$$

В этом случае подвижная система $Oxuz$ является также инерциальной системой отсчета.

14.4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Рассмотрим движущуюся точку M массой m , на которую действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 14.6) (если точка несвободная, то в число сил входят и реакции, заменяющие отброшенные связи).

Основное уравнение динамики точки

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_s. \quad (14.11)$$

Выберем прямоугольную систему декартовых координат и спроецируем основное уравнение динамики точки на каждую из координатных осей:

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= \sum X_s, \\ ma_y &= \sum Y_s, \\ ma_z &= \sum Z_s. \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

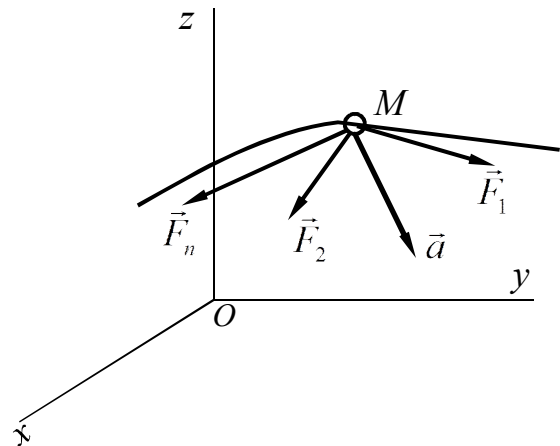


Рис. 14.6

Подставив известные из кинематики проекции ускорения на оси координат $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, получим

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= \sum X_s, \\ m \ddot{y} &= \sum Y_s, \\ m \ddot{z} &= \sum Z_s. \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями движения точки в декартовых координатах.

Если движение точки происходит в плоскости xOy (рис. 14.7), то уравнений движения будет два:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= \sum X_s, \\ m \ddot{y} &= \sum Y_s, \end{aligned} \right\} \quad (14.14)$$

причем $\sum Z_s \equiv 0$.

Если точка движется прямолинейно (рис. 14.8), то уравнение движения будет одно:

$$m \ddot{x} = \sum X_s, \quad (14.15)$$

причем $\sum Y_s \equiv 0$, $\sum Z_s \equiv 0$.

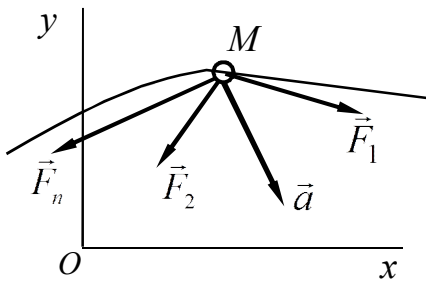


Рис. 14.7

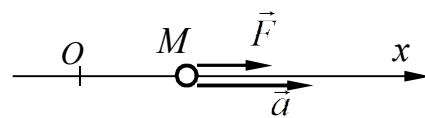


Рис. 14.8

В том случае, когда известна траектория точки, используют естественные оси координат, связанные с движущейся точкой (касательную, главную нормаль и бинормаль).

Проецируя основное уравнение динамики на естественные оси координат, получим

$$ma_\tau = \sum F_{s\tau}, \quad ma_n = \sum F_{sn}, \quad ma_b = \sum F_{sb}, \quad (14.16)$$

где $F_{s\tau}, F_{sn}, F_{sb}$ – проекции силы на касательную, главную нормаль, бинормаль.

Из кинематики известны проекции ускорения на естественные оси координат:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (14.17)$$

Подставляя (14.17) в (14.16), получаем

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum F_{s\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{sn}, \quad 0 = \sum F_{sb}. \quad (14.18)$$

Эти уравнения были впервые получены Эйлером и обычно называются естественными уравнениями движения материальной точки.

Две основные задачи динамики

В динамике решаются две основные задачи:

- 1) по заданному движению точки или системы определить силы, вызывающие это движение;
- 2) по заданным силам, действующим на точку или систему, определить движение этих объектов.

Обе указанные задачи решаются с помощью основного уравнения динамики точки или общих теорем, вытекающих из него.

Рассмотрим схему решения этих задач для движения одной материальной точки.

14.5. Первая задача динамики точки

Постановка задачи: *Зная массу точки и закон ее движения, определить модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.*

1. Рассмотрим решение задачи в прямоугольной, декартовой системе координат, когда движение точки задано координатным способом.

Дано: m – масса точки; $x(t), y(t), z(t)$ – закон движения точки.

Найти: \vec{F} .

Решение

а. Определяем проекции равнодействующей на оси координат, вычисляя производные от заданных функций – уравнений движения:

$$F_x = m \ddot{x}, \quad F_y = m \ddot{y}, \quad F_z = m \ddot{z}.$$

б. Вычисляем модуль равнодействующей через проекции:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

в. Определяем направление равнодействующей:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

2. Аналогично решается первая задача динамики с использованием естественных уравнений движения.

Дано: m ; траектория точки; $s(t)$; ρ – радиус кривизны траектории.

Найти: \vec{F} .

а. Проекция равнодействующей на естественные оси:

$$F_\tau = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad F_n = m \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

б. Модуль равнодействующей: $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}$.

в. Направление равнодействующей в соприкасающейся плоскости:

$$\cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{n}) = \frac{F_n}{F}.$$

Еще раз отметим, что уравнения (14.18) используются при естественном способе задания движения точки.

Пример 14.1. Движение материальной точки массы m задано уравнениями $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$, где a , b , k – известные постоянные величины. Определить силу, вызывающую такое движение.

Решение. Если из заданных уравнений движения исключить время t , то получим уравнение траектории точки. В данном случае, используя формулу $\cos^2 kt + \sin^2 kt = 1$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. траекторией точки будет эллипс с центром в начале координат и полуосями a и b (рис. 14.9).

Для определения действующей силы запишем основное уравнение динамики точки в проекциях на координатные оси (14.14):

$$F_x = m \ddot{x}; \quad F_y = m \ddot{y},$$

где $\ddot{x} = -ak^2 \cos kt$; $\ddot{y} = -bk^2 \cos kt$ или $\ddot{x} = -k^2 x$; $\ddot{y} = -k^2 y$.

Следовательно, $F_x = -mk^2x$; $F_y = -mk^2y$.

Модуль силы $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2}$, но $\sqrt{x^2 + y^2} = OA = r$ – модуль радиуса-вектора точки.

Тогда модуль силы $F = mk^2r$, т.е. сила пропорциональна расстоянию от точки до начала координат.

Направление силы получим, вычислив

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Отсюда вытекает, что сила направлена противоположно радиусу-вектору $\vec{r} = \vec{OA}$, что показано на рисунке.

Следовательно, $\vec{F} = -mk^2\vec{r}$, т. е. на точку действует переменная сила, направленная к началу координат (центральная сила) и пропорциональная отклонению от этого центра. Такую силу можно реализовать с помощью упругой нити.

Пример 14.2. Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости $v = 200$ м/с, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиусом $R = 500$ м в вертикальной плоскости. Масса летчика $m = 80$ кг. Какова наибольшая сила, прижимающая летчика к креслу?

Решение. Рассмотрим произвольное положение M летчика (материальной точки), определяемое углом φ , отсчитываемым от горизонтали OA (рис. 14.10). В этом положении на него действуют сила тяжести $P = mg$ и реакция кресла, состоящая из двух сил N_n и N_τ , направленных по нормали и касательной к окружности. Составим основное уравнение динамики точки в проекциях на естественные оси координат (14.18):

$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \varphi - N_\tau, \quad m \frac{v^2}{R} = N_n - P \sin \varphi,$$

откуда

$$N_\tau = mg \cos \varphi - m \frac{dv}{dt}, \quad N_n = mg \sin \varphi + \frac{mv^2}{R}.$$

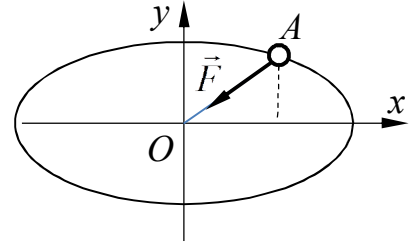


Рис. 14.9

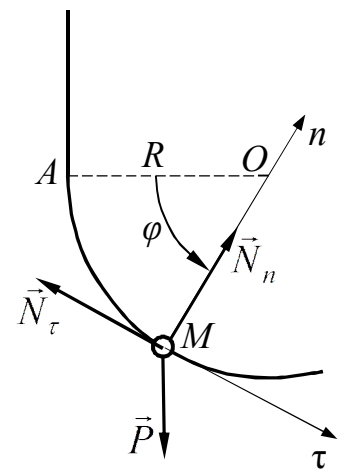


Рис. 14.10

Максимальная сила, прижимающая летчика к креслу и равная по третьему закону Ньютона реакции кресла, будет достигнута при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Считая движение примерно равномерным, получим

$$N_{\tau} = 0, \quad N_n = mg + \frac{mv^2}{R}.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$N_n = 80(9.8 + \frac{200^2}{500}) = 7,2 \text{ кН}.$$

14.6. Вторая задача динамики точки

Постановка задачи: *Зная массу точки и силы, действующие на нее, определить ее движение.*

Рассмотрим решение этой задачи в прямоугольной декартовой системе координат.

Дано: m – масса точки; $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ – равнодействующая сил, являющаяся известной функцией времени, положения точки и ее скорости.

Найти: $x(t), y(t), z(t)$ – уравнения движения точки.

Задача решается с помощью дифференциальных уравнений движения, составляемых для произвольного момента времени:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \ddot{y} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \ddot{z} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Отметим, что в правых частях уравнений записаны проекции равнодействующей на оси координат.

Для нахождения уравнений движения точки нужно проинтегрировать эту систему уравнений и получить общее решение. Как известно из математики, общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные, а общее решение системы трех уравнений второго порядка – шесть произвольных постоянных. Следовательно, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

В частных случаях может оказаться, что не все произвольные постоянные будут входить в каждое из решений. Например, если в первом уравнении правая часть будет зависеть только от (t, x, \dot{x}) , то при интегрировании независимого уравнения

$$m \ddot{x} = X(t, x, \dot{x})$$

решение запишется так: $x = x(t, C_1, C_2)$ и т.д.

Таким образом, после интегрирования получаем семейство решений (траекторий точки), зависящее от произвольных параметров – величин $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Для того чтобы выделить из общего решения частное решение (конкретную траекторию), произвольные постоянные определяют по начальным условиям.

Обычно в некоторый момент времени $t = t_0$ (часто берут $t = 0$) задают положение и скорость точки, т.е. при $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

$$\dot{x} = v_{0x}, \quad \dot{y} = v_{0y}, \quad \dot{z} = v_{0z}.$$

Пользуясь начальными условиями, находят все постоянные C_1, \dots, C_6 и, подставив их в общее решение, получают искомый закон движения.

Если решается задача о движении точки в плоскости, то дифференциальных уравнений будет два и четыре постоянных интегрирования найдутся из начальных условий при $t = t_0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \dot{x} = v_{0x}, \quad \dot{y} = v_{0y}.$$

В случае прямолинейного движения точки имеется одно дифференциальное уравнение, и в его решение входят две произвольные постоянные, определяемые из условий при $t = t_0$:

$$x = x_0, \quad \dot{x} = v_{0x}.$$

Итак, для решения второй основной задачи динамики точки нужно знать не только *силы*, но еще и *начальные условия*.

Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений является в общем случае очень трудной. Даже в простейшем случае прямолинейного движения дифференциальное уравнение удастся решить лишь при определенных зависимостях силы от t, x, \dot{x} . Во многих задачах инте-

грирование производят приближенно или выполняют его с использованием программных продуктов (например, Matematica, MatLab и др.).

Можно рекомендовать следующий план решения задач на нахождение уравнений движения материальной точки:

1) выбрать материальную точку, движение которой будет рассматриваться, установить систему отсчета (инерциальную или неинерциальную) и изобразить точку в *произвольный* момент времени. Начало координат, как правило, рекомендуется совмещать с начальным положением точки, положительные направления координатных осей выбрать в сторону движения точки;

2) показать на рисунке все силы, приложенные к изучаемой точке (активные и реакции связей);

3) составить дифференциальные уравнения движения точки в той или иной форме и записать начальные условия (начальные координаты и проекции начальной скорости на координатные оси);

4) проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, найти с помощью начальных условий произвольные постоянные интегрирования и вычислить частное решение – искомый закон движения точки;

5) определить требуемые в условии величины и провести, если это нужно, исследование решения.

Пример 14.3. С поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 запущено тело массой m . Найти высоту подъема тела, полагая, что на него действует сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тела от центра Земли. Сопротивлением движению пренебречь.

Решение. 1. Тело будем считать материальной точкой. Начало координат возьмем в начальном положении точки. Ось координат Ox свяжем с

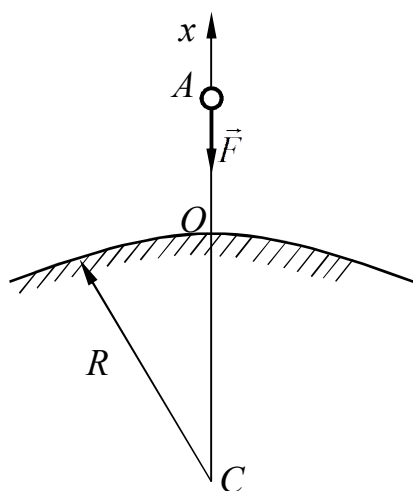


Рис. 14.11

Землей и направим в сторону движения, т. е. вертикально вверх. Изобразим точку в произвольный момент времени, $OA = x$ – координата точки (рис. 14.11).

2. На тело действует сила притяжения

$$F = \frac{k}{(R + x)^2}, \text{ где } k \text{ – коэффициент пропорциональности; } R \text{ – радиус Земли. Когда тело находится на поверхности Земли (} x = 0 \text{), сила притяжения равна } mg \text{ и, следовательно,}$$

$$mg = \frac{k}{R^2}, \text{ откуда } k = mgR^2.$$

3. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки (14.15) в данном случае примет вид

$$m \ddot{x} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}.$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$.

4. Проинтегрируем дифференциальное уравнение с помощью замены: $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ (понижение порядка уравнения).

Тогда $v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$ и, разделяя переменные, получим

$$v dv = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} dx.$$

Интегрируя, найдем общее решение:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + C.$$

Произвольную постоянную C определим по начальным условиям:

$$C = \frac{v_0^2}{2} - gR.$$

5. Высоту подъема $x = H$ найдем из условия, что в наивысшей точке скорость равна нулю. Тогда

$$0 = \frac{gR^2}{R+H} + \frac{v_0^2}{2} - gR,$$

откуда

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Если задать начальную скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$, то высота подъема $H = \infty$, т. е. тело, запущенное с такой скоростью, не возвратится на Землю. Эту скорость называют второй космической скоростью. Ее значение при $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $R = 6480 \text{ км}$ будет $11,2 \text{ км/с}$.

При первой космической скорости $v_0 \approx 7,9 \text{ км/с}$ тело становится спутником Земли.

Пример 14.4. Движение тяжелой материальной точки, брошенной под углом к горизонту.

Материальная точка массой m брошена с поверхности Земли в вертикальной плоскости с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определить закон движения точки, учитывая силу сопротивления среды (воздуха), направленную противоположно скорости и пропорциональную первой степени скорости $\vec{R} = -bm\vec{v}$, где b – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально (зависит от плотности среды, формы тела).

Такая задача возникает, например, при исследовании движения артиллерийского снаряда в воздухе (задача внешней баллистики).

Решение. 1. Свяжем систему отсчета с Землей, начало координат совместим с начальным положением точки. В вертикальной плоскости, проходящей через вектор начальной скорости \vec{v}_0 , проведем горизонтальную ось Ox и вертикальную ось Oy . Изобразим материальную точку в произвольном положении $A(x, y)$ (рис. 14.12).

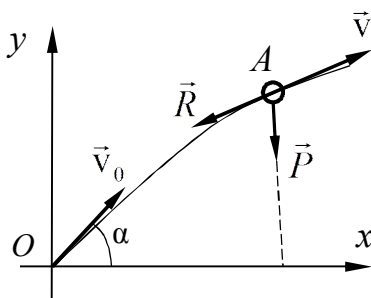


Рис. 14.12

2. На материальную точку действуют две силы: сила тяжести $P = mg$ и сила сопротивления $\vec{R} = -bm\vec{v}$, проекции которой на оси координат

$$R_x = -bm v_x = -bm \dot{x};$$

$$R_y = -bm v_y = -bm \dot{y}.$$

3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в плоскости (14.14) получаем из рисунка:

$$m \ddot{x} = P_x + R_x = -bm \dot{x};$$

$$m \ddot{y} = P_y + R_y = -mg - bm \dot{y}$$

или, разделив на массу,

$$\ddot{x} + b \dot{x} = 0; \tag{14.21}$$

$$\ddot{y} + b \dot{y} = -g.$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x = 0$, $y = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y} = v_0 \sin \alpha$.

4. Эти уравнения интегрируются независимо друг от друга с помощью различных методов. Можно, как в предыдущем примере, использовать понижение порядка уравнения и метод разделения переменных. Можно применить теорию решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение (квадратное) $\lambda^2 + b\lambda = 0$, корни которого $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -b$.

Тогда общее решение первого уравнения можно представить в виде

$$x = C_1 + C_2 e^{-bt}. \quad (14.22)$$

Второе уравнение является неоднородным, и его общее решение складывается из двух: $y = y_1 + y_2$, где y_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 = 0$ и y_2 – частное решение полного уравнения, зависящее от вида правой части. Будем искать y_2 в виде $y_2 = At$, где A – постоянная величина. Тогда $\dot{y}_2 = A$, $\ddot{y}_2 = 0$. Подставив решение y_2 в дифференциальное уравнение, получаем тождество $0 + bA \equiv -g$ и находим $A = -\frac{g}{b}$.

Таким образом, общее решение второго уравнения

$$y = C_3 + C_4 e^{-bt} - \frac{g}{b} t. \quad (14.23)$$

Вычислим производные \dot{x} , \dot{y} :

$$\dot{x} = -bC_2 e^{-bt}; \quad \dot{y} = -bC_4 e^{-bt} - \frac{g}{b}. \quad (14.24)$$

Подставим в (14.22)–(14.24) начальные условия: $C_1 + C_2 = 0$, $C_3 + C_4 = 0$, $-bC_2 = v_0 \cos \alpha$, $-bC_4 - \frac{g}{b} = v_0 \sin \alpha$,

откуда

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{b} \cos \alpha;$$

$$C_3 = -C_4 = \frac{1}{b} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{b} \right).$$

Итак, искомые уравнения движения материальной точки:

$$x = \frac{v_0}{b} \cos \alpha (1 - e^{-bt});$$

$$y = \left(\frac{g}{b^2} + \frac{v_0}{b} \sin \alpha \right) (1 - e^{-bt}) - \frac{g}{b} t. \quad (14.25)$$

5. Если пренебречь силой сопротивления, т. е. рассмотреть движение в пустоте, то дифференциальные уравнения движения будут следующими:

$\ddot{x} = 0$; $\ddot{y} = -g$. Их решение легко получить при тех же начальных условиях:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив время t , получим уравнение траектории

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Это уравнение параболы. По уравнениям (14.25) можно построить траекторию точки в среде с линейным законом сопротивления, так называемую баллистическую кривую (рис. 14.13).

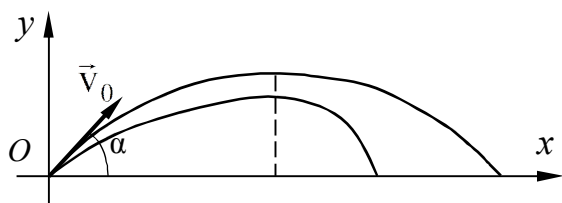


Рис. 14.13

При других законах изменения силы сопротивления $R = f(v)$ дифференциальные уравнения движения будут более сложными. Они решаются (интегрируются) обычно численными методами.

Пример 14.5. Треугольная призма 1 движется прямолинейно по горизонтальной плоскости равноускоренно с ускорением a_1 . На боковой грани призмы находится груз 2 (материальная точка) массой m . Определить закон движения груза по этой грани, пренебрегая трением и считая угол α известным (рис. 14.14).

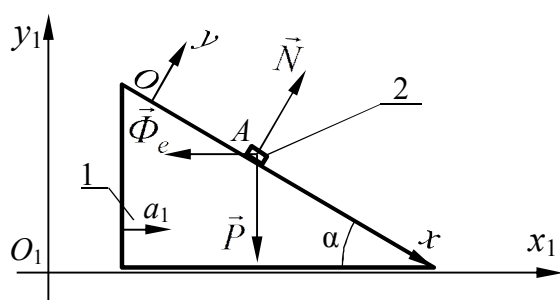


Рис. 14.14

Решение. 1. Рассмотрим движение груза и введем системы отсчета: Oxy – подвижную (неинерциальную), связанную с призмой, и $O_1x_1y_1$ – неподвижную (инерциальную). Изобразим груз в произвольный момент времени, считая, что скольжение идет вниз: $OA = x$ – координата относительного движения груза.

2. На груз действуют силы: $P = mg$ и N – реакция гладкой грани.

3. Основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета (14.7) имеет вид $m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c$, где $\Phi_c = 0$ – кориолисова сила

инерции, т.к. переносное движение поступательное; $\Phi_e = ma_1$ – переносная сила инерции, направленная противоположно вектору \vec{a}_1 .

Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \Phi_e \cos \alpha$$

или $\ddot{x} = g \sin \alpha - a_1 \cos \alpha = a_r = \text{const.}$

4. Итак, относительное движение груза по боковой грани призмы будет равнопеременным: $x = \frac{a_r t^2}{2}$, если считать, что при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = 0$.

5. Исследуем, как будет проходить относительное движение при различных ускорениях призмы. Если $a_1 \cos \alpha < g \sin \alpha$, то $a_r > 0$ и движение будет проходить вниз по грани ($a_1 < g \tan \alpha$).

При $a_1 \cos \alpha > g \sin \alpha$ ($a_1 > g \tan \alpha$) ускорение $a_r < 0$ и движение будет вверх по грани. Если $a_1 \cos \alpha = g \sin \alpha$ ($a_1 = g \tan \alpha$), то $a_r = 0$ и $x = 0$, т. е. груз будет находиться в относительном покое на движущейся призме.

Пример 14.6. Трубка 1 вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 14.15). Внутри трубки находится шарик 2. Масса шарика m . В начальный момент времени скорость шарика относительно трубки равнялась нулю, а расстояние от оси вращения – l . Определить закон движения шарика относительно трубки и силу взаимодействия его с трубкой. Трением пренебечь.

Решение. 1. Для изучения движения шарика введем две системы отсчета: подвижную – $Ox_1y_1z_1$, связанную с вращающейся трубкой, и неподвижную – $Ax_1y_1z_1$, связанную с опорами A и B . Изобразим шарик в произвольный момент времени, $OM = x$ – координата шарика относительно трубки. Подвижная система отсчета будет неинерциальной.

2. На шарик действуют сила тяжести $P = mg$ и сила давления со стороны трубки, которая разлагается на две составляющие N_y и N_z (составляющая $N_x = 0$, т. к. трубка предполагается гладкой).

3. Для составления уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета нужно, согласно (14.7), добавить две силы инерции: переносную $\vec{\Phi}_e$ и кориолисову $\vec{\Phi}_c$.

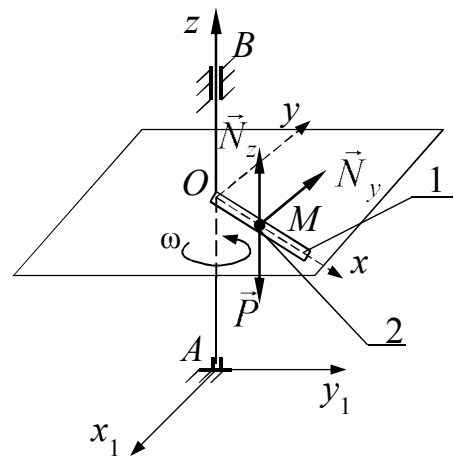


Рис. 14.15

В рассматриваемой задаче переносная сила инерции $\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_e^\tau$, где $\Phi_e^n = m\omega^2 x$, $\Phi_e^\tau = m\epsilon x = 0$, т. к. $\epsilon = \dot{\omega} = 0$.

Кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c = -m2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, ее модуль $\Phi_c = 2m\omega \dot{x}$. Направления сил инерции показаны на рис. 14.16.

Спроецируем основное уравнение динамики точки $m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c$ на подвижные оси координат:

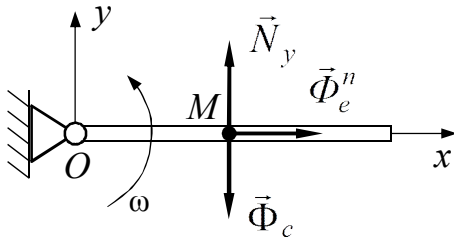


Рис. 14.16

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \Phi_e^n = m\omega^2 x, \\ 0 &= N_y - \Phi_c, \\ 0 &= N_z - P. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Таким образом, движение описывается одним уравнением

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$, которое является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Начальные условия: при $t = 0$ $x = l$, $\dot{x} = 0$.

4. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ и его корни $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$ – действительные и различные числа. В этом случае общее решение будет таким: $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ и $\dot{x} = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t})$.

Подставив начальные условия, найдем, что

$$l = C_1 + C_2, \quad 0 = \omega(C_1 - C_2) \quad \text{или} \quad C_1 = C_2 = 0,5l.$$

Следовательно, закон относительного движения шарика

$$x = 0,5l(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = l \operatorname{ch} \omega t,$$

где $\operatorname{ch} \omega t$ – гиперболический косинус.

Силу взаимодействия \vec{N} шарика с трубкой найдем из (14.26):

$$\begin{aligned} N_y &= \Phi_c = 2m\omega \dot{x} = m\omega^2 l(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = 2m\omega^2 l \operatorname{sh} \omega t, \\ N_z &= P = mg, \\ N &= \sqrt{N_y^2 + N_z^2}. \end{aligned}$$

Сила N зависит от времени и при движении шарика возрастает.

Вопросы для самопроверки

1. Как записывается основное уравнение динамики точки при действии на нее одной силы, нескольких сил?
2. Как записываются дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах, в проекциях на естественные оси? Когда применяются естественные уравнения движения?
3. Какие две задачи решаются в динамике, как они формулируются для материальной точки?
4. Автомобиль движется по выпуклому мосту. В верхней точке моста радиус кривизны равен ρ , скорость автомобиля v . При какой скорости может произойти опрокидывание автомобиля?
5. Какие дополнительные величины нужно знать для определения закона движения точки при известных силах, действующих на точку?
6. Как записывается основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета? За счет чего появляются силы инерции, прикладываемые к точке?
7. Шарик подвешен с помощью нерастяжимой нити к потолку вагона, движущегося поступательно прямолинейно с ускорением $a = 3 \text{ м/с}^2$. На какой угол отклонится нить во время движения?

Глава 15. Колебания материальной точки

Колебания являются одним из самых распространенных видов движения. Колебательное движение совершают части машин, вагоны, самолеты и их части, здания, мосты и другие сооружения. Подавляющее число поломок машин происходит в результате колебаний.

Колебательное движение может происходить у различных по физической природе объектов: твердые тела, звук, электрический ток и т.д.

В современной технике колебания с успехом используются для создания машин вибрационного действия: машины для уплотнения бетона и насыпей, грохоты для сортировки и просеивания, вибротранспортеры и т.д. Некоторые отрасли техники, например радиотехника, целиком основаны на теории колебаний. Современная теория колебаний представляет обширную и сложную область механики. В этой главе мы рассмотрим простейшую задачу о прямолинейном колебательном движении материальной точки. Решение этой задачи используется при исследовании колебаний механической системы.

На рис. 15.1 показаны примеры колебаний материальной точки: колебание груза на пружине (а), колебание математического маятника (б), колебание груза на упругой балке (в).

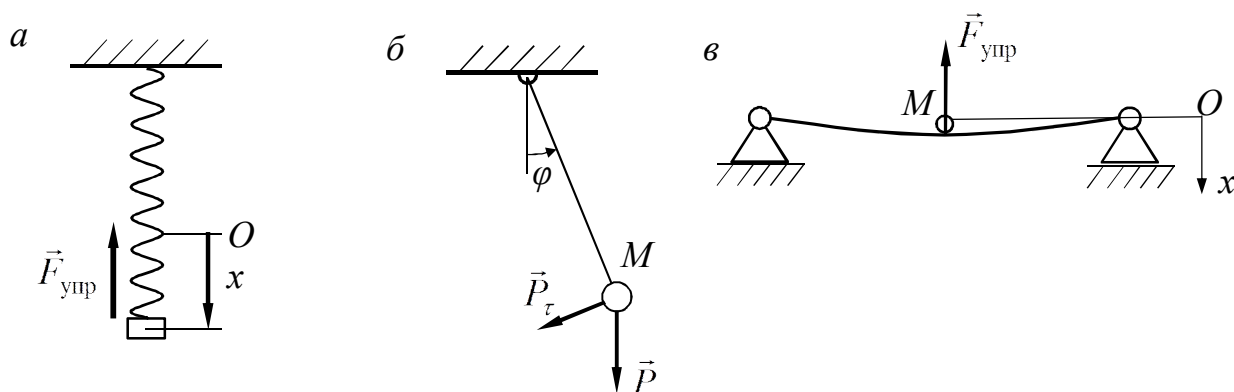


Рис. 15.1

Силы, действующие на точку при колебательном движении, можно в большинстве задач разделить на три группы: восстанавливающие, силы сопротивления и возмущающие силы.

Восстанавливающие силы – это силы, стремящиеся вернуть точку в равновесное положение, если она из него выведена. Эти силы зависят от положения (координат) точки. Примеры таких сил – силы упругости

$F = f(x)$ (рис. 15.1, а, в), составляющая силы тяжести \vec{P}_τ (тангенциальная) (рис. 15.1, б).

Силы сопротивления – силы, тормозящие движение, вязкого или сухого трения.

Возмущающие силы – это силы, являющиеся заданными функциями времени. Наиболее интересен и важен случай, когда эти силы являются периодическими функциями времени: $Q = Q(t + T)$.

Если на материальную точку действуют только восстанавливающие силы и силы сопротивления, то колебания называют *свободными* или *собственными*.

Если на точку, кроме того, действует еще возмущающая сила, то колебания называют *вынужденными*.

15.1. Свободные (собственные) прямолинейные колебания материальной точки

Рассмотрим точку M массой m , на которую действуют восстанавливающая сила $\vec{F}(x)$ и сила сопротивления среды \vec{R} (рис. 15.2). Заданы начальные условия: при $t = 0$ $x = x_0$,

$\dot{x} = v_0$. Допустим, что восстанавливающая сила \vec{F} является линейной функцией координаты x , т. е. $F = c|x|$, где c – коэффициент пропорциональности, называемый также коэффициентом жесткости пружины. Единица измерения коэффициента c – Н/м. Начало координат – точка O – выбрано в равновесном положении точки M . Силу сопротивления будем также считать линейной функцией скорости: $\vec{R} = -b\vec{v}$, где b – постоянный коэффициент, характеризующий сопротивление вязкой среды, называемый коэффициентом сопротивления. Его единица измерения – $\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$.

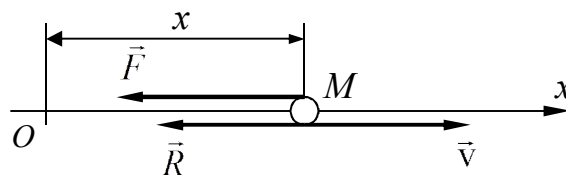


Рис. 15.2

Для нахождения закона движения точки составим дифференциальное уравнение прямолинейного движения:

$$m\ddot{x} = \sum X_s, \quad m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}. \quad (15.1)$$

Заметим, что уравнение будет иметь такой вид для любого положения точки M ($x > 0$ и $x < 0$) и любого направления ее движения

($\dot{x} > 0$ и $\dot{x} < 0$). Рекомендуем это проверить самостоятельно. Разделив на m и введя обозначения $\frac{b}{m} = 2n$, $\frac{c}{m} = k^2$, получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (15.2)$$

Уравнение (15.2) представляет собой ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение его ищем в форме Эйлера $x = e^{rt}$, получаем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0, \quad (15.3)$$

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (15.4)$$

В зависимости от числовых значений n и k имеем четыре случая корней:

- 1) $n = 0$ – чисто мнимые корни;
- 2) $n < k$ – комплексные корни;
- 3) $n > k$ – вещественные и различные корни;
- 4) $n = k$ – вещественные и равные корни.

Поскольку коэффициент n (коэффициент демпфирования) характеризует сопротивление среды, то эти случаи можно обозначить как:

- 1) случай отсутствия сопротивления;
- 2) случай малого сопротивления ($n < k$);
- 3) случай большого сопротивления ($n > k$);
- 4) случай критического сопротивления ($n = k$).

Случай 1. Свободное колебание в среде без сопротивления ($n = 0$).

В этом случае на точку действует только восстанавливающая сила (рис. 15.3), и дифференциальное уравнение движения имеет вид

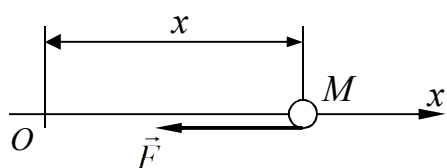


Рис. 15.3

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (15.5)$$

Корни характеристического уравнения:

$r_1 = ki$, $r_2 = -ki$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Общее решение уравнения (15.5):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (15.6)$$

Произвольные постоянные получим из

начальных условий: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, следовательно, $x_0 = C_1$, $v_0 = kC_2$ и

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (15.7)$$

Приведем это решение к *амплитудной форме*, для чего вместо C_1 и C_2 введем новые постоянные a и α :

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha,$$

откуда

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2}.$$

Подставив в решение C_1 и C_2 , получим

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (15.8)$$

где $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{v_0}.$

Итак, при отсутствии сопротивления точка совершает гармонические колебания с амплитудой a и начальной фазой α , зависящими от начальных условий.

Период колебаний T не зависит от начальных условий – это свойство называется *изохронностью* – и определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad (15.9)$$

где k – угловая, или циклическая, частота колебаний, равная числу колебаний за время $2\pi = 6.28$ сек. Графиком колебаний будет синусоида (рис. 15.4).

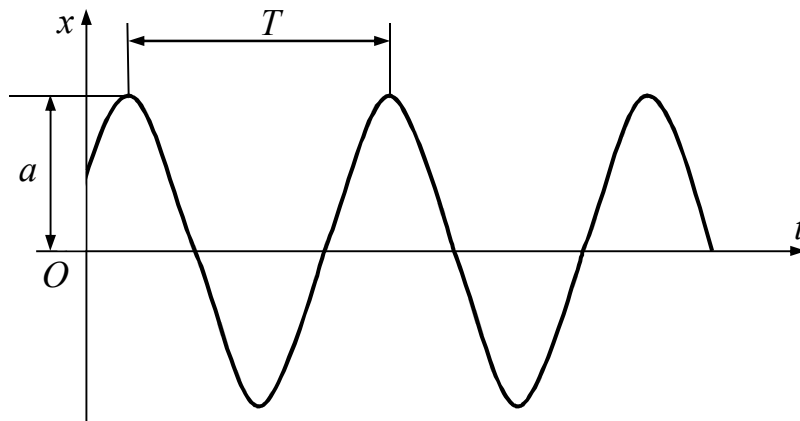


Рис. 15.4

Пример 15.1. Колебания груза на вертикальной невесомой пружине.

Груз весом P подвешивают к концу вертикальной недеформированной пружины и отпускают без начальной скорости (рис. 15.5).

Определить закон колебания груза, если коэффициент жесткости пружины равен c .

Решение

На рис. 15.5 изображены: a – пружина без груза, l_n – ее недеформированная длина; b – равновесное положение груза на пружине, где уравновешены сила тяжести и сила упругости (в статическом состоянии). В этом положении деформация пружины $\lambda_{ст}$, сила упругости $F = c\lambda_{ст}$, начало координат выбрано в положении равновесия.

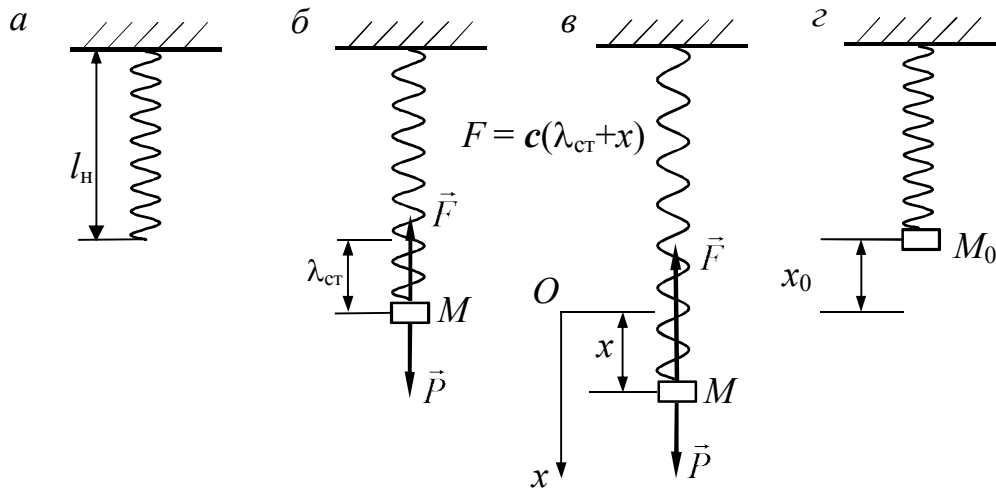


Рис. 15.5

Ось Ox направлена вниз. Из условия равновесия $\sum X_s = 0$; $mg - c\lambda_{ст} = 0$, получаем $\lambda_{ст} = \frac{mg}{c}$;

$в$ – произвольное положение груза на пружине, когда деформация пружины равна $\lambda_{ст} + x$. В этом положении сила упругости $F = c(\lambda_{ст} + x) = cx + P$;

$г$ – положение груза в начальный момент времени, что необходимо для записи начальных условий.

Дифференциальное уравнение движения, записанное для произвольного момента времени,

$$m \ddot{x} = \sum X_s, \quad m \ddot{x} = P - F,$$

$$m \ddot{x} = P - cx - P, \quad m \ddot{x} + cx = 0.$$

Разделив полученное уравнение на массу груза, получим

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2x = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Выведено дифференциальное уравнение свободных колебаний в среде без сопротивления.

Используя рис. 15.5,з, где показано положение точки M_0 , откуда началось движение груза, запишем начальные условия:

при $t = 0$ $x = -\lambda_{\text{ст}}$, $\dot{x} = 0$.

Решение полученного уравнения:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

и из начальных условий $C_1 = -\lambda_{\text{ст}}$; $C_2 = 0$.

Окончательный закон движения:

$$x = -\lambda_{\text{ст}} \cos kt,$$

где циклическая частота определяется формулой $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}$.

Период колебаний, не зависящий от начальных условий, $T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{g}}$.

Случай 2. Случай малого сопротивления ($n < k$).

Дифференциальное уравнение движения точки (рис. 15.2)

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0.$$

При $n < k$ корни характеристического уравнения $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ будут комплексными. Обозначив $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, запишем корни в виде

$$r_{1,2} = -n \pm k_1 i.$$

Общее решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (15.10)$$

Введя вместо произвольных постоянных C_1 , C_2 новые постоянные a и α , как было показано выше, $C_1 = a \sin \alpha$, $C_2 = a \cos \alpha$, получим общее решение в другой форме:

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (15.11)$$

Постоянные C_1 , C_2 или a , α определяются по начальным условиям:

при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Колебания, происходящие по полученному закону, называются *затухающими*, так как при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$ ($e^{-nt} \rightarrow 0$).

График этих колебаний показан на рис. 15.6.

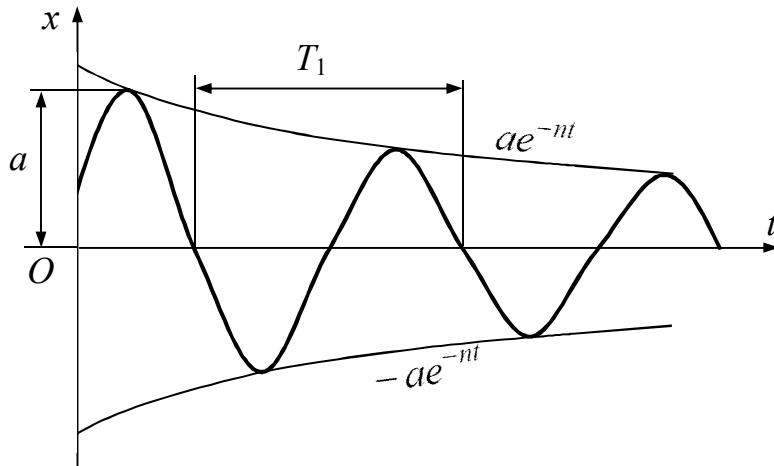


Рис. 15.6

График заключен между кривыми $x = ae^{-nt}$ и $x = -ae^{-nt}$, так как $\sin(k_1 t + \alpha)$ по модулю не может быть больше единицы.

Промежуток времени T_1 , равный периоду функции $\sin(k_1 t + \alpha)$, принято называть условным периодом затухающих колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}; \quad T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

За время T_1 точка совершит одно полное колебание (показано на графике). Из формулы для периода T_1 видно, что $T_1 > T$, т.е. сопротивление увеличивает период колебаний. Однако когда сопротивление мало ($n \ll k$), можно приближенно считать, что $T_1 \approx T$.

При затухающих колебаниях происходит уменьшение максимальных отклонений от равновесного положения точки. В качестве меры убывания этих отклонений принимают декремент колебаний D , равный отношению последовательных максимальных отклонений через период T_1 (или через полупериод).

Если обозначить t_i и $t_{i+1} = t_i + T_1$ как моменты времени, когда достигается максимальное отклонение от положения равновесия через период, то имеем

$$x_i = ae^{-nt_i} \sin(k_1 t_i + \alpha),$$

$$x_{i+1} = ae^{-nt_{i+1}} \sin(k_1 t_{i+1} + \alpha).$$

Учитывая $T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$, получим

$$x_{i+1} = ae^{-nt_i} e^{-nT_1} \sin(k_1 t_i + 2\pi + \alpha) = Dx_i,$$

где

$$D = e^{-nT_1}. \quad (15.12)$$

Величина D не зависит от выбора максимальных отклонений и от моментов времени t_i и t_{i+1} .

Таким образом, максимальные отклонения от положения равновесия убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем D . Часто в качестве меры затухания колебаний принимают модуль натурального логарифма D – логарифмический декремент колебаний

$$|\ln D| = nT_1. \quad (15.13)$$

Случай 3. Случай большого или критического сопротивления ($n \geq k$).

В этом случае корни характеристического уравнения (15.4) будут действительными и отрицательными:

$$\begin{aligned} r_1 &= -n + \sqrt{n^2 - k^2} < 0; \\ r_2 &= -n - \sqrt{n^2 - k^2} < 0. \end{aligned}$$

При $n = k$ корни будут одинаковыми:

$$r_1 = r_2 = -n < 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения (15.2) запишется так:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{при } n > k, \quad (15.14)$$

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-nt} \quad \text{при } n = k. \quad (15.15)$$

В обоих случаях в решение входят непериодические функции, движение не будет колебательным, но остается затухающим, так как при $t \rightarrow \infty$ координата $x \rightarrow 0$.

Графики возможных затухающих движений для различных начальных условий показаны на рис. 15.7.

Во всех случаях начальное положение точки $x_0 > 0$.

На рис. 15.7,а показан график движения точки с начальной скоростью \vec{v}_0 , совпадающей с положительным направлением оси x . Благодаря этой скорости точка вначале удаляется от положения равновесия, а затем под действием восстанавливающей силы постепенно приближается к этому положению.

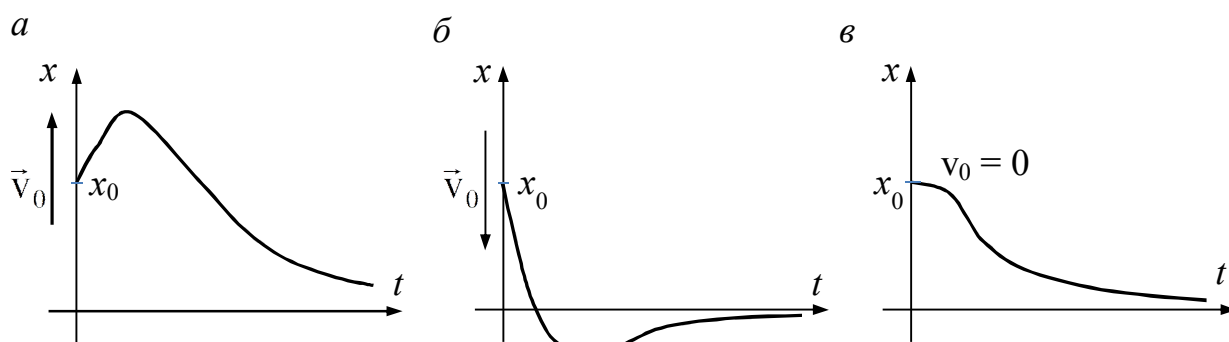


Рис. 15.7

График на рис. 15.7,б соответствует движению точки с начальной скоростью \vec{V}_0 , направленной противоположно положительному направлению оси x . При достаточно большой скорости точка может перейти положение равновесия, а затем при обратном движении приблизиться к этому положению.

На рис. 15.7,в показан график движения точки без начальной скорости.

Рассмотренное движение точки называют аперiodическим.

15.2. Вынужденные колебания материальной точки

Рассмотрим далее вынужденные колебания материальной точки; такие колебания происходят, если на точку действует помимо восстанавливающей силы и силы сопротивления еще возмущающая сила $Q = Q(t)$, где Q – заданная функция времени. Вынужденные колебания совершают, например, фундаменты машин, у которых имеются несбалансированные вращающиеся части, кузова автомобилей при движении по неровной дороге и многие другие тела.

Возмущающая сила может изменяться с течением времени по разным законам. Мы рассмотрим простой, но практически весьма важный случай, когда сила изменяется по гармоническому закону

$$Q_x = H \sin pt, \quad (15.16)$$

где Q_x – проекция силы на ось, вдоль которой происходит движение;
 $H = Q_{\max}$ – максимальное значение (амплитуда) этой силы;
 p – частота возмущающей силы.

Изобразим точку в произвольный момент времени, покажем действующие силы \vec{F} , \vec{R} , \vec{Q} и составим дифференциальное уравнение движения (рис. 15.8).

$$m \ddot{x} = F_x + R_x + Q_x, \quad \text{или} \quad (15.17)$$

$$m \ddot{x} = -cx - b \dot{x} + H \sin pt.$$

Введя обозначения: $\frac{b}{m} = 2n$,

где n – коэффициент затухания (демпфирования), c^{-1} ;

$\frac{c}{m} = k^2$, где k – циклическая частота свободных колебаний в среде без сопротивления, c^{-1} ;

$\frac{H}{m} = h$, где h – отношение амплитуды возмущающей силы к массе точки, m/c^2 , запишем уравнение (15.17) в виде

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = h \sin pt. \quad (15.18)$$

Уравнение (15.18) представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в среде с линейным сопротивлением.

Исследование вынужденных колебаний начнем со случая $n = 0$.

Случай 1. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний будет следующим:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt. \quad (15.19)$$

Уравнение (15.19) представляет собой НЛДУ второго порядка, его общее решение, как известно из математики, является суммой двух решений:

$$x = x_1 + x_2, \quad (15.20)$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения;

x_2 – частное решение полного неоднородного уравнения.

Общее решение x_1 однородного уравнения $\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0$ уже известно (15.6). Частное решение при $p \neq k$ будем искать в виде

$$x_2 = B \cos pt + C \sin pt. \quad (15.21)$$

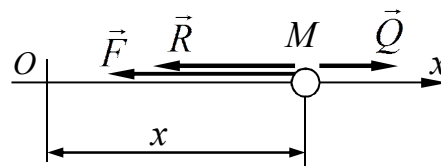


Рис. 15.8

Для определения неизвестных коэффициентов B и C вычислим \ddot{x}_2 и после подстановки x_2 , \ddot{x}_2 в (15.19) получим тождество

$$-Bp^2 \cos pt - Cp^2 \sin pt + k^2 B \cos pt + k^2 C \sin pt \equiv h \sin pt.$$

Из данного тождества, приравнивая коэффициенты при $\sin pt$ и $\cos pt$, получим

$$(k^2 - p^2)B = 0, \quad (k^2 - p^2)C = h,$$

откуда

$$B = 0; \quad C = \frac{h}{k^2 - p^2}. \quad (15.22)$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$ и общее решение уравнения (15.19)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \quad (15.23)$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

Записывая общее решение x_1 в виде (15.8), общее решение (15.19) представим как

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (15.24)$$

Полученное решение показывает, что колебания точки складываются из 1) собственных колебаний с частотой k и 2) вынужденных колебаний с частотой p , которая, как видно, равна частоте возмущающей силы. На рис. 15.9 показаны собственные, вынужденные колебания точки и результирующее движение согласно (15.24).

Амплитуда вынужденных колебаний $A_b = \frac{h}{|k^2 - p^2|}$. Если $k > p$, то

$x_2 = A \sin pt$, если же $k < p$, то $x_2 = -A \sin pt = A \sin(pt - \pi)$, т.е. при $k > p$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы $Q(t)$, а при $k < p$ сдвинута относительно фазы возмущающей силы на величину π .

Следует отметить, что вынужденные колебания не зависят от начальных условий.

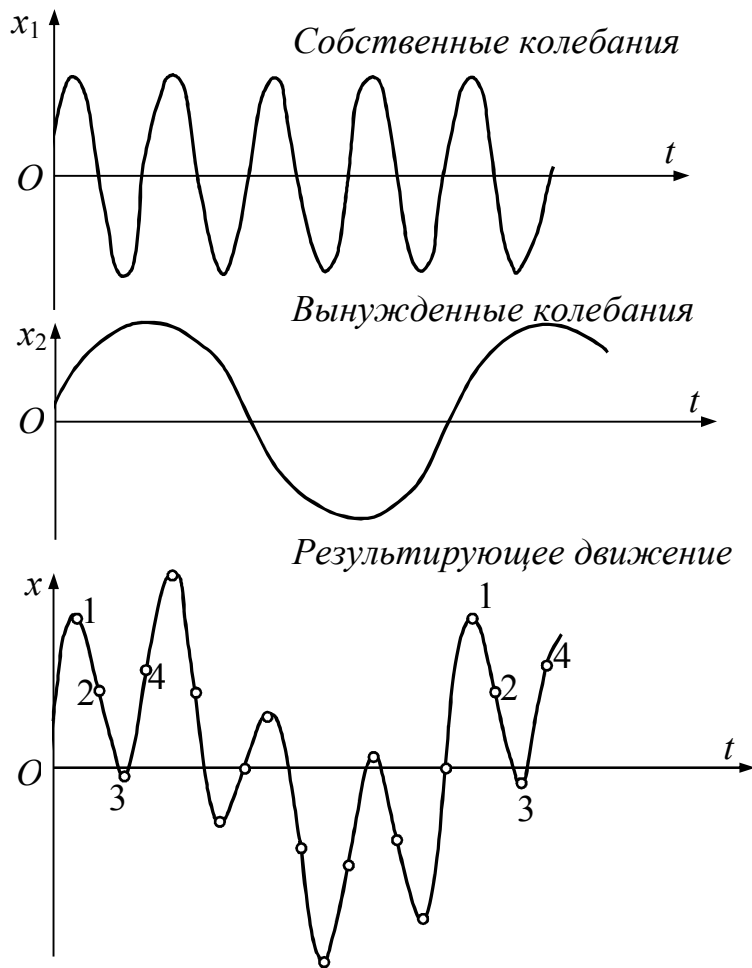


Рис. 15.9

Проследим, как изменяется амплитуда вынужденных колебаний в зависимости от частоты возмущающей силы p . Эту зависимость называют амплитудно-частотной характеристикой $A(p)$, которую часто получают в безразмерных координатах. Обозначим $z = \frac{p}{k}$ – отношение частот, которое называют коэффициентом расстройки, и запишем амплитуду A в виде

$$A = \frac{h}{k^2 \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{H}{mk^2 |1 - z^2|}. \quad (15.25)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{c}{m}$, перепишем выражение (15.25) в виде

$$A = \frac{H}{c |1 - z^2|}.$$

Отношение амплитуды возмущающей силы H к коэффициенту жесткости c есть статическое отклонение от равновесного положения точки, вызываемое постоянной силой $Q_{\max} = H$. Обозначим это отклонение $A_{\text{ст}}$. Действительно, при равновесии двух сил $Q_{\max} = H$ и $F_{\text{ст}} = cA_{\text{ст}}$ (рис. 15.10) имеет место равенство $H = cA_{\text{ст}}$.

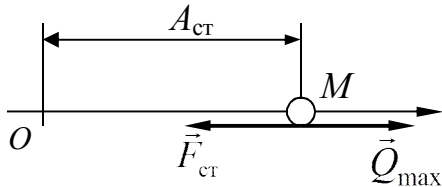


Рис. 15.10

Тогда $A_{\text{ст}} = \frac{H}{c}$. Обозначим $\eta = \frac{A}{A_{\text{ст}}}$

– отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению, которое называют коэффициентом динамического усиления или коэффициентом динамичности. Выражение коэффициента динамичности представим в виде

$$\eta = \frac{1}{|1 - z^2|}. \quad (15.26)$$

График этой зависимости (рис. 15.11) показывает, что при $\frac{p}{k} \rightarrow 1$ коэффициент динамичности $\eta \rightarrow \infty$ и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает. Это явление называют, как известно, резонансом.

При дальнейшем увеличении частоты возмущающей силы $p(p \rightarrow \infty)$ амплитуда вынужденных колебаний уменьшается, стремясь к нулю. Этим обстоятельством пользуются при расчете амортизаторов колебаний и в других случаях, когда требуется уменьшить амплитуду вынужденных колебаний.

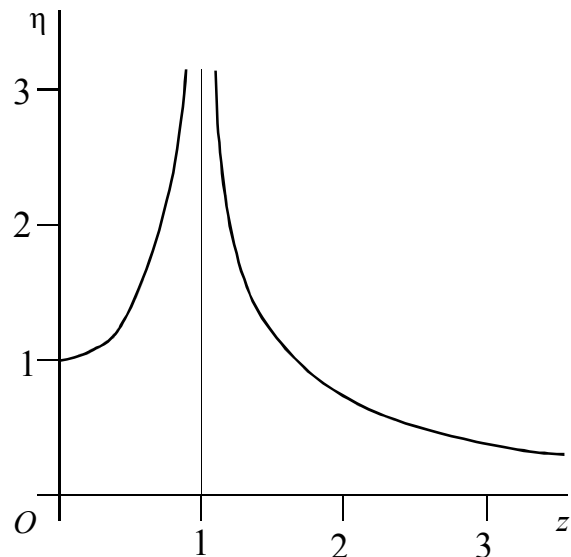


Рис. 15.11

Отметим, что иногда коэффициент динамичности выражают через размерные величины в виде

$$\eta = \frac{k^2}{|k^2 - p^2|}.$$

Случай 2. Явление резонанса при отсутствии сопротивления

В случае, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний $p = k$, имеет место резонанс и решением (15.21), полученным выше, пользоваться нельзя. В случае резонанса при отсутствии сопротивления частное решение нужно искать в виде

$$x_2 = (B \cos pt + C \sin pt)t, \quad (15.27)$$

или

$$x_2 = At \sin(pt - \varepsilon). \quad (15.28)$$

Проделав такие же действия для определения коэффициентов B и C , как и выше (подставив x_2 и \ddot{x}_2 в дифференциальное уравнение (15.19) и получив тождество), найдем значения коэффициентов B и C :

$$B = -\frac{h}{2p}; \quad C = 0.$$

Частное решение уравнения (15.19), или закон вынужденных колебаний, примет вид

$$x_2 = -\frac{h}{2p}t \cos pt, \quad (15.29)$$

или

$$x_2 = \frac{h}{2p}t \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right). \quad (15.30)$$

График вынужденных колебаний при резонансе показан на рис. 15.12.

Как видно, амплитуда вынужденных колебаний при резонансе неограниченно растет с течением времени. Сдвиг фазы вынужденных колебаний относительно фазы возмущающей силы равен $\frac{\pi}{2}$. Полученная формула имеет лишь качественное значение, показывая возрастание амплитуды при резонансе. Количественных расчетов по ней проводить нельзя, так как не было учтено сопротивление среды, играющее существенную роль в реальных условиях.

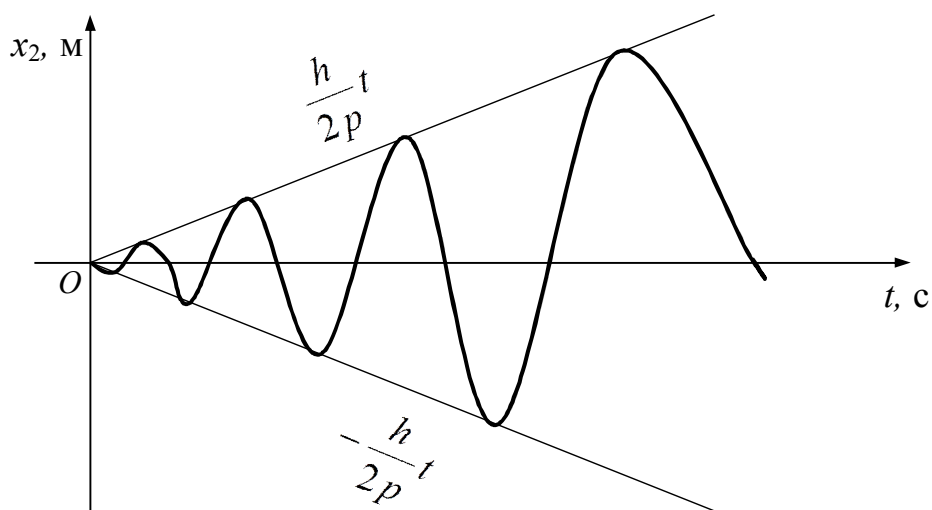


Рис. 15.12

Случай 3. Вынужденные колебания при наличии сопротивления, пропорционального скорости

Рассмотрим вынужденные колебания с учетом вязкого сопротивления ($n \neq 0$). Общее решение неоднородного уравнения второго порядка $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt$ является в этом случае также суммой двух решений (аналогично (15.20)).

Общее решение однородного уравнения при различных значениях параметров n и k проанализировано в параграфе 15.1. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$x_2 = B \cos pt + C \sin pt, \quad \text{или} \quad x_2 = A_B \sin(pt - \varepsilon). \quad (15.31)$$

Отметим, что в выражении (15.31) A_B – амплитуда вынужденных колебаний в среде с сопротивлением; ε – сдвиг фазы вынужденных колебаний относительно фазы возмущающей силы.

Приведем процедуру определения неизвестных коэффициентов A_B и ε , вводя обозначение $\delta = pt - \varepsilon$.

$$\begin{array}{l|l} x_2 = A_B \sin \delta & k^2 \\ \dot{x}_2 = A_B p \cos \delta & 2n \\ \ddot{x}_2 = -A_B p^2 \sin \delta & 1 \end{array}$$

Подставив найденные величины $x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2$ после умножения на коэффициенты $k^2, 2n, 1$ в неоднородное уравнение, получим тождество

$$A_B(k^2 - p^2) \sin \delta + A_B np \cos \delta \equiv h \sin \delta \cos \varepsilon + h \sin \varepsilon \cos \delta.$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin \delta$ и $\cos \delta$, получим систему алгебраических уравнений для определения величин A_B и ε :

$$A_B(k^2 - p^2) = h \cos \varepsilon;$$

$$A_B 2np = h \sin \varepsilon.$$

Решая систему, получим: амплитуда вынужденных колебаний

$$A_B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad (15.32)$$

сдвиг фазы колебаний

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (15.33)$$

Выражение (15.31) показывает, что вынужденные колебания точки в случае вязкого сопротивления являются гармоническими колебаниями, так как амплитуда их не изменяется с течением времени, т.е. вынужденные колебания не затухают с течением времени. Они не затухают потому, что возмущающая сила все время поддерживает колебательное движение точки. Частота p и период $\tau = \frac{2\pi}{p}$ вынужденных колебаний равны частоте и периоду возмущающей силы, т.е. сопротивление не влияет на частоту и период вынужденных колебаний.

Общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний (15.18), например, для случая малого сопротивления можно представить в виде

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A_B \sin(pt - \varepsilon) \quad (15.34)$$

или в виде

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + A_B \sin(pt - \varepsilon), \quad (15.35)$$

где постоянные C_1 и C_2 или a и α определяются по начальным условиям:

при $t = 0$ $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$. На рис. 15.13 показаны графики собственных, вынужденных колебаний и результирующего движения согласно (15.35).

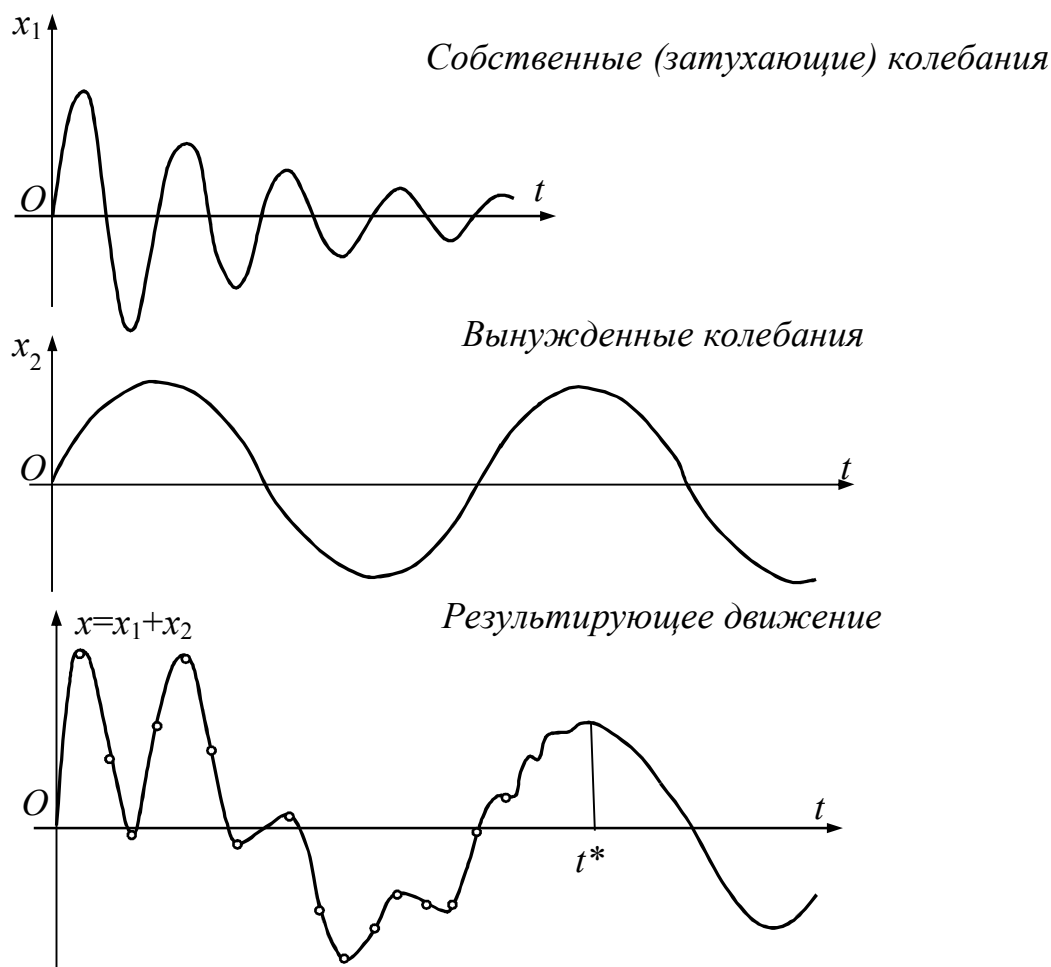


Рис. 15.13

В выражении (15.35) первое слагаемое – собственные колебания, которые затухают с течением времени. Второе слагаемое – вынужденные колебания, которые не затухают с течением времени. Нетрудно видеть, что при $t > t^*$ $x \approx x_2$, и поэтому в тех задачах, где интересуются лишь установившимся движением, первым слагаемым можно пренебречь и считать $x \approx A_{\text{в}} \sin(pt - \varepsilon)$. При анализе неустановившегося движения (переходных процессов) рассматривают оба слагаемых в выражении (15.35).

Исследование амплитуды вынужденных колебаний

Для установления зависимости амплитуды вынужденных колебаний

$A_{\text{в}} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$ от частоты возмущающей силы удобно вос-

пользоваться коэффициентом динамичности $\eta = \frac{A_{\text{в}}}{A_{\text{ст}}}$, где $A_{\text{ст}} = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2}$ –

статическое отклонение от начала координат под действием постоянной силы H (см. п. 15.2, случай 1).

С учетом этого коэффициент динамичности примет вид

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}}, \quad (15.36)$$

где $z = \frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки;

$\nu = \frac{n}{k}$ – коэффициент, характеризующий сопротивление среды.

Зависимость $A_B(p)$ называют амплитудно-частотной характеристикой (иногда амплитудно-частотной характеристикой в безразмерных величинах называют зависимость $\eta(z)$). На рис. 15.14 построены кривые, каждая из которых представляет зависимость η от z при определенных значениях $\nu = \frac{n}{k}$.

Опишем некоторые характерные точки кривых, приведенных на рис. 15.14.

При $z = 0$ ($p = 0$) $\eta = 1$
 $\left(A_B = A_{ст} = \frac{h}{k^2} \right)$ при любых значениях коэффициента ν .

При отсутствии сопротивления $n = 0$ коэффициент динамичности имеет разрыв при $z = 1$ ($p = k$). При наличии сопротивления ($z = 1$) коэффициент динамичности (а следовательно, и амплитуда вынужденных колебаний) имеет конечную величину.

При $\nu < \frac{\sqrt{2}}{2}$ зависимость $\eta(z)$ имеет экстремум – максимальное значение. Максимальное значение достигается при значении коэффициента расстройки $z = \sqrt{1-2\nu^2}$ ($p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$), что предлагается читателям проверить самостоятельно.

Соответственно максимальные значения коэффициента динамичности и амплитуды вынужденных колебаний

$$\eta_{\max} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}} \quad \text{и} \quad A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

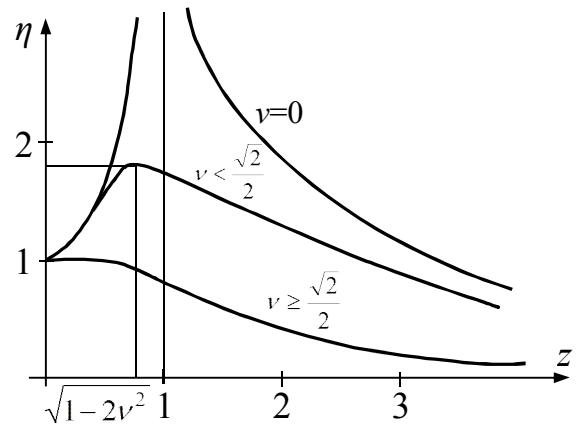


Рис. 15.14

Значения коэффициента динамичности и амплитуды вынужденных колебаний при резонансе $z = 1$ ($p = k$)

$$\eta_{\text{рез}} = \frac{1}{2\nu} \quad \text{и} \quad A_{\text{рез}} = \frac{h}{2nk}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум не при $p = k$, а при меньшей частоте возмущающей силы $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$. Следует иметь в виду, что амплитуда $A_{\text{рез}}$ близка к максимальному значению $A_{\text{вmax}}$.

При значении коэффициента $\nu \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ максимума коэффициента динамичности и амплитуды $A_{\text{в}}$ не существует (рис. 15.14) – эти величины монотонно уменьшаются при увеличении z .

Из графика (см. рис. 15.14) видно, что при расчете амплитуды $A_{\text{в}}$ сопротивление следует учитывать, как бы мало оно не было, лишь в области, близкой к резонансу (обычно в зоне $0,7 < z < 1,3$ или $0,7k < p < 1,3k$). При остальных значениях z сопротивление можно не учитывать, каким бы большим оно ни было. Следует считать амплитуду вынужденных колебаний по формуле

$$A_{\text{в}} = \frac{h}{|k^2 - p^2|}.$$

Исследование фазы вынужденных колебаний

Фаза вынужденных колебаний при наличии сопротивления ($pt - \varepsilon$) сдвинута относительно фазы возмущающей силы на величину ε , определяемую формулой $\text{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$. Сдвиг фазы в безразмерных величинах определяется выражением

$$\text{tg} \varepsilon = \frac{2\nu z}{1 - z^2}. \quad (15.37)$$

Величина ε зависит от z и ν . Поэтому, задаваясь определенным значением коэффициента ν , можно построить зависимость $\varepsilon(z)$, называемую фазочастотной характеристикой (рис. 15.15).

При отсутствии сопротивления $\nu = 0$ и $\text{tg} \varepsilon = 0$. В этом случае $\varepsilon = 0$ для вынужденных колебаний малой частоты ($p < k$) и $\varepsilon = \pi$ ($\varepsilon = 180^\circ$) для вынужденных колебаний большой частоты ($p > k$). Если $z = 1$, то при любом значении коэффициента ν $\text{tg} \varepsilon = \frac{2\nu z}{1 - z^2} = \infty$, т.е. $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

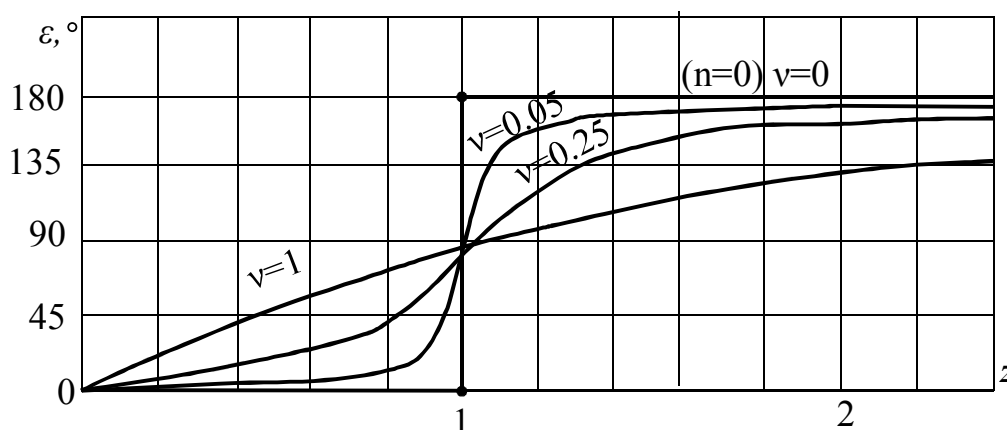


Рис. 15.15

Для других значений коэффициента ν фазочастотные характеристики показаны на рис. 15.15.

В заключение отметим основные свойства вынужденных колебаний с учетом вязкого сопротивления:

- 1) вынужденные колебания не зависят от начальных условий;
- 2) вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают;
- 3) влияние сопротивления на вынужденные колебания выражается в сдвиге фазы колебаний по отношению к фазе возмущающей силы и в уменьшении амплитуды колебаний по мере увеличения сопротивления в области, близкой к резонансу;
- 4) вынужденные колебания происходят с частотой возмущающей силы;
- 5) амплитуда вынужденных колебаний постоянна как при $p \neq k$, так и при $p = k$ (резонансе).

Пример 15.2. Вертикальную пружину AB (рис. 15.16) жесткости $c = 392$ Н/м растягивают из недеформированного состояния на $\lambda_0 = 3$ см, прикрепляют груз массой $m = 2$ кг и сообщают ему начальную скорость $v_0 = 7$ м/с, направленную вертикально вниз. Определить уравнение движения груза, амплитуду и период колебаний, пренебрегая сопротивлением движению.

Решение. Движение груза будет прямолинейным, координатную ось Ox направим вертикально вниз, взяв начало координат в равновесном (статическом) положении груза, где $P = F_{\text{ст}} = c\lambda_{\text{ст}}$ (рис. 15.17).

Изобразим груз в произвольный момент времени $OM = x$ и покажем действующие силы тяжести $P = mg$ и упругости $F = c\lambda = c(x + \lambda_{\text{ст}})$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = \sum X_i, \quad m\ddot{x} = P - F = P - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

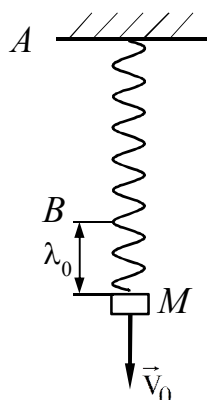


Рис. 15.16

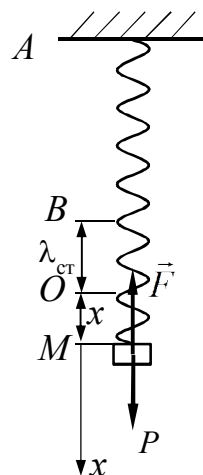


Рис. 15.17

Учитывая условие равновесия, имеем

$$m \ddot{x} = -cx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0,$$

где $\frac{c}{m} = k^2 = \frac{392}{2} = 196$ и $k = 14 \frac{1}{c}$.

Решение уравнения согласно (15.6)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Выпишем начальные условия:

при $t = 0$ $x_0 = \lambda_0 - \lambda_{\text{ст}} = 3 - 5 = -2$ см; $\dot{x} = 7$ см/с.

Тогда $C_1 = x_0 = -2$ см, $C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} = 0,5$ см и $x = -2 \cos 14t + 0,5 \sin 14t$ см.

Амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{2^2 + 0,5^2} = 2,06 \text{ см},$$

период колебаний $T = \frac{2\pi}{k} = 0,449 \approx 0,45$ с.

Запишем уравнение движения в амплитудной форме $x = a \sin(kt + \alpha)$,

где $a = 2,06$ см; $k = 14 \text{ с}^{-1}$; $\alpha = \arctg \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = -1,36$ рад.

Итак, если не учитывать сопротивление движению, то груз будет совершать гармонические колебания $x = 2,06 \sin(14t - 1,326)$ см.

График движения груза показан на рис. 15.18.

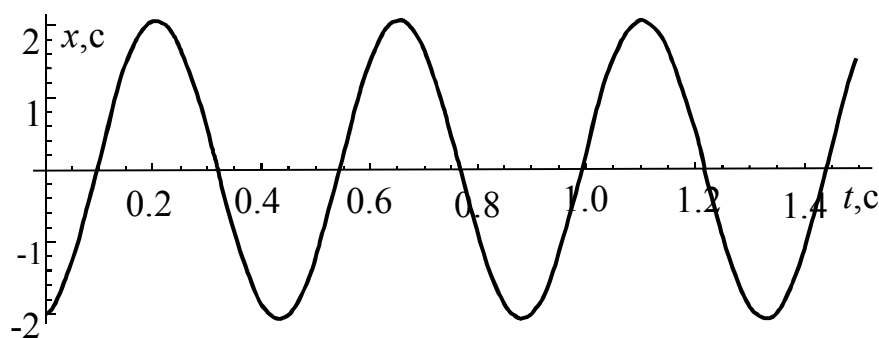


Рис. 15.18

Пример 15.3. Считая в предыдущем примере, что на груз действует кроме сил тяжести и упругости еще сила сопротивления $\vec{R} = -b\vec{v}$, пропорциональная скорости груза (вязкое сопротивление), найти уравнение движения, условный период и декремент колебания. Принять, что $b = 4,8 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$.

Решение. Изобразим действующие на груз силы, сохранив координатную ось направленной вниз из положения равновесия (рис. 15.19). Считаем, что движение груза происходит в направлении оси Ox .

Дифференциальное уравнение движения груза (материальной точки M):

$$m \ddot{x} = P_x + R_x + F_x, \quad m \ddot{x} = P - b \dot{x} - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

Учитывая условие равновесия и разделив уравнение на m , получим $\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0$.

Введя рекомендуемые ранее обозначения:

$$\frac{b}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2, \quad \text{найдем} \quad 2n = \frac{4,8}{2} = 2,4 \frac{1}{\text{с}};$$

$$k^2 = \frac{392}{2} = 196 \frac{1}{\text{с}^2} \text{ и } \ddot{x} + 2,4 \dot{x} + 196x = 0.$$

Поскольку в рассматриваемом примере $n < k$, то согласно (15.10) общее решение дифференциального уравнения можно представить в виде

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t),$$

$$\text{где } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{196 - 1,2^2} = 13,95 \frac{1}{\text{с}}.$$

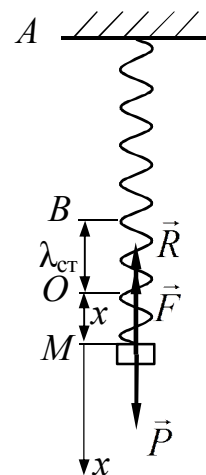


Рис. 15.19

Подсчитаем условный период затухающих колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{196 - 1,2^2}} = 0,45 \text{ с.}$$

Заметим, что в случае малого сопротивления среды, когда $n^2 \ll k^2$, можно считать $T_1 \approx T$, т.е. малое сопротивление практически не влияет на изменение периода свободных колебаний.

Найдем произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 при тех же начальных условиях: $x(0) = -2 \text{ см}$, $\dot{x}(0) = 7 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Для этого вычислим $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}k_1(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t).$$

Тогда при $t = 0$ $C_1 = -2$; $7 = -1,2C_1 + k_1C_2$ и $C_2 = 0,328$. Подставив эти значения постоянных в общее решение, получим уравнение движения груза

$$x = e^{-1,2t}(-2 \cos 13,95t + 0,328 \sin 13,95t) \text{ см.}$$

Приведем это уравнение к амплитудной форме, приняв $a \sin \alpha = -2$, $a \cos \alpha = 0,328$, откуда $a = \sqrt{2^2 + 0,328^2} = 2,03 \text{ см}$; $\text{tg} \alpha = -6,097$ и $\alpha = -1,408 \text{ рад}$. Итак, уравнение движения груза примет вид

$$x = 2,03e^{-1,2t} \sin(13,95t - 1,408) \text{ см.}$$

Колебания будут затухающими. Декремент колебаний вычислим по формуле (15.12):

$$D = e^{-nT_1} = e^{-1,2 \cdot 0,45} = 0,58.$$

Следовательно, амплитуды колебаний убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем $D = 0,58$. График движения груза показан на рис. 15.20.

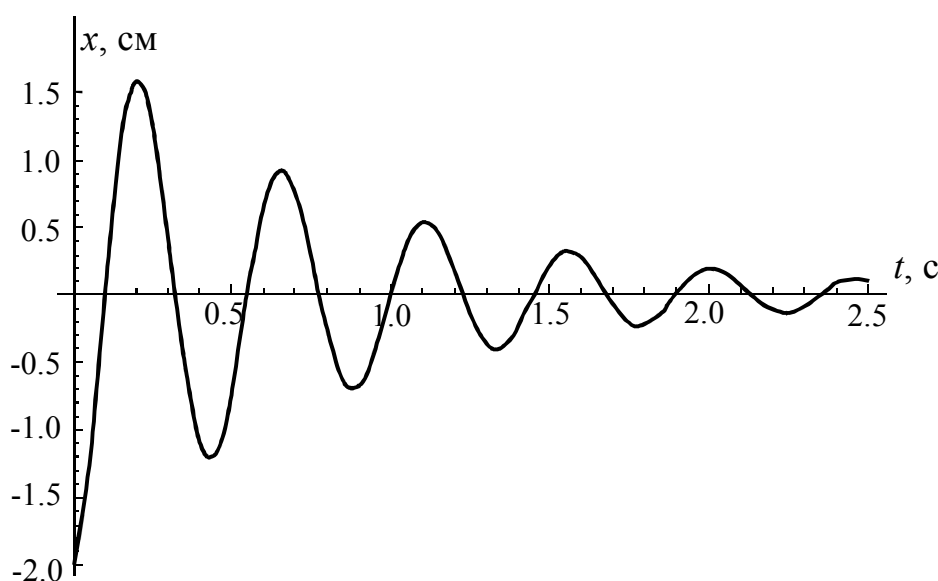


Рис. 15.20

Пример 15.4. Рассмотрим колебания груза в примере 15.3, если на него будет действовать возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону $Q_B = H \sin pt$, где H – максимальное значение возмущающей силы $H = 4$ Н, p – угловая частота ее $p = 3\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Остальные силы и начальные условия остаются теми же. Найти уравнение движения груза, амплитуду вынужденных колебаний в резонансном случае. Построить графики собственных, чисто вынужденных колебаний и результирующего движения груза.

Решение. Покажем силы, действующие на груз в произвольный момент времени (рис. 15.21): силу тяжести $P = mg$, силу упругости $F = c\lambda = c(\lambda_{\text{ст}} + x)$, силу сопротивления $R = bv$, возмущающую силу $Q_B = H \sin pt$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза

$$m \ddot{x} = \sum X_k = P + Q_B - F - R,$$

или после подстановки данных

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (15.38)$$

$$\text{где } n = \frac{b}{2m} = 1,2 \frac{1}{\text{с}}, \quad k^2 = \frac{c}{m} = 196 \frac{1}{\text{с}^2};$$

$$h = \frac{H}{m} = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 200 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

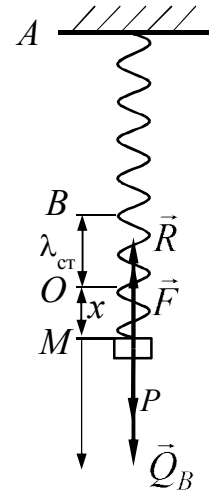


Рис. 15.21

Общее решение уравнения (15.38) $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$ – это общее решение однородного уравнения, так как $n < k$ и $x_2 = A_B \sin(pt - \varepsilon)$ – частное решение (вынужденные колебания). Величины A_B и ε определяются формулами (15.32), (15.33). Вычислим их.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A_B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + (2np)^2}} = \frac{200}{\sqrt{(196 - 9\pi^2)^2 + (2 \cdot 1,2 \cdot 3\pi)^2}} = 1,826 \text{ см.}$$

Сдвиг фазы вынужденного колебания

$$\varepsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2} = \arctg \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 3\pi}{196 - 9\pi^2} = 0,208 \text{ рад.}$$

Итак, $x_2 = 1,826 \sin(3\pi t - 0,208)$ см.

Общее решение уравнения (2.38) принимает вид

$$x = e^{-1,2t} (C_1 \cos 13,95t + C_2 \sin 13,95t) + 1,826 \sin(3\pi t - 0,208),$$

или в амплитудной форме

$$x = Ae^{-1,2t} \sin(13,95t + \alpha) + 1,826 \sin(3\pi t - 0,208),$$

где C_1 , C_2 или A , α определяются по начальным условиям:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = -2 \text{ см,} \quad \dot{x} = 7 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Уравнения для определения C_1 и C_2 :

$$-2 = C_1 + 1,826 \sin(-0,208);$$

$$7 = -1,2C_1 + 13,95C_2 + 1,826 \cdot 3\pi \cos(-0,208),$$

откуда $C_1 = -1,623$ и $C_2 = -0,845$.

Следовательно, закон движения груза будет следующим:

$$x = -e^{-1,2t} (1,623 \cos 13,95t + 0,845 \sin 13,95t) + 1,826 \sin(3\pi t - 0,208)$$

или, полагая $C_1 = A \sin \alpha = -1,623$ и $C_2 = A \cos \alpha = -0,845$, находим

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 1,83 \text{ см и } \operatorname{tg} \alpha = 1,9207.$$

Поскольку $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ имеют отрицательные знаки, то угол α должен быть в третьей четверти и тогда $\alpha = \arctg 1,9207 + \pi = 4,2324$ рад.

Уравнение движения в амплитудной форме имеет вид

$$x = 1,83e^{-1,2t} \sin(13,95t + 4,232) + 1,826 \sin(3\pi t - 0,208) \text{ см.} \quad (2.39)$$

Первое слагаемое x_1 при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю из-за наличия множителя $e^{-1,2t}$, а второе слагаемое x_2 является гармоническим колебанием, происходящим с постоянной амплитудой. Следовательно, через некоторый промежуток времени у груза установятся колебания

$$x = x_2 = 1,826 \sin(3\pi t - 0,208) \text{ см.}$$

График движения груза (собственные колебания, чисто вынужденные колебания, результирующее движение) показан на рис. 15.22.

В случае резонанса, когда $p = k$, амплитуда вынужденных колебаний примет значение $A_{\text{рез}} = \frac{h}{2nk} = 5,95 \text{ см.}$

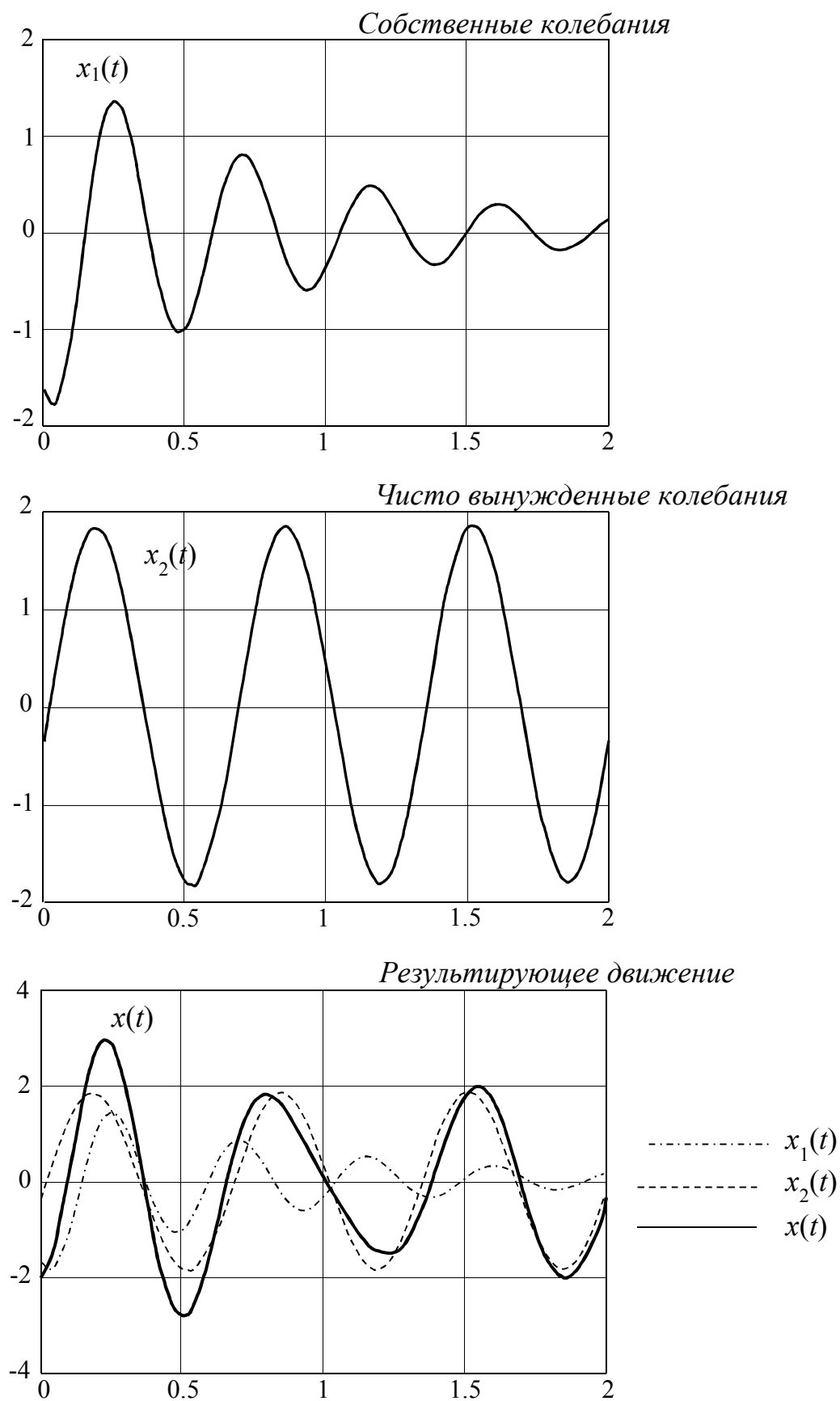


Рис. 15.22

Вопросы для самопроверки

1. Какие силы приложены к материальной точке, если точка совершает свободные, вынужденные колебания?
2. Как записывается дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки?
3. От каких факторов зависят частота, период, амплитуда, начальная фаза свободных колебаний точки в среде без сопротивления?
4. Каков график движения точки в среде с линейным сопротивлением в случае малого сопротивления, большого (или критического) сопротивления?
5. Как записывается дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки в среде без сопротивления, в среде с линейным сопротивлением?
6. Как записывается уравнение вынужденных колебаний (не зависящих от начальных условий) в среде без сопротивления (в том числе при резонансе), в среде с линейным сопротивлением?
7. Из каких составляющих движений складывается результирующее движение точки, находящейся под действием восстанавливающей и возмущающей сил?
8. Какой будет амплитуда вынужденных колебаний при резонансе в среде с линейным сопротивлением?

Глава 16. Введение в динамику механической системы.

Теорема о движении центра масс

Механической системой называют мысленно выделенную совокупность материальных точек или тел, определенным образом взаимодействующих между собой. Движение каждой точки, входящей в систему, зависит от движения других точек системы. Материальное тело – твердое, упругое, жидкое, газообразное, любая машина, любое сооружение – в динамике рассматривается как механическая система.

Различают механические системы неизменяемые и изменяемые. В неизменяемой системе расстояния между точками остаются неизменными, примером такой системы является абсолютно твердое тело.

В изменяемой системе расстояния между точками изменяются, такими системами являются упругие, жидкие, газообразные тела, механизмы и т.п.

В динамике часто приходится рассматривать механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных неупругими (недеформируемыми) связями. Такие механические системы по своим свойствам относятся к классу неизменяемых систем.

16.1. Центр масс системы

Рассмотрим систему n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n , массы которых равны m_1, m_2, \dots, m_n и положение которых определяется радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ (рис. 16.1).

Масса системы равна сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

$$M = \sum m_s. \quad (16.1)$$

Центром масс механической системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_s \vec{r}_s}{M}, \quad (16.2)$$

где M – масса всей системы.

Координаты центра масс системы выводятся путем проецирования обеих частей равенства (16.2) на оси координат:

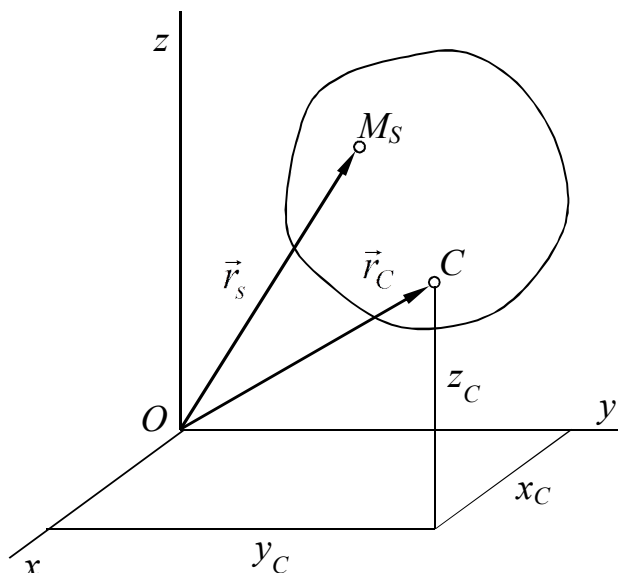


Рис. 16.1

$$x_c = \frac{\sum m_s x_s}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_s y_s}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_s z_s}{M}. \quad (16.3)$$

Положим, система является твердым телом, находящимся вблизи Земли и имеющим малые размеры по сравнению с ней.

Умножим числитель и знаменатель в формулах (16.2) и (16.3) на ускорение свободного падения g и подставим вместо Mg вес тела P , а вместо $m_s g$ вес s -й точки p_s . Тогда эти формулы перейдут в формулы для радиуса-вектора и координат центра тяжести тела. Следовательно, центр тяжести тела совпадает с центром масс его.

Однако понятие центра масс шире понятия центра тяжести. О центре тяжести можно говорить только тогда, когда размеры тела малы по сравнению с Землей и оно находится в поле тяготения Земли. О центре масс можно говорить применительно к любой системе, точки которой находятся под действием произвольных сил. Обратим внимание на то, что центр масс системы есть, как и центр тяжести, геометрическая точка, которая может и не совпадать с какой-либо точкой системы.

Перепишем формулу (16.2) в виде $M\vec{r}_c = \sum m_s \vec{r}_s$ и продифференцируем обе части ее по времени $M \dot{\vec{r}}_c = \sum m_s \dot{\vec{r}}_s$. Тогда

$$M\vec{v}_c = \sum m_s \vec{v}_s, \quad (16.4)$$

где $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ – скорость центра масс системы;

$\vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s$ – скорость любой ее точки.

Если продифференцировать обе части формулы (16.4) по времени, то получим

$$M\vec{a}_c = \sum m_s \vec{a}_s, \quad (16.5)$$

где $\vec{a}_c = \dot{\vec{v}}_c$ – ускорение центра масс системы;

$\vec{a}_s = \dot{\vec{v}}_s$ – ускорение любой ее точки.

16.2. Внешние и внутренние силы. Свойства внутренних сил

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек, и покажем силы, действующие на рассматриваемую точку M_s ($s = 1, 2, \dots, n$) (рис. 16.2).

При изучении движения системы все силы удобно делить на внешние и внутренние.

Внутренними силами называются силы взаимодействия точек данной системы. Равнодействующую внутренних сил, действующих на рассматриваемую точку M_s (рис. 16.2), обозначим \vec{F}_s^i . Здесь i – начальная буква латинского слова *internus* – внутренний.

Внешними силами называются силы, с которыми тела, не принадлежащие системе, действуют на точки рассматриваемой системы. Равнодействующую внешних сил, приложенных к рассматриваемой точке M_s (рис. 16.2), обозначим \vec{F}_s^e . Здесь e – начальная буква латинского слова *externus* – внешний.

Разделение сил на внешние и внутренние является условным. Оно зависит от выбора механической системы. Рассмотрим велосипедиста, едущего на велосипеде (рис. 16.3,а). Если в систему включить и велосипедиста, и велосипед, то внешними силами будут силы тяжести \vec{P}_1, \vec{P}_2 , реакции опорной поверхности $\vec{N}_1, \vec{F}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_2$. Силы взаимодействия между руками и рулем, ногами и педалями, велосипедистом и седлом в этом случае относятся к разряду внутренних сил.

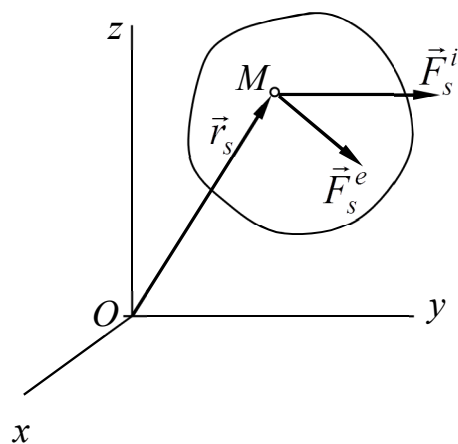


Рис. 16.2

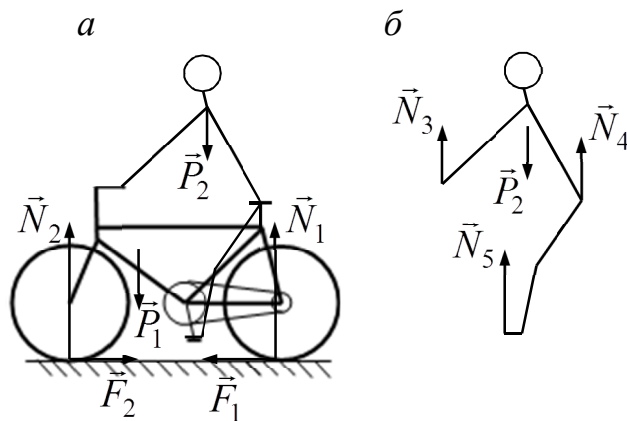


Рис. 16.3

Если в качестве системы рассматривать только велосипедиста, то реакции руля, педалей, седла перейдут в разряд внешних сил, к которым также относится сила тяжести велосипедиста (рис 16.3,б).

Итак, в динамике все силы делятся двояко: 1) на активные и реакции связей; 2) внешние и внутренние.

Не следует смешивать эти виды разделения сил. Нужно помнить, что разделение сил на внешние и внутренние условно и зависит от того, какая механическая система изучается в задаче. Внешние и внутренние силы могут быть и активными, и реакциями связей.

Свойства внутренних сил

Для того чтобы установить свойства внутренних сил, рассмотрим пару взаимодействующих точек M_1 и M_2 и покажем внутренние силы \vec{F}_1^i и \vec{F}_2^i , действующие на эти точки (рис. 16.4).

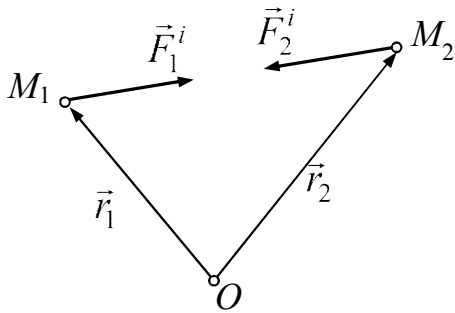


Рис. 16.4

По третьему закону Ньютона эти силы равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны: $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$, поэтому сумма внутренних сил, действующих на точки M_1 и M_2 , равна нулю.

Поскольку механическая система состоит из пар взаимодействующих точек, то сумма внутренних сил, приложенных ко всем точкам (главный вектор), равна нулю.

Моменты сил \vec{F}_1^i и \vec{F}_2^i (геометрические и алгебраические) относительно любого центра также равны по величине и отличаются только по направлению или знаку. Поэтому сумма моментов внутренних сил относительно любого центра (главный момент) также равна нулю.

Итак, внутренние силы обладают следующими свойствами:

1) главный вектор внутренних сил равен нулю:

$$\vec{R}^i = \sum \vec{F}_s^i = 0; \quad (16.6)$$

2) главный момент внутренних сил относительно любого центра равен нулю:

$$\vec{M}_0^i = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s^i) = 0. \quad (16.7)$$

16.3. Основное уравнение динамики точек системы

Рассмотрим движущуюся механическую систему, состоящую из n точек. Выделим точку системы M_s ($s = 1, 2, \dots, n$) и покажем силы, действующие на нее (рис. 16.5). Здесь \vec{F}_s^e и \vec{F}_s^i – равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на точку. Основное уравнение динамики выделенной точки:

$$m_s \vec{a}_s = \vec{F}_s^e + \vec{F}_s^i \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (16.8)$$

Таким образом, движение механической системы описывается совокупностью n векторных уравнений. Отметим, что внешние силы, действующие на рассматриваемую точку, могут зависеть от времени, координат и скорости не только данной точки, но в общем случае от времени, координат и скоростей всех точек системы. Внутренние силы, входящие в (16.8), заранее не известны.

Проецируя (16.8) на декартовы оси координат, получим систему $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} m_s \ddot{x}_s^o &= X_s^e + X_s^i, \\ m_s \ddot{y}_s^o &= Y_s^e + Y_s^i, \\ m_s \ddot{z}_s^o &= Z_s^e + Z_s^i, \\ (s &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (16.9)$$

Эти $3n$ уравнений называются дифференциальными уравнениями движения точек системы в декартовых координатах.

При анализе второй задачи динамики для материальной точки было отмечено, что точное аналитическое решение системы трех дифференциальных уравнений возможно лишь в простейших случаях.

Еще более осложняется решение второй задачи динамики для механической системы. Здесь интегрирование системы $3n$ дифференциальных уравнений движения (16.9) практически не осуществимо (даже при заданных простых законах изменения внутренних сил).

Использование современных программных продуктов (например, Matematica 07) расширяет возможности получения численного решения, но при этом очень важным остается анализ физических основ рассматриваемых процессов.

Основная роль дифференциальных уравнений движения точек механической системы состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем динамики, которые, в свою очередь, используются для анализа движения механической системы.

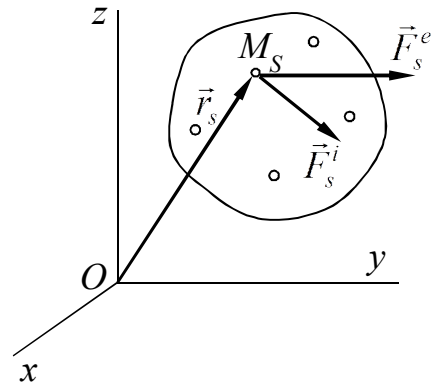


Рис. 16.5

16.4. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) достаточно знать закон движения центра масс.

Прежде чем сформулировать теорему о движении центра масс, вспомним, что движение материальной точки описывается с помощью основного уравнения динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_s$.

Теорема. *Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему:*

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_s^e \quad (16.10)$$

Доказательство. Рассмотрим движущуюся механическую систему, состоящую из n точек. Выделим точку системы M_s ($s = 1, 2, \dots, n$) и покажем равнодействующие внешних \vec{F}_s^e и внутренних сил \vec{F}_s^i , действующих на точку (рис. 16.5).

Основное уравнение динамики для каждой точки системы M_s имеет вид

$$m_s \vec{a}_s = \vec{F}_s^e + \vec{F}_s^i \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Суммируя эти уравнения для всех точек системы, получим

$$\sum m_s \vec{a}_s = \sum \vec{F}_s^e + \sum \vec{F}_s^i.$$

Левая часть полученного выражения, с учетом (16.5), записывается в виде

$$M\vec{a}_c = \sum m_s \vec{a}_s,$$

где M – масса всей системы;

\vec{a}_c – ускорение центра масс.

В правой части сумма внешних сил – главный вектор внешних сил $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_s^e$. Сумма внутренних сил – главный вектор внутренних сил $\vec{R}^i = \sum \vec{F}_s^i = 0$, который по свойству внутренних сил равен нулю.

Окончательно получим $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_s^e$. Теорема доказана.

Проецируя обе части равенства (16.10) на координатные оси инерциальной системы, получаем дифференциальные уравнения движения центра масс системы:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= \sum X_s^e, \\ M \ddot{y}_c &= \sum Y_s^e, \\ M \ddot{z}_c &= \sum Z_s^e. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Из уравнений (16.10) и (16.11) видно, что внутренние силы не входят в эти уравнения и не влияют непосредственно на движение центра масс системы. Только внешние силы оказывают влияние на движение центра масс. Однако при определенных условиях внутренние силы способны изменить внешние силы, и тогда они, через посредство опять-таки внешних сил, влияют на движение центра масс.

Замечания. 1. Используя уравнение (16.11), можно сформулировать и решить первую и вторую задачи динамики для центра масс.

2. Поступательное движение тела полностью определяется движением центра масс. Поэтому уравнения (16.11) можно считать дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела.

Законы сохранения движения центра масс

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, во все время движения равен нулю, то центр масс системы движется равномерно и прямолинейно или же остается в покое.

Действительно, если $\vec{R}^e = 0$, то $\vec{v}_c = \vec{v}_{c0}$ (равномерное и прямолинейное движение) или $\vec{r}_c = \vec{r}_{c0}$ (покой).

2. Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось во все время движения равна нулю, то центр масс вдоль этой оси движется равномерно или не перемещается вдоль нее.

Пусть проекция главного вектора на ось x , например, все время равна нулю ($R_x^e = 0$), тогда $\dot{x}_c = \dot{x}_{c0}$ (равномерное движение) или $x_c = x_{c0}$ (отсутствие перемещения вдоль оси x).

При решении задач закон сохранения движения центра масс удобно записывать в перемещениях:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = 0, \quad (16.12)$$

где m_1, m_2, \dots, m_n — массы точек или тел;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ — абсолютные перемещения точек и тел (абсолютные перемещения точек приложения сил тяжести).

Примеры, иллюстрирующие теорему о движении центра масс, представлены ниже.

Пример 16.1. Движение автомобиля по горизонтальному пути (рис. 16.6). Пусть цифрой 1 обозначены ведущие, а цифрой 2 – ведомые колеса автомобиля. Установим, под действием каких сил происходит горизонтальное перемещение центра тяжести автомобиля. Давление газа в двигателе внутреннего сгорания, момент со стороны двигателя, приложенный к ведущим колесам, относятся к внутренним силам и не могут вызвать изменение положения центра масс. На рис. 16.6 показаны внешние силы: сила тяжести \vec{P} , сопротивление воздуха \vec{R} и реакции поверхности, раскладываемые на нормальную и касательную (сила трения) составляющие.

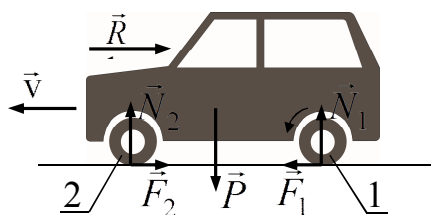


Рис. 16.6

При направлении момента со стороны двигателя, приложенного к ведущим колесам против часовой стрелки, сила трения \vec{F}_1 направлена в сторону, противоположную возможному скольжению, – в данном случае влево в сторону движения автомобиля. При стремлении ведомых колес двигаться поступательно скорости точек касания были бы направлены влево и сила трения \vec{F}_2 будет направлена в противоположную сторону движения. Если при работе двигателя не возникает силы F_1 , т.е. трение между ведущими колесами и землей отсутствует или мало, то автомобиль не будет двигаться, колеса при этом буксуют.

Пример 16.2. Ходьба человека. Если человек начинает идти по горизонтальной плоскости, то перемещение его центра тяжести в горизонтальном направлении происходит под действием сил трения между подошвами его обуви и плоскостью (рис. 16.7). Эти силы всегда направлены в сторону движения человека и являются по отношению к нему внешними. Они возникают при соответствующем сокращении мышц человека. Это создает иллюзию того, что движущими силами являются мускульные усилия, т.е. внутренние силы. В данном случае внутренние силы способны вызвать изменение внешних сил, которые влияют на движение центра масс. Если бы трение отсутствовало, то есть плоскость была бы гладкой, то за счет внешних сил – силы тяжести \vec{P} и нормальных реакций \vec{N}_1 и \vec{N}_2 – центр тяжести человека не смог бы перемещаться в горизонтальном направлении.

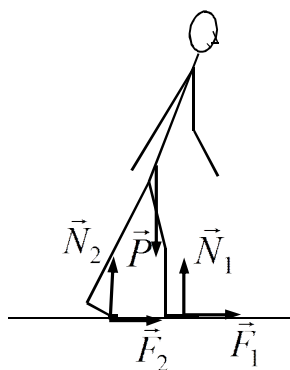


Рис. 16.7

Пример 16.3. Действие пары на свободное твердое тело.

Рассмотрим движение свободного твердого тела под действием пары сил (рис 16.8). Пусть на тело, центр тяжести которого C неподвижен, никаких внешних сил, кроме пары $\{\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e\}$, не действует. Главный вектор пары сил равен нулю, поэтому центр тяжести тела будет оставаться неподвижным. Следовательно, как бы пара сил не была расположена, тело будет под ее действием вращаться вокруг центра тяжести.

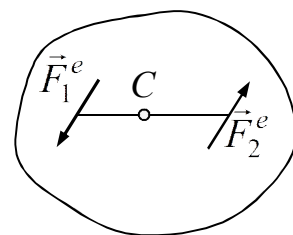


Рис. 16.8

Решение задач при помощи теоремы о движении центра масс рассмотрим ниже.

Пример 16.4. Человек, масса которого m_2 , стоит на корме лодки, масса которой m_1 и длина l . В начальный момент времени лодка находится в покое. Пренебрегая сопротивлением воды, определить расстояние s , на которое переместится лодка, если человек перейдет на нос лодки (рис. 16.9).

Решение

1. В качестве системы, движение которой рассматриваем, выберем лодку и человека. Изобразим систему в произвольный момент времени (рис. 16.9, а). Оси координат выберем так, как показано на рисунке, направив ось x в сторону движения человека.

2. Внешними силами, действующими на систему, будут силы тяжести лодки \vec{P}_1 , человека \vec{P}_2 и равнодействующая \vec{N} распределенной реакции поверхности воды.

3. Запишем теорему о движении центра масс

$$M\vec{a}_c = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{N}.$$

Проецируя выведенное уравнение на ось x , получим $M\ddot{x}_c = 0$.

При заданных начальных условиях $t = 0$, $\dot{x}_c = 0$, $x_c = x_{c0}$, получим $x_c = \text{const}$ – закон сохранения движения центра масс. Центр масс вдоль оси x не перемещается.

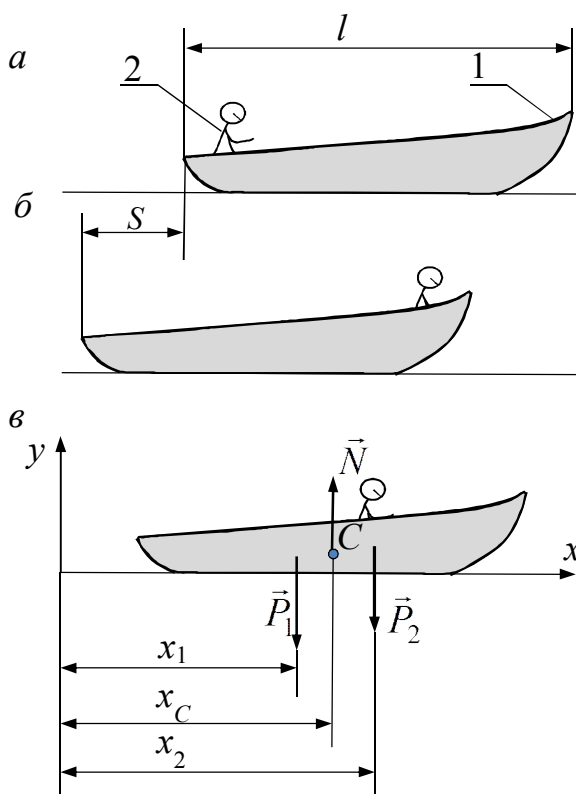


Рис. 16.9

а. Проверим, что при движении человека вправо лодка будет перемещаться в противоположную сторону – влево (рис. 16.9,а,б).

Запишем выражение абциссы центра масс:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}.$$

Поскольку при движении человека вправо координата x_2 увеличивается, а координата x_c остается постоянной, то координата x_1 должна убывать, т. е. лодка действительно будет двигаться влево.

б. Запишем закон сохранения движения центра масс в перемещениях:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0, \quad (*)$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2$ – абсолютные перемещения лодки и человека.

Обратим внимание, что человек участвует одновременно в двух движениях – он движется относительно лодки (относительное движение) и перемещается вместе с ней (переносное движение). Тогда имеем

$$\Delta x_1 = -s;$$

$$\Delta x_2 = \Delta x_2^e + \Delta x_2^r = -s + l.$$

Величина Δx_1 взята со знаком *минус*, т. к. перемещение лодки происходит в сторону, противоположную оси x .

Подставляя величины Δx_1 и Δx_2 в уравнение (*), получим

$$-sm_1 + m_2(-s + l) = 0,$$

откуда

$$s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l.$$

4. Исследуем полученное решение.

Пусть $m_1 \gg m_2$ – масса лодки много больше массы человека, тогда $s \approx 0$.

Пусть $m_1 \ll m_2$ – масса лодки много меньше массы человека, тогда $s \approx l$, т. е. перемещение легкой лодки приблизительно равно ее длине.

В реальных условиях перемещение лодки заключено в пределах $0 < s < l$.

Пример 16.5. Маятник состоит из ползуна 1, находящегося на гладкой горизонтальной плоскости, шарика 2, соединенного с ползуном стержнем AB , который может вращаться вокруг оси A , связанной с ползуном. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости (рис. 16.10,а). Считая известными массы m_1, m_2 и длину невесомого стержня $AB = l$, исследовать движение центра масс си-

стемы, найти траекторию движения шарика и определить реакцию опорной поверхности при вертикальном положении стержня.

Решение

1. Определим положение центра масс маятника по формуле (16.3), отсчитывая координаты x от точки A (рис. 16.10,а).

$$AC = x_c = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{M} l.$$

Изобразим произвольное положение маятника и покажем действующие внешние силы: силы тяжести \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , нормальную реакцию \vec{N} (рис. 16.10,б).

По теореме о движении центра масс

$$M \vec{a}_c = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{N}.$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$M \ddot{x}_c = 0;$$

$$M \ddot{y}_c = P_1 + P_2 - N.$$

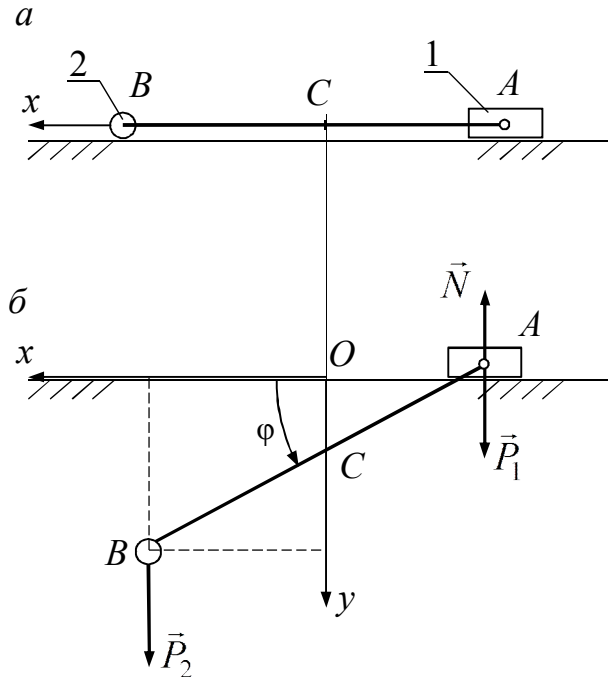


Рис. 16.10

Интегрируя первое уравнение, получаем $\dot{x}_c = C_1$ и $x_c = C_1 t + C_2$. Так как движение началось без начальной скорости, то $\dot{x}_c(0) = 0$ и $x_c = C_2$, центр масс по оси x не перемещается. Выберем начало координат в начальном положении точки C , тогда $x_c = 0$.

Следовательно, центр масс движется прямолинейно, по оси y , причем $y_c = OC = AC \sin \varphi$, $y_c = \frac{m_2}{M} l \sin \varphi$.

2. Перейдем к определению траектории шарика B . Из рис. 16.10,б видим, что $x_B = BC \cos \varphi$, $y_B = AB \sin \varphi$, но

$$BC = l - AC = l \left(1 - \frac{m_2}{M}\right) = l \frac{m_1 + m_2 - m_2}{M} = \frac{m_1}{M} l.$$

Следовательно,
$$x_B = \frac{m_1 l}{M} \cos \varphi = a \cos \varphi ;$$

$$y_B = l \sin \varphi = b \sin \varphi ,$$

откуда, исключая φ , получаем

$$\frac{x_B^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2} = 1 .$$

Точка B (шарик) движется по дуге эллипса с полуосьями: малая полуось $a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$, большая полуось $b = l$. Поэтому такой маятник называют *эллиптическим маятником*.

3. Нормальную реакцию N найдем из второго дифференциального уравнения

$$N = P - M \ddot{y}_c ,$$

где $P = P_1 + P_2$.

Но $M \ddot{y}_c = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 = m_2 \ddot{y}_2$, т.к. $y_1 = \text{const} = 0$.

В рассматриваемом примере $y_2 = y_B = l \sin \varphi$.

Дифференцируя дважды y_2 по времени, имеем

$$\dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \cos \varphi ,$$

$$\ddot{y}_2 = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = l(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) ,$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение стержня.

Для произвольного положения маятника реакция N определяется формулой

$$N = P - m_2 l (\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi)$$

и при вертикальном положении, когда $\varphi = 90^\circ$, $\omega = \omega_1$,

$$N = P + m_2 l \omega_1^2 .$$

Угловую скорость ω_1 можно найти с помощью некоторых других законов динамики, которые будут рассмотрены в следующих главах. Например, можно использовать закон сохранения механической энергии, т. к. в рассматриваемом примере сопротивлением движению пренебрегалось.

Пример 16.6. Электрический мотор 1 массой m_1 установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте (рис. 16.11); на валу мотора закреплен однородный стержень 2 массой m_2 и длиной $2l$, несущий на конце точечный груз 3 массой m_3 . Вал вращается равномерно с угловой скоростью ω . В начальный момент времени мотор неподвижен и

стержень в горизонтальном положении. Определить: 1) уравнение движения мотора, пренебрегая трением; 2) давление мотора на фундамент; 3) угловую скорость вала, при которой мотор будет подпрыгивать над фундаментом.

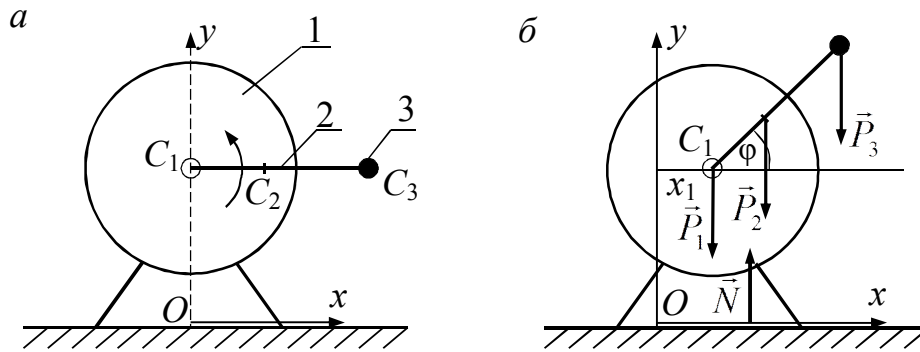


Рис. 16.11

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы (мотор, стержень, груз) в системе отсчета, связанной с фундаментом. Ось Oy проведем через центр мотора (точку C_1) в его начальном положении (рис. 16.11,а).

Изобразим систему в произвольный момент времени. Ее положение задается координатой x_1 центра мотора и углом φ стержня с горизонтом (рис. 16.11,б).

2. Внешними силами для системы являются силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и \vec{N} – суммарная реакция опоры (гладкой поверхности). Обозначим суммарную силу тяжести $P = P_1 + P_2 + P_3$, причем $P = (m_1 + m_2 + m_3)g = Mg$, где M – масса системы.

3. По теореме о движении центра масс $M\vec{a}_c = \vec{R}^e$, записанной в проекциях на оси координат, имеем

$$M \ddot{x}_c = 0,$$

$$M \ddot{y}_c = N - P.$$

Интегрируя первое уравнение, получим $\dot{x}_c = C_1$, $x_c = C_1 t + C_2$.

Из определения центра масс системы $x_c = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ и при $t = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $x_3 = 2l$ (рис. 16.11,а). Следовательно,

$x_c(0) = \frac{l}{M}(m_2 + 2m_3)$. Проекция скорости центра масс на ось Ox

$\dot{x}_c = \frac{1}{M}(m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3)$ и при $t = 0$ $\dot{x}_1 = 0$, т. к. мотор был неподви-

жен; $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3 = 0$, т. к. скорости точек стержня и груза вертикальны. Сле-

довательно, $\dot{x}_c(t) = C_1 = 0$ и $x_c(t) = C_2 = x_c(0)$. Таким образом, центр масс системы вдоль оси x не перемещается, а движется прямолинейно по вертикальной прямой, параллельной оси Oy . Уравнение движения мотора получим из соотношения

$$x_c(t) = x_c(0); \quad \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) = \frac{l}{M}(m_2 + 2m_3),$$

где $x_2 = l \cos \varphi + x_1$; $x_3 = 2l \cos \varphi + x_1$,

откуда $x_1 = \frac{l}{M}(m_2 + 2m_3)(1 - \cos \varphi)$, причем $\varphi = \omega t$.

Мотор совершает гармонические колебания с амплитудой $A = \frac{l}{M}(m_2 + 2m_3)$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4. Давление мотора на фундамент по величине равно реакции N опорной поверхности, которую найдем из второго дифференциального уравнения движения центра масс системы

$$N = P + M \ddot{y}_c.$$

Вычислим координату y_c центра масс системы:

$$y_c = \frac{1}{M}(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3),$$

где $y_1 = \text{const}$, $y_2 = y_1 + l \sin \varphi$, $y_3 = y_1 + 2l \sin \varphi$ (рис. 16.11, б).

Подставляя y_1, y_2, y_3 в формулу для y_c , получаем

$$y_c = y_1 + \frac{l(m_2 + 2m_3)}{M} \sin \varphi,$$

где $\varphi = \omega t$.

Дифференцируя дважды по времени, получаем $\ddot{y}_c = -A \omega^2 \sin \varphi$, где $A = \frac{l}{M}(m_2 + 2m_3)$. Величина реакции поверхности N определяется из формулы, записанной выше:

$$N = P - l \omega^2 (m_2 + 2m_3) \sin \varphi.$$

Давление мотора на фундамент меняется в процессе движения и зависит от угла φ , причем $N_{\min} < N < N_{\max}$. Максимальное давление $N_{\max} = P + l\omega^2(m_2 + 2m_3)$ будет при $\sin\varphi = -1$, т. е. при $\varphi = \frac{3}{2}\pi = 270^\circ$.

Минимальное давление будет при $\sin\varphi = 1$, когда $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, и $N_{\min} = P - l\omega^2(m_2 + 2m_3)$.

5. Давление на фундамент, как и реакция N , зависит от угловой скорости вала (ротора). При некоторых значениях ω минимальное давление может быть равным нулю. В этом случае мотор не будет давить на опору и начнет подпрыгивать. Очевидно это будет при $N_{\min} \leq 0$, когда угловая скорость имеет значение

$$\omega \geq \sqrt{\frac{Mg}{l(m_2 + 2m_3)}} = \omega^*.$$

Пример 16.7. По условиям примера 16.7 вычислить горизонтальную и вертикальную реакции связей, если мотор закрепить на фундаменте болтами. Найти их максимальные значения.

Решение. 1. Рассмотрим систему: мотор 1, стержень 2, груз 3 и изобразим ее в произвольный момент времени (рис. 16.12). Оси координат свяжем с неподвижным мотором.

2. Покажем внешние силы: P_1 , P_2 , P_3 – силы тяжести, R_x , R_y – суммарные горизонтальная и вертикальная составляющие реакций болтов и опорной поверхности.

3. Дифференциальные уравнения движения центра масс системы:

$$M \ddot{x}_c = R_x,$$

$$M \ddot{y}_c = R_y - P,$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$; $P = Mg$. Центр масс системы был вычислен в предыдущем примере: он расположен на стержне между точками приложения сил P_1 и P_3 и расстояние

$$OC = \frac{l}{M}(m_2 + 2m_3).$$

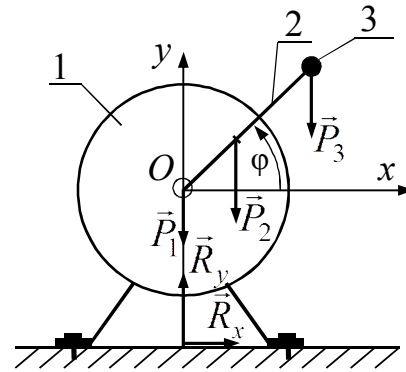


Рис. 16.12

При вращении вала центр масс будет двигаться по окружности радиусом $r_c = OC$, и его координаты $x_c = r_c \cos \varphi$; $y_c = r_c \sin \varphi$, где $\varphi = \omega t$. Вычислим вторые производные от x_c, y_c по времени:

$$\ddot{x}_c = -r\omega^2 \cos \varphi, \quad \ddot{y}_c = -r\omega^2 \sin \varphi.$$

Подставим эти значения проекций ускорения центра масс в дифференциальные уравнения и найдем реакции R_x и R_y :

$$R_x = -Mr_c\omega^2 \cos \varphi, \quad R_y = P - Mr_c\omega^2 \sin \varphi,$$

или после подстановки выражения для r_c :

$$R_x = -l\omega^2(m_2 + 2m_3)\cos \varphi, \quad R_y = P - l\omega^2(m_2 + 2m_3)\sin \varphi.$$

Максимальное значение горизонтальной реакции по модулю $|R_x| = l\omega^2(m_2 + 2m_3)$ достигается при $\cos \varphi = \pm 1$, т. е. при горизонтальном положении стержня.

Вертикальная реакция R_y остается такой же, как при установке мотора на гладкий фундамент (см. пример 16.6), причем при $\omega \geq \omega^*$ мотор подпрыгивать не будет, а действует на головки болтов, стремясь их выдернуть. Следует обратить внимание на то, что реакции при движении (в динамике) имеют, как правило, две составляющие: статическую и динамическую. Динамическая составляющая зависит от движения (скоростей, ускорений). В нашем примере определяется угловой скоростью вала. Статическая составляющая реакции – от действия задаваемых сил при покое, в нашем примере – от сил тяжести.

16.5. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции

Положение центра масс не полностью характеризует распределение масс системы. Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс в твердом теле – момент инерции. *Моментом инерции тела относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до этой оси:*

$$J_z = \sum m_s h_s^2. \quad (16.13)$$

Из определения следует, что момент инерции тела относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

В дальнейшем будет показано, что осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Согласно формуле (16.13) для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси Oz , момент инерции $J_z = mh^2$, а момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Единицей измерения момента инерции будет $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Часто при определении момента инерции тела (особенно тела неправильной формы) пользуются понятием радиуса инерции тела относительно оси. Радиус инерции тела относительно оси определяет величину, равную расстоянию от данной оси такой точки, в которой нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции точечной массы был равен моменту инерции тела относительно оси. Обозначим радиус инерции относительно оси z через ρ_z , тогда

$$J_z = M\rho_z^2, \quad \rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}}, \quad (16.14)$$

где M – масса тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (16.13), обратится в интеграл. Учитывая, что

$$dm = \rho dV,$$

где ρ – плотность; V – объем,

получим
$$J_z = \int_{(V)} h^2 dm, \text{ или } J_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV. \quad (16.15)$$

Интегрирование в данном случае выполняется по всему объему тела, а плотность ρ и расстояние h в общем случае зависят от координат точек тела. Формулой (16.15) воспользуемся при вычислении моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы. При этом плотность ρ будет постоянной и может быть вынесена из под знака интеграла.

Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса¹

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут разными. Гюйгенс впервые установил связь между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр тяжести тела. Проведем через центр масс C тела произвольные

¹ Христиан Гюйгенс (1629-1695) – выдающийся голландский ученый, механик, физик, астроном. Изобрел первые маятниковые часы, изучил колебания физического маятника, ввел понятие о моменте инерции тела.

оси $Sxyz$, а через любую точку O на оси Sx – ось Ou , так что $Ou \parallel Cz$ (рис. 16.13). Имеет место теорема: *момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:*

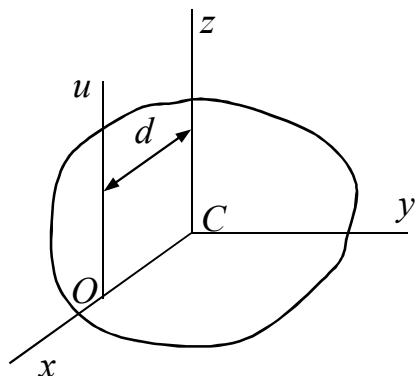


Рис. 16.13

$$J_u = J_{cz} + Md^2. \quad (16.16)$$

Теорема была рассмотрена в курсе физики, ее доказательство основано на несложных геометрических рассуждениях и может быть опущено.

Формула для вычисления момента инерции J_u показывает, что из всех моментов инерции относительно параллельных осей наименьшим является момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, $J_{cz} < J_u$.

Примеры вычисления моментов инерции некоторых однородных тел

1. *Однородный тонкий стержень.* Дан стержень массой M и длиной l . Вычислить момент инерции стержня относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис. 16.14).

Выберем оси координат, как показано на рисунке. Выделим элемент стержня длиной dx , масса которого $dm = \rho dx$, где ρ – масса единицы длины, $\rho = M/l$.

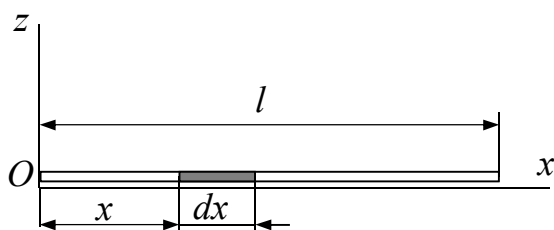


Рис. 16.14

Используя формулу (16.15), запишем момент инерции стержня относительно оси Oz :

$$J_z = \int_0^l \rho x^2 dx = \int_0^l \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{Ml^2}{3}.$$

Итак, момент инерции стержня относительно оси Oz , проходящей через конец:

$$J_z = \frac{Ml^2}{3}. \quad (16.17)$$

Вычислим момент инерции стержня относительно оси Cz , проходящей через центр тяжести (центральной оси), воспользовавшись теоремой Гюйгенса (рис 16.15).

Имеем:

$$J_u = J_{cz} + M \frac{l^2}{4}; \quad \frac{Ml^2}{3} = J_{cz} + \frac{Ml^2}{4}.$$

$$\text{Отсюда } J_{cz} = \frac{Ml^2}{12}. \quad (16.18)$$

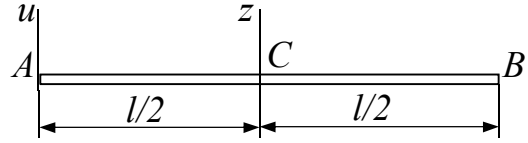


Рис. 16.15

Радиусы инерции стержня:

относительно оси Au $\rho_u = \sqrt{\frac{J_u}{M}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,58l;$

относительно оси Cz $\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}} = \frac{l}{\sqrt{12}} \approx 0,29l.$

2. Круглый однородный диск или цилиндр

Вычислим момент инерции диска относительно оси z , перпендикулярной его плоскости – J_z , если известны масса диска M и его радиус R (рис. 16.16,а).

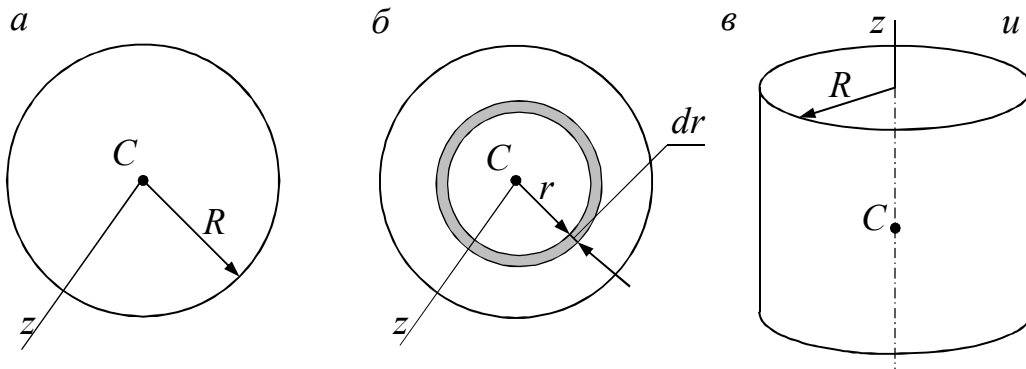


Рис. 16.16

Выделим элементарное кольцо радиусом r и шириной dr (рис. 16.16,б).

Площадь этого кольца $dS = 2\pi r dr$, а масса $dm = \rho 2\pi r dr$, где $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ – масса единицы площади круга. Тогда с использованием (16.15) момент инерции диска относительно оси Cz :

$$J_z = \int r^2 \rho dS = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr = \frac{MR^2}{2}.$$

Итак, момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс:

$$J_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (16.19)$$

Радиус инерции диска: $\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,71R$.

Формула (16.19) получится, очевидно, и для момента инерции J_z однородного круглого цилиндра относительно его оси Cz (рис. 16.16,в), $J_z = MR^2/2$, где M – масса цилиндра. По формуле Гюйгенса момент инерции относительно оси u можно представить в виде

$$J_u = J_{Cz} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

3. Тонкое круглое кольцо (рис. 16.17)

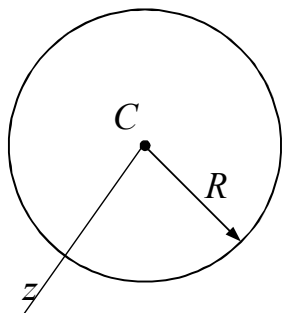


Рис. 16.17

Найдем момент инерции кольца массой M и радиусом R относительно оси Cz , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через центр тяжести. Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_s = R$, то, используя формулу (16.13), получаем

$$J_z = \sum m_s h_s^2 = \sum m_s R^2 = R^2 \sum m_s = MR^2.$$

Следовательно, момент инерции кольца

$$J_z = MR^2. \quad (16.20)$$

Интересно отметить, что радиус инерции совпадает с радиусом кольца:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}} = R.$$

Очевидно такой же результат получим для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом R относительно ее оси.

Моменты инерции других однородных тел правильной формы можно найти в литературе¹. Моменты инерции неоднородных тел и тел слож-

¹См., например: Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вульфсон и др.; под ред. А.А. Яблонского. М.: Высшая школа, 1985. 368 с.

ной формы определяются экспериментально с использованием малых крутильных колебаний, качаний, падающего груза.

Замечания. 1. Момент инерции тела относительно оси, или осевой момент инерции, не полностью характеризует распределение масс в твердом теле. В последующих разделах динамики будут рассмотрены центробежные моменты инерции.

2. В сопротивлении материалов пользуются понятием геометрического момента инерции площади. Формулы для моментов инерции площадей получаются из приведенных формул теоретической механики, если в них массу заменить площадью фигуры. Так, момент инерции площади круга относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости круга, будет равен $\frac{\pi R^4}{2}$. Эта формула получается из (16.12) путем замены массы M площадью круга, т.е. πR^2 .

3. Моменты инерции однородных тел сложной формы относительно любых осей можно вычислить с использованием программного продукта Pro/ENGINEER Wildfire 3.0.

Вопросы для самопроверки

1. Какая точка называется центром масс механической системы?
2. Какими свойствами обладают внутренние силы, приложенные к точкам механической системы?
3. Как формулируется и записывается теорема о движении центра масс механической системы?
4. При каких условиях центр масс движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя; не перемещается вдоль некоторой оси?
5. Как записывается закон сохранения движения центра масс в перемещениях?
6. Как с помощью теоремы о движении центра масс объяснить движение автомобиля по горизонтальному пути (как направлены силы трения, приложенные к ведущим и ведомым колесам автомобиля), перемещение человека по горизонтальной поверхности?
7. Как записывается зависимость между моментом инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс?

Глава 17. Меры механического движения, меры действия сил

Механическое движение материальных объектов характеризуется их массами и скоростями. В качестве мер механического движения рассматриваются количество движения, момент количества движения и кинетическая энергия. Первые две меры механического движения являются векторными, третья мера – скалярной. Рассмотрим вычисление этих величин для точки, механической системы и твердого тела.

17.1. Количество движения материальной точки и системы

Количеством движения материальной точки называется векторная мера механического движения ее, равная произведению массы материальной точки на ее скорость (рис. 17.1). Будем обозначать количество движения буквой \vec{q} , тогда

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (17.1)$$

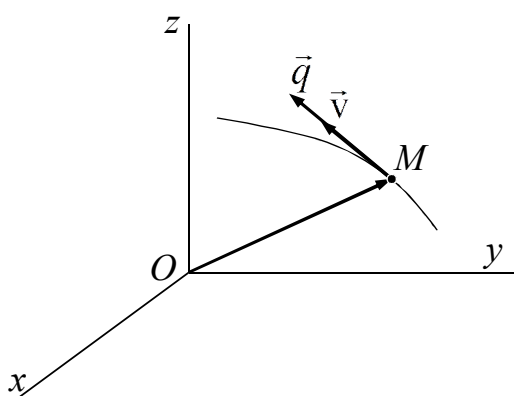


Рис. 17.1

Количество движения точки в физике часто называют импульсом материальной точки.

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат:

$$\begin{aligned} q_x &= mv_x = m \dot{x}, \\ q_y &= mv_y = m \dot{y}, \\ q_z &= mv_z = m \dot{z}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Размерность количества движения $[q] = \text{MLT}^{-1}$, единица количества движения – $\text{кг} \cdot \text{м/с}$ или $\text{Н} \cdot \text{с}$.

Количеством движения системы \vec{Q} называют векторную сумму количеств движения всех точек системы, т.е. их главный вектор

$$\vec{Q} = \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s. \quad (17.3)$$

Количество движения системы представляет собой замыкающую сторону многоугольника, построенного из количеств движения точек системы (рис. 17.2). Проекции количества движения системы на прямоугольные декартовы оси координат:

$$Q_x = \sum m_s \dot{x}_s; \quad Q_y = \sum m_s \dot{y}_s; \quad Q_z = \sum m_s \dot{z}_s. \quad (17.4)$$

Модуль количества движения

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

Вектор количества движения системы \vec{Q} , в отличие от вектора количества движения \vec{q} , не имеет определенной точки приложения.

Учитывая формулу (16.4) предыдущей главы $M\vec{V}_c = \sum m_s \vec{V}_s$, количество движения системы можно выразить в виде

$$\vec{Q} = M\vec{V}_c, \quad (17.5)$$

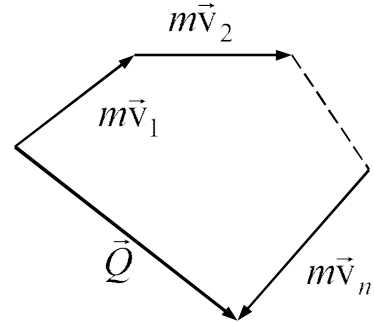


Рис. 17.2

т. е. количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.

Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количества движения твердых тел. Из формулы (17.5) видно: если тело движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю.

Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс (рис. 17.3,а) будет равно нулю. Если же движение тела является сложным, то величина \vec{Q} не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс. Например, для колеса, совершающего плоское движение, количество движения $\vec{Q} = M\vec{V}_c$, независимо от того, как вращается тело вокруг его центра масс C .

Таким образом, количество движения характеризует только поступательное движение тела. При сложном движении величина \vec{Q} характеризует только поступательную часть движения вместе с центром масс.

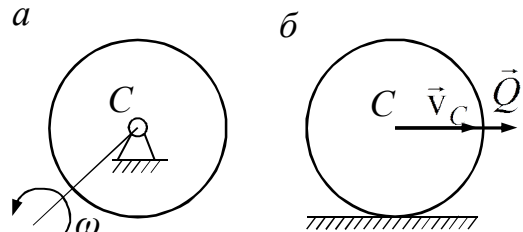


Рис. 17.3

17.2. Момент количества движения материальной точки, кинетический момент системы

Рассмотрим материальную точку, количество движения которой $\vec{q} = m\vec{v}$ (рис. 17.4). Моментом количества движения материальной точки относительно центра называют вектор \vec{k}_0 , равный векторному произведению

$$\vec{k}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (17.6)$$

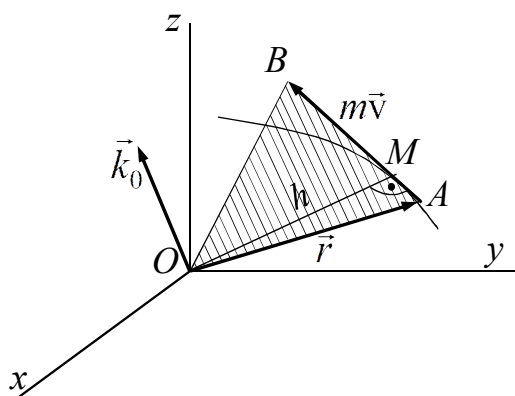


Рис. 17.4

Вычисляется этот вектор так же, как момент силы относительно центра $\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$. Модуль вектора \vec{k}_0 равен mvh , где h – плечо вектора относительно центра O или $k_0 = 2S_{\Delta OAB}$. Вектор \vec{k}_0 приложен в центре O , перпендикулярен плоскости, проходящей через вектор \vec{q} и центр O , и направлен так, что с его конца движение точки вокруг центра O видно против хода часовой стрелки.

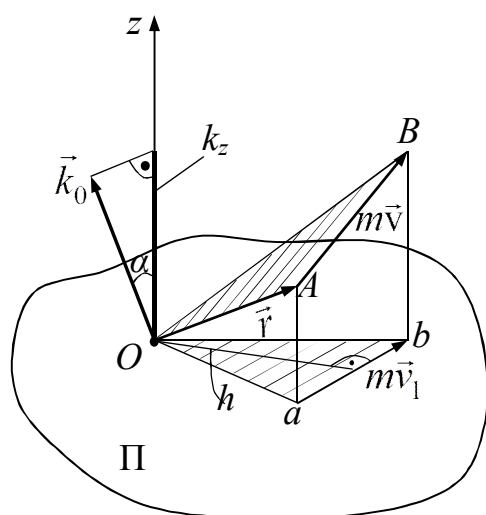


Рис. 17.5

Моментом количества движения материальной точки относительно оси (рис. 17.5) называется алгебраическая величина, равная моменту проекции вектора $m\vec{v}$ на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью:

$$k_z = \pm mv_1 h = \pm 2S_{\Delta Oab}, \quad (17.7)$$

где h – плечо вектора $m\vec{v}_1$ относительно точки O .

Момент количества движения относительно оси считается положительным, если, глядя с положительного направления оси, увидим поворот вектора $m\vec{v}$ по отношению к точке O

направленным против движения часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае.

Между моментом количества движения точки относительно центра и оси, проходящей через этот центр, существует связь, аналогичная связи моментов силы относительно центра и оси.

На рис. 17.5 \vec{k}_0 – момент количества движения точки относительно центра; k_z – относительно оси. Связь между ними

$$k_z = np_z(\vec{k}_0) = k_0 \cos \alpha. \quad (17.8)$$

Размерность момента количества движения $[k] = ML^2T^{-1}$, единица измерения момента количества движения $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ или $1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из n точек. Каждая точка имеет свой момент количества движения.

Главным моментом количеств движения точек системы, или кинетическим моментом системы относительно центра, называют вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{K}_0 = \sum (\vec{k}_0)_s = \sum \vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s, \quad \text{или} \quad \vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_s \vec{v}_s). \quad (17.9)$$

Главным моментом количества движения точек системы, или кинетическим моментом системы относительно оси, называют алгебраическую сумму моментов количеств движения всех точек системы относительно этой оси:

$$K_z = \sum (k_z)_s = \sum m_z(m_s \vec{v}_s). \quad (17.10)$$

Между кинетическими моментами системы относительно центра и оси, проходящей через этот центр, существует такая же связь, как и между моментами количества движения одной точки относительно центра и оси.

17.3. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Вычислим кинетический момент твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω , относительно оси вращения Oz (рис. 17.6).

Момент количества движения произвольной точки M_s тела относительно оси вращения $k_{zs} = m_s v_s h_s$, где $v_s = h_s \omega$ – скорость точки. Следовательно, $k_{zs} = m_s \omega h_s^2$.

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси Oz :

$$K_z = \sum k_{zs} = \sum m_s \omega h_s^2 = \omega \sum m_s h_s^2 = J_z \omega.$$

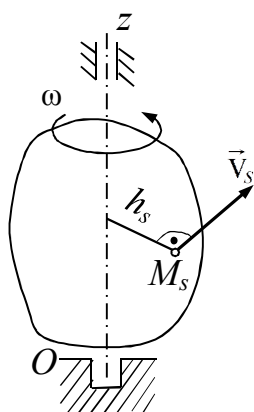


Рис. 17.6

Напомним, величина $J_z = \sum m_s h_s^2$ представляет собой момент инерции тела относительно оси. Окончательно имеем:

$$K_z = J_z \omega, \quad (17.11)$$

т.е. кинетический момент тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела. Знак величины K_z совпадает со знаком угловой скорости.

Полезно отметить аналогию между формулами (17.5) и (17.11): количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

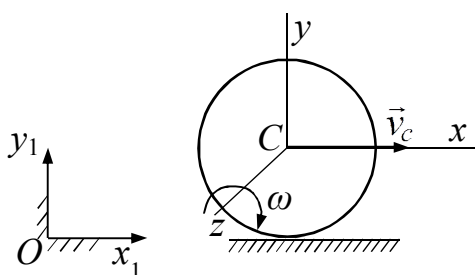


Рис. 17.7

Замечание. При плоском движении тела (рис. 17.7) относительное движение является вращательным вокруг оси Cz , проходящей через центр масс. Поэтому кинетический момент в этом движении $K_{Cz}^{\text{отн}} = J_{cz} \omega$.

17.4. Кинетическая энергия материальной точки, механической системы и твердого тела

Кинетическая энергия является более универсальной мерой механического движения по сравнению с рассмотренными ранее количеством движения и моментом количества движения. С помощью кинетической энергии через закон сохранения и преобразования энергии осуществляется связь механического движения с другими формами движения материи.

Кинетической энергией точки называют скалярную меру механического движения, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (17.12)$$

где m – масса точки;

v – ее скорость.

Кинетической энергией механической системы называют сумму кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_s v_s^2}{2}. \quad (17.13)$$

Величина T всегда положительна и равна нулю только при покое всех точек. Размерность кинетической энергии $[T] = ML^2T^{-2}$, единица измерения кинетической энергии – $1\text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ или $1\text{ Н}\cdot\text{м} = 1\text{ Дж}$.

Получим формулы для кинетической энергии твердого тела при различных видах движения.

а. Поступательное движение. При поступательном движении тела все его точки имеют равные скорости $v_1 = v_2 = v$, следовательно, кинетическая энергия тела $T = \sum \frac{1}{2}m_s v_s^2 = \frac{v^2}{2} \sum m_s$, но $\sum m_s = M$ – масса тела, поэтому

$$T = \frac{1}{2}Mv^2. \quad (17.14)$$

Кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.

б. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси Oz (рис. 17.6), то скорость любой его точки $v_s = h_s \omega$, где h_s – расстояние точки от оси вращения; ω – угловая скорость тела. Подставляя это значение в формулу (17.13) и вынося общие множители за скобку, получим

$$T = \sum \frac{1}{2}m_s v_s^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_s h_s^2 = \frac{1}{2}J_z \omega^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2}J_z \omega^2. \quad (17.15)$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

Отметим, что вновь полезно провести аналогию между формулами (17.14) и (17.15).

в. Плоское движение. Из кинематики известно, что при плоском движении тела скорости точек $v_s = h_s \omega$, где $h_s = M_s P$ – расстояние от точки до мгновенного центра скоростей (МЦС), т. е. распределение скоростей в каждый момент времени такое же, как и при вращательном движении вокруг оси (рис. 17.8). Тогда кинетическая энергия тела определяется фор-

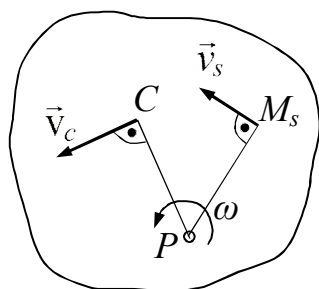


Рис. 17.8

мулой $T = \frac{1}{2} J_P \omega^2$, где J_P – момент инерции тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этой формулой пользоваться при расчетах неудобно, т.к. J_P – переменная величина. Используя теорему Гюйгенса о связи моментов инерции относительно параллельных осей, можно записать $J_P = J_{Cz} + M \cdot CP^2$, где точка C – центр тяжести (центр масс) тела; CP – расстояние от центра масс до мгновенного центра ско-

ростей. Подставив J_P в выражение кинетической энергии и учтя, что $v_c = CP\omega$ – скорость центра масс, получим выражение кинетической энергии при плоском движении

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2. \quad (17.16)$$

Следовательно, кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии при вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс.

Пример 17.1. Пусть диск, масса которого M , катится без скольжения по неподвижной поверхности (рис. 17.9). Вычислить кинетическую энергию диска, если скорость его центра масс равна \vec{v}_c .

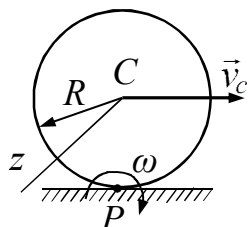


Рис. 17.9

Решение

Диск совершает плоское движение, точка P является мгновенным центром скоростей

$$\omega = \frac{v_c}{CP} = \frac{v_c}{R}.$$

Кинетическая энергия при плоском движении определяется по формуле $T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2$, причем момент инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр масс,

$J_{cz} = \frac{MR^2}{2}$. Подставляя значения J_{cz} , ω , найдем

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{v_c^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv_c^2.$$

Замечание. При вычислении кинетической энергии системы или твердого тела, совершающих сложное движение, часто пользуются теоремой Кёнига¹, которую приведем без доказательства: *Кинетическая энергия системы в абсолютном движении равна сумме двух слагаемых: кинетической энергии центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии системы в ее движении относительно поступательно движущихся координатных осей вместе с центром масс.*

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + T_{\text{отн}}. \quad (17.17)$$

Из теоремы Кёнига как частный случай выводится формула кинетической энергии тела при плоском движении.

Пример 17.2. Однородный стержень, имеющий массу m и длину $AB = 2l$, скользит своими концами по вертикальной и горизонтальной направляющим (рис.17.10). Определить количество движения, кинетический момент и кинетическую энергию для произвольного момента времени, выразив их через ω – угловую скорость стержня.

Решение

Стержень совершает плоскопараллельное движение. По скоростям точек A и B строим мгновенный центр скоростей (точку P_v) и показываем угловую скорость ω .

Количество движения \vec{Q} определяем по формуле (17.5) $\vec{Q} = m\vec{v}_c$, где $v_c = \omega CP_v = \omega l$, причем вектор \vec{Q} направлен по скорости центра масс \vec{v}_c . Кинетический момент стержня в относительном движении по отношению к поступательно движущимся осям вместе с центром масс

$K_{cz}^{\text{отн}} = J_c \omega$, где $J_c = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2$. Тогда $K_{cz}^{\text{отн}} = \frac{1}{3}ml^2\omega$.

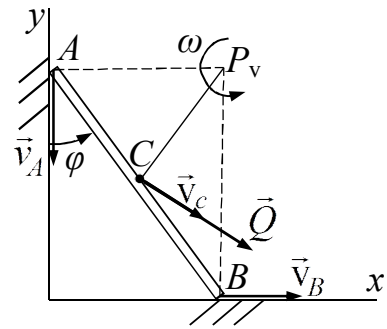


Рис. 17.10

¹ С. Кёниг (1712–1757) – швейцарский математик и механик.

Кинетический момент стержня в абсолютном движении относительно мгновенной оси $K_P = J_P \omega$, где момент инерции J_P вычисляется по теореме Гюйгенса $J_P = J_c + mCP^2$. Тогда $K_{Pz} = \frac{4}{3} ml^2 \omega$.

Кинетическая энергия стержня определяется по формуле (17.16) для плоского движения стержня $T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$, где $v_c = \omega l$ и $J_c = \frac{1}{3} ml^2$.

Окончательно $T = \frac{2}{3} ml^2 \omega^2$.

Пример 17.3. Механическая система состоит из груза 1, однородного цилиндрического вала 2 и связывающего их троса 3. Груз опускается, и его скорость в данный момент времени \vec{v} (рис. 17.11). Зная массы m_1, m_2 и радиус r и пренебрегая массой троса, вычислить меры механического движения системы.

Решение

1. Количество движения системы

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3,$$

где $\vec{Q}_1 = m_1 \vec{v}$, $\vec{Q}_2 = m_2 \vec{v}_0 = 0$, т.к. скорость центра масс вала равна нулю; $\vec{Q}_3 = m_3 \vec{v} = 0$, т.к. $m_3 = 0$. Следовательно, $\vec{Q} = \vec{Q}_1 = m_1 \vec{v}$.

2. Кинетический момент системы относительно оси вращения вала $K_0 = K_0^{(1)} + K_0^{(2)} + K_0^{(3)}$, где кинетический момент груза определяем по формуле (17.7) $K_0^{(1)} = m_1 v r$, кинетический момент вала — по формуле (17.11)

$$K_0^{(2)} = J_0 \omega = \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega \text{ и кинетический мо-}$$

мент троса $K_0^{(3)} = 0$, т. к. массой троса пренебрегаем.

Итак, $K_0 = m_1 v r + 0,5 m_2 r^2 \omega$, но $v = \omega r$ и $K_0 = (m_1 + 0,5 m_2) r v$.

3. Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3$, где $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2$,

$$T_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2, T_3 = 0.$$

Учитывая, что $v = \omega r$, запишем энергию системы $T = \frac{1}{2} (m_1 + 0,5 m_2) v^2$.

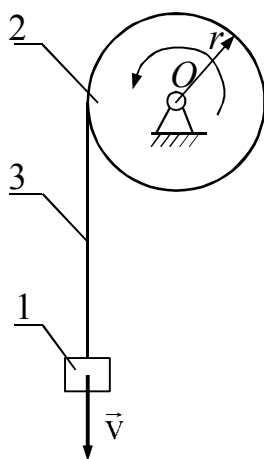


Рис. 17.11

Если ввести обозначение $m_{\text{пр}} = m_1 + 0,5m_2$ – приведенная масса системы (к грузу 1), то $T = \frac{1}{2}m_{\text{пр}}v^2$.

Замечание. Если выразить кинетическую энергию системы через угловую скорость вала ω , то

$$T = \frac{1}{2}J_{\text{пр}}\omega^2,$$

где $J_{\text{пр}} = (m_1 + 0,5m_2)r^2$ – момент инерции системы, приведенный к оси вала 2.

Пример 17.4. Вычислить количество движения и кинетическую энергию кулисного механизма, состоящего из кривошипа 1 длиной $OA = l$ и массой m_1 , ползуна 2 (каменя) массой m_2 , вставленного в прорезь кулисы 3 массой m_3 (рис. 17.12). Кривошип вращается с угловой скоростью ω .

Решение

Количество движения системы

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3,$$

где $\vec{Q}_1 = m_1\vec{v}_C$, $\vec{Q}_2 = m_2\vec{v}_A$, $\vec{Q}_3 = m_3\vec{v}_3$.

Выразим скорости через угловую скорость ω :

$$v_A = \omega l, \quad v_C = \omega \frac{l}{2}, \quad v_3 = v_A \sin \varphi = \omega l \sin \varphi.$$

Количество движения найдем по проекциям на координатные оси:

$$Q_x = \sum_{k=1}^3 Q_{kx} = -(0,5m_1 + m_2 + m_3)\omega l \sin \varphi,$$

$$Q_y = \sum_{k=1}^3 Q_{ky} = (0,5m_1 + m_2)\omega l \cos \varphi,$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}.$$

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3$, где $T_1 = \frac{1}{2}J_0\omega^2$ – кинетическая энергия вращающегося кривошипа; $T_2 = \frac{1}{2}m_2v_A^2$ и $T_3 = \frac{1}{2}m_3v_3^2$ – кинетические энергии поступательного движения ползуна и кулисы. Выразив все скорости через ω , приведем кинетическую энергию к виду

$$T = \frac{1}{2}\omega^2(J_0 + m_2l^2 + m_3l^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2}J_{\text{пр}}(\varphi)\omega^2.$$

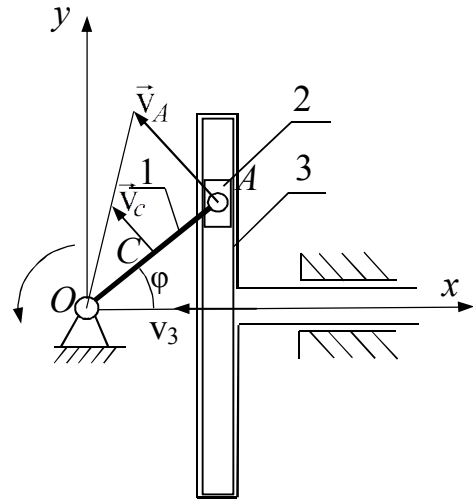


Рис. 17.12

Здесь $J_{\text{пр}}(\varphi)$ – приведенный момент инерции системы, или момент инерции системы, приведенный к оси вращения кривошипа. Отметим, что приведенный момент инерции или приведенная масса могут быть как постоянными, так и зависящими от времени (положения системы), как в данном примере.

Пример 17.5. Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v , если известна ее масса m (рис. 17.13).

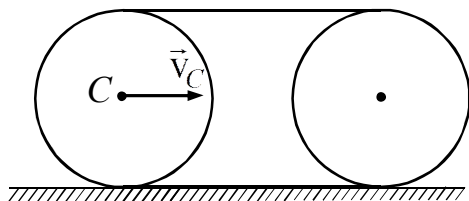


Рис. 17.13

Решение. Гусеница трактора представляет собой бесконечную цепь, состоящую из шарнирно соединенных между собой звеньев (траков). Эта цепь совершает сложное движение, участвуя в переносном движении вместе с корпусом трактора и относительном движении по отношению к нему. Тогда по теореме Кёнига кинетическая энергия цепи будет $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + T_{\text{отн}}$,

где $T_{\text{отн}} = \sum \frac{1}{2}m_k v_{\text{отн}}^2$; m_k – масса отдельного трака, а относительная скорость его равна v_c , т.к. у траков, лежащих на земле, абсолютная скорость равна нулю: $v_{\text{абс}} = v_c - v_{\text{отн}} = 0$.

Следовательно, $T_{\text{отн}} = \frac{1}{2}v_c^2 \sum m_k = \frac{1}{2}mv_c^2$. Тогда кинетическая энергия гусеницы $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$.

17.5. Меры действия сил. Импульс силы

В статике были введены понятия главного вектора и главного момента системы сил относительно центра. Каждая из этих величин: главный вектор

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_s$$

и главный момент относительно центра

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s)$$

– представляет меру действия сил.

В динамике рассматриваются также другие меры действия сил – импульс, работа и мощность силы.

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем

сначала понятие об элементарном импульсе, т.е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени dt . Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению вектора силы \vec{F} на элементарный промежуток времени dt :

$$d\vec{S} = \vec{F}dt. \quad (17.18)$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы. Импульс \vec{S} силы \vec{F} за конечный промежуток времени t_1 вычисляется, как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt. \quad (17.19)$$

В частном случае, если сила \vec{F} и по модулю и по направлению постоянна ($\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$), будем иметь $\vec{S} = \vec{F}t_1$. Причем в этом случае и модуль $S = Ft_1$.

В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции. Проекции импульса силы на оси координат вычисляются по формулам

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (17.20)$$

$$\text{Модуль импульса силы } S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \quad (17.21)$$

Размерность импульса силы $[S] = \text{MLT}^{-1}$, единица измерения – $1\text{Н}\cdot\text{с}$ или $1\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

17.6. Работа и мощность силы

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы.

а. Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки приложения

Пусть сила \vec{F} постоянна по величине и направлению ($\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$) и траекторией точки приложения силы является прямая, причем \vec{u} – вектор перемещения точки M (рис. 17.14).

Из курса физики известно, что работа силы в этом случае равна скалярному произведению силы на перемещение точки приложения силы, т. е.

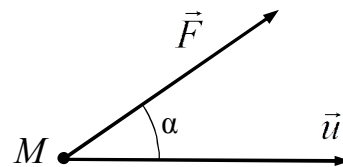


Рис. 17.14

$$A = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (17.22)$$

или

$$A = F \cos \alpha = F_{\tau}, \quad (17.23)$$

где F_{τ} – проекция силы на направление перемещения.

Знак работы определяется знаком $\cos \alpha$. Работа будет положительной, если угол α – острый, отрицательной – если угол α тупой, и равна нулю при $\alpha = 90^\circ$.

Размерность работы $[A] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$, единица измерения – 1 Н·м (джоуль) или $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$.

Если сила будет изменяться (переменная величина) и траектория точки приложения будет криволинейной, то вначале вводится понятие об элементарной работе силы на бесконечно малом перемещении.

б. Элементарная работа силы

Рассмотрим движение точки в некоторой системе отсчета $Oxyz$, заданное векторным способом (рис. 17.15). Здесь M_1, M_2 – отрезок траектории точки, \vec{F} – приложенная к точке сила, \vec{r} – радиус-вектор точки, $d\vec{r}$ – вектор элементарного перемещения, α – угол между силой и направлением движения (скоростью точки).

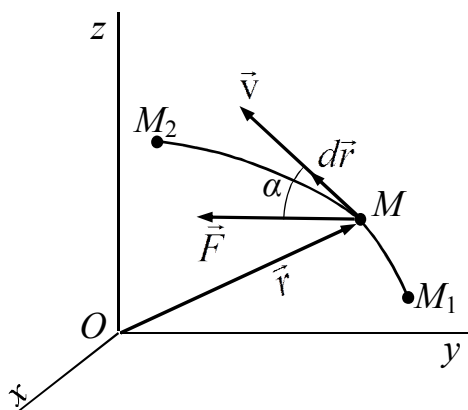


Рис. 17.15

На элементарном перемещении $d\vec{r}$ можно считать постоянной силу \vec{F} и вычислить элементарную работу с использованием формулы (17.22). Элементарной работой силы называют меру действия силы, равную скалярному произведению силы на элементарное перемещение:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (17.24)$$

Вычисляя скалярное произведение, получаем выражение элементарной работы в виде

$$dA = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha. \quad (17.25)$$

Знак элементарной работы определяется углом α . Элементарная работа положительна $dA > 0$, если $0 \leq \alpha < 90^\circ$ (острый угол), элементарная работа равна нулю $dA = 0$, если $\alpha = 90^\circ$ (прямой угол), и отрицательна $dA < 0$, если $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ (тупой угол).

Приведем другие формулы для вычисления элементарной работы силы. Если силу \vec{F} и элементарное перемещение $d\vec{r}$ разложить на составляющие

$$\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}, \quad d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k},$$

то элементарную работу можно записать в виде

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (17.26)$$

В этой формуле X, Y, Z – проекции силы на оси координат; x, y, z – координаты точки приложения силы; dx, dy, dz – проекции элементарного перемещения на оси координат, представляющие собой дифференциалы координат точки приложения силы.

Формулу (17.26) называют аналитическим выражением элементарной работы.

Из кинематики известно определение скорости при векторном и естественном способах задания движения точки: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}$.

В данном случае можно записать следующую формулу для вычисления элементарной работы:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = Fv \cos \alpha dt = F_{\tau} v dt = F_{\tau} ds, \quad (17.27)$$

где F_{τ} – проекция силы на направление касательной;

s – дуговая координата точки.

Из формулы (17.27) видно, что работу совершает только касательная составляющая силы.

в. Работа силы на конечном перемещении

Работа силы на конечном перемещении, например из точки M_1 в точку M_2 , находится как интегральная сумма элементарных работ на бесконечно малых перемещениях, на которые разбивается конечное перемещение:

$$A = \int_{\cup M_1 M_2} dA = \int_{\cup M_1 M_2} F_{\tau} ds. \quad (17.28)$$

Этот интеграл является криволинейным интегралом, и следовательно, в общем случае работа силы зависит от формы траектории.

Если элементарная работа силы dA будет полным дифференциалом некоторой функции от координат точки, то работа силы на конечном перемещении не будет зависеть от вида траектории. Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными.

г. Мощность силы

Мощность характеризует быстроту совершения работы силы во времени. Мощность силы в данный момент времени определяется формулой

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (17.29)$$

При расчетах также пользуются понятием средней мощности, т.е. отношением работы силы к промежутку времени, в течение которого совершена эта работа:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Подставив в (17.29) значение элементарной работы, получим

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (17.30)$$

Мощность силы равна скалярному произведению силы на скорость точки приложения силы. Размерность мощности $[N] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}$, единица измерения – $1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{Вт}$.

Представив выражение мощности в виде $N = F_{\tau}v$, отметим, что у двигателя, имеющего заданную мощность, сила тяги F_{τ} будет тем больше, чем меньше скорость движения. Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигателя двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги.

д. Примеры вычисления работы сил

1. Работа силы тяжести

Пусть точка M , на которую действует сила тяжести \vec{P} , перемещается из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$ по криволинейной траектории (рис. 17.16).

Элементарная работа силы тяжести

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz.$$

При выбранных осях координат $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = -P$.

Тогда элементарная работа

$$dA = -Pdz.$$

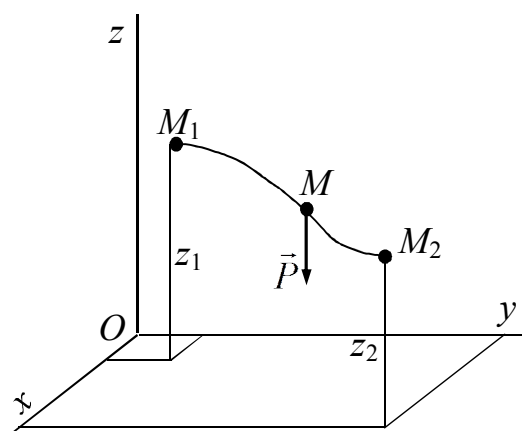


Рис. 17.16

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{\cup M_1 M_2} dA.$$

Подставляя значения элементарной работы, получаем

$$A = -P \int_{z_1}^{z_2} dz = -P(z_2 - z_1).$$

Обозначив $|z_1 - z_2| = h$, получаем

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \quad (17.31)$$

Работа силы тяжести равна взятому со знаком *плюс* или *минус* произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа силы тяжести положительна при опускании точки и отрицательна при подъеме. Из полученного результата следует, что работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка ее приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными, и сила тяжести является потенциальной силой.

Работа силы тяжести твердого тела определяется аналогично (17.31) по формуле

$$A = \pm Ph_c, \quad (17.32)$$

где h_c – вертикальное перемещение центра тяжести твердого тела.

2. Работа силы упругости

Вычислим работу силы упругости при прямолинейном перемещении точки ее приложения (рис. 17.17).

Выберем начало координат в конце недеформированной пружины и рассмотрим перемещение точки M из положения M_1 в положение M_2 . В положении M_1 точка имеет координату x_1 , а пружина – соответственно деформацию $\lambda_1 = \lambda_n$, в положении M_2 координата точки x_2 , деформация пружины $\lambda_2 = \lambda_k$. В произвольном положении деформация пружины x и проекция силы упругости на ось Ox $F_x = -cx$.

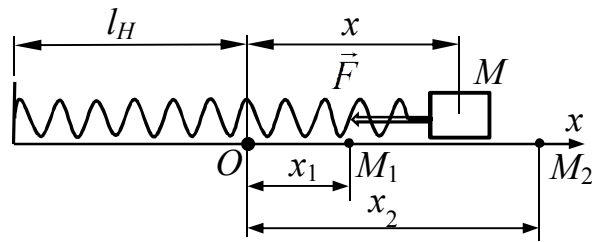


Рис. 17.17

Элементарная работа силы упругости $dA = F_x dx = -cxdx$, и работа на конечном перемещении

$$A = \int_{\cup M_1 M_2} dA = \int_{x_1}^{x_2} -cxdx = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Выражая работу силы упругости через деформацию пружины, получаем

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda_k^2 - \lambda_n^2), \quad (17.33)$$

где λ_k и λ_n – конечная и начальная деформации пружины.

По этой формуле вычисляется работа силы упругости, когда выполняется закон Гука для упругой силы. Полученная формула справедлива и при криволинейном перемещении точки. Работа силы упругости не зависит от вида траектории, а определяется лишь начальной и конечной деформациями. Сила упругости также является потенциальной силой.

3. Работа и мощность силы, приложенной к вращающемуся телу

Пусть в некоторой точке тела, вращающегося вокруг оси Oz , приложена сила \vec{F} (рис. 17.18,а).

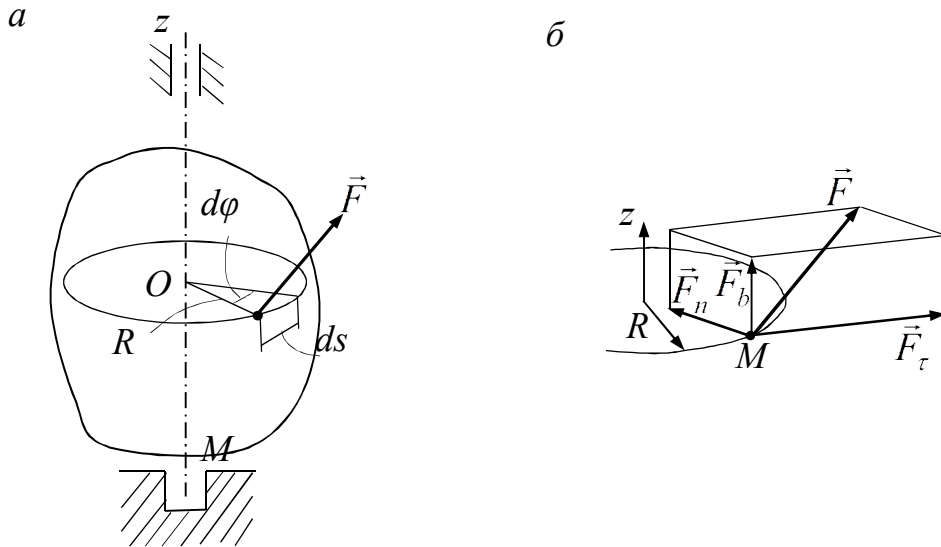


Рис. 17.18

Вычислим элементарную работу этой силы при повороте тела на элементарный угол $d\varphi$:

$$dA = F_\tau ds, \quad (17.34)$$

где $ds = R d\varphi$ и элементарная работа силы \vec{F} определяется $dA = F_\tau R d\varphi$.

Покажем, что произведение $F_\tau R = m_z(\vec{F})$ – момент силы относительно оси вращения. Разложим силу \vec{F} на составляющие по естественным осям координат (рис. 17.18,б): $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n + \vec{F}_b$. Применим теорему Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси Oz :

$$m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_\tau) + m_z(\vec{F}_n) + m_z(\vec{F}_b).$$

Нетрудно видеть, что момент силы \vec{F} относительно оси Oz $m_z(\vec{F}) = F_\tau R$, т. к. моменты составляющих \vec{F}_n и \vec{F}_b равны нулю – эти составляющие и ось Oz лежат в одной плоскости.

Окончательно получаем для элементарной работы

$$dA = m_z(\vec{F})d\varphi. \quad (17.35)$$

Элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота.

Работа силы на конечном перемещении – при повороте на конечный угол – определяется интегрированием:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z(\vec{F})d\varphi. \quad (17.36)$$

В частном случае, когда момент силы относительно оси постоянен ($m_z(\vec{F}) = \text{const}$), получаем

$$A = m_z(\vec{F})(\varphi_2 - \varphi_1) = m_z(\vec{F})\varphi, \quad (17.37)$$

т. е. работа постоянного момента силы равна произведению момента на угол поворота тела.

Вычислим мощность силы, приложенной к вращающемуся телу. По определению мощности имеем

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{m_z(\vec{F})d\varphi}{dt} = m_z(\vec{F})\omega, \quad (17.38)$$

т. е. мощность силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость тела.

4. Работа силы трения

4.1. При скольжении тела. Рассмотрим тело, движущееся по какой-нибудь шероховатой поверхности (рис. 17.19). Действующая на тело сила трения по закону Кулона

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения;

N – нормальная реакция поверхности.

Работа силы трения при перемещении из положения M_1 в положение M_2

$$A = - \int_{\cup M_1 M_2} F_{\text{тр}} ds = - \int_{\cup M_1 M_2} fN ds. \quad (17.39)$$

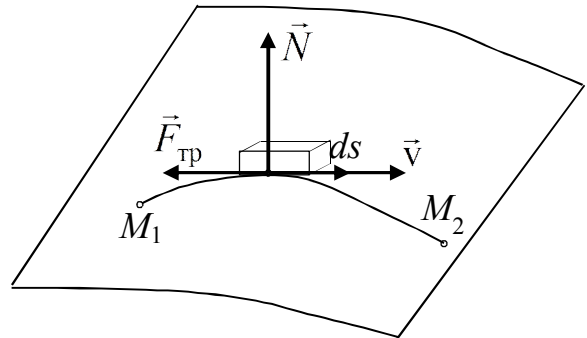


Рис. 17.19

Если величина силы трения постоянна, то $A = -F_{\text{тр}}s$, где s – длина кривой M_1M_2 , по которой перемещается точка.

Таким образом, работа силы трения при скольжении всегда отрицательна. Величина этой работы зависит от формы дуги M_1M_2 , и сила трения является непотенциальной силой.

4.2. Работа силы трения при качении без скольжения. Пусть диск катится без скольжения по неподвижной шероховатой поверхности (рис. 17.20). Диск совершает плоское движение, и точка P является мгновенным центром скоростей, $v_P = 0$.

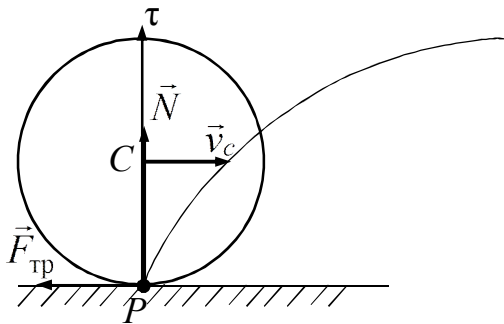


Рис. 17.20

Реакция поверхности, без учета сопротивления качению, разложена на две составляющие – нормальную составляющую к поверхности \vec{N} и касательную составляющую к поверхности $\vec{F}_{\text{тр}}$, причем $F_{\text{тр}} \leq fN$.

Элементарная работа силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$:

$$dA(F_{\text{тр}}) = \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{v}_P dt = 0, \text{ т. к. } v_P = 0.$$

4.3. Работа пары трения качения при качении без скольжения

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис. 17.21), создает пару, препятствующую качению, момент которой по закону Кулона $m_k = kN$, где k – коэффициент трения качения. Тогда по формуле (17.34), учитывая, что при качении угол поворота диска $d\varphi = \frac{ds_c}{R}$,

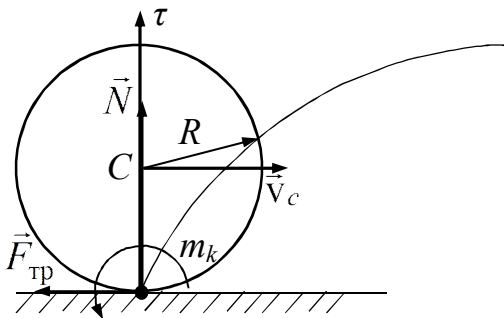


Рис. 17.21

получим

$$dA(m_k) = -kNd\varphi = -\frac{k}{R}Nds_c, \quad (17.40)$$

где ds_c – элементарное перемещение центра тяжести диска;

R – радиус диска.

Если $N = \text{const}$, то полная работа сил сопротивления качению

$$A(m_k) = -kN\varphi = -\frac{k}{R}Ns_c. \quad (17.41)$$

5. Работа внутренних сил в твердом теле (неизменяемой системе)

Докажем, что сумма работ и мощностей внутренних сил в твердом теле равна нулю на любом его перемещении.

Пусть M_1 и M_2 – две точки твердого тела, \vec{F}_1^i и \vec{F}_2^i – внутренние силы взаимодействия между ними (рис. 17.22). По третьему закону Ньютона $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$. Пусть тело получило элементарное перемещение, $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ – элементарные перемещения точек M_1 и M_2 .

Вычислим элементарную работу сил \vec{F}_1^i и \vec{F}_2^i :

$$\sum dA^i = \vec{F}_1^i d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^i d\vec{r}_2,$$

но $d\vec{r}_1 = \vec{v}_1 dt$, $d\vec{r}_2 = \vec{v}_2 dt$.

С учетом этого элементарная работа

$$\sum dA^i = (\vec{F}_1^i \vec{v}_1 + \vec{F}_2^i \vec{v}_2) dt = (F_1 v_1 \cos \alpha_1 - F_1 v_2 \cos \alpha_2) dt = F_1 (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) dt.$$

Из кинематики известно, что проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой, т.е. $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$.

Следовательно, $\sum dA^i = 0$. Так как твердое тело состоит из точек, попарно взаимодействующих между собой, то сумма элементарных работ всех внутренних сил равна нулю. А поскольку работа на конечном перемещении складывается из суммы элементарных работ, то работа всех внутренних сил (и мощность) в твердом теле на любом конечном перемещении тоже равна нулю.

Итак, для твердого тела имеем

$$\sum dA_s^i = 0, \quad \sum A_s^i = 0, \quad \sum N_s^i = 0. \quad (17.42)$$

Замечание. Работа внутренних сил равна нулю для неизменяемой системы, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не меняются. В частности, такой системой является нерастяжимая нить или система, состоящая из твердых тел, соединенных между собой шарнирами или нерастяжимыми идеальными нитями.

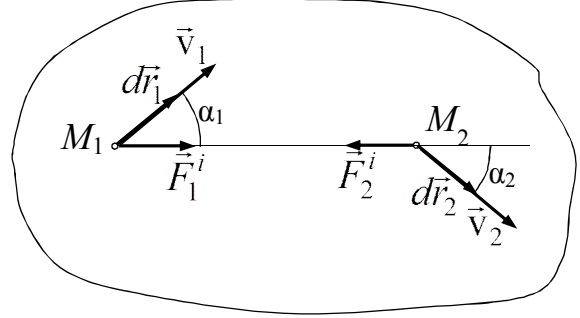


Рис. 17.22

17.7. Потенциальная энергия. Полная механическая энергия

Для потенциальных сил можно ввести понятие о потенциальной энергии как о величине, характеризующей "запас работы", которым обладают точки системы в данном положении. Дадим определение: *Потенциальной энергией материальной точки (механической системы) в данном положении называется скалярная величина Π , равная работе потенциальных сил, действующих на материальную точку (точки механической системы), при перемещении точки (механической системы) из данного положения в нулевое.*

Из определения следует, что потенциальная энергия точки зависит только от ее координат, т. е. $\Pi = \Pi(x, y, z)$. Соответственно потенциальная энергия системы зависит от координат точек механической системы $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Так, для груза весом P , поднятого на высоту h , потенциальная энергия будет $\Pi = mgh$ ($\Pi = 0$ при $h = 0$), потенциальная энергия растянутой (сжатой) пружины $\Pi = \frac{1}{2}c\lambda^2$, где λ – деформация пружины; c – коэффициент жесткости ($\Pi = 0$ при $\lambda = 0$).

Для системы, в которой действуют потенциальные силы, удобно ввести понятие полной механической энергии. Полная механическая энергия – это скалярная величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi. \quad (17.43)$$

При движении механической системы полная механическая энергия может изменяться или оставаться постоянной.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равно количество движения материальной точки, механической системы, твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс?
2. Чему равен момент количества движения точки относительно неподвижного центра, кинетический момент системы, кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
3. Чему равна кинетическая энергия материальной точки, твердого тела при поступательном, вращательном, плоском движении?
4. Две материальные точки одинаковой массой движутся прямолинейно навстречу друг другу с равными скоростями. Чему равны количество

движения точек и момент количества движения относительно центра? Чему равна их кинетическая энергия?

5. Как записывается выражение элементарной работы силы (аналитическое в том числе), работы силы на конечном перемещении, мощности силы?
6. Как определяется работа силы тяжести, силы упругости, силы, приложенной к вращающемуся телу?
7. Чему равна работа реакции шероховатой поверхности при качении тела без скольжения?

Глава 18. Общие теоремы динамики. Динамика твердого тела

В первой главе мы познакомились с решением задач динамики с использованием законов Ньютона. В частности, вторая задача динамики решается методом интегрирования дифференциальных уравнений движения. Однако точное решение дифференциальных уравнений движения возможно только в некоторых частных случаях, при определенных законах изменения действующих сил. В общем случае приходится использовать различные приближенные способы, а также программные продукты, например *Matemtica 7.0*. Трудности интегрирования возрастают при исследовании движения систем материальных точек (механических систем). Поэтому при решении многих задач динамики используют другие методы. Одним из методов решения задач динамики точки и системы является использование общих теорем динамики.

Общие теоремы динамики основаны на законах Ньютона и являются их следствиями. Для материальной точки общие теоремы динамики представляют преобразованное к той или иной форме основное уравнение динамики точки (второй закон Ньютона). Так как на движущиеся точки действуют силы, то они сообщают точкам ускорения, следовательно, скорости их изменяются, что приводит к изменению мер механического движения. Поэтому общие теоремы связывают изменение мер механического движения с мерами действия сил. Применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения задачи.

Общие теоремы динамики не дают возможности получить закон движения каждой точки механической системы. Они позволяют исследовать изменение мер механического движения изучаемого объекта (точки, тела и системы). В механике были рассмотрены три меры движения: количество движения, момент количества движения и кинетическая энергия. Этим трем мерам движения соответствуют и три теоремы об изменении этих мер, называемые общими теоремами динамики. Переходим к рассмотрению этих теорем.

18.1. Теорема об изменении количества движения

Данная теорема используется в двух формах: дифференциальной и конечной (интегральной или называемой теоремой импульсов).

Дифференциальная форма: Производная по времени от количества движения системы равна сумме всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_s^e. \quad (18.1)$$

Конечная форма: Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему, за тот же промежуток времени:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e. \quad (18.2)$$

Доказательство

А. Для материальной точки

Запишем основное уравнение динамики точки:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Поскольку ускорение точки $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, а масса точки m не зависит от времени, то основное уравнение динамики можно записать в виде

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \quad (18.3)$$

где $\vec{q} = m\vec{v}$ – количество движения точки; \vec{F} – равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

Теорема в дифференциальной форме доказана.

Умножая обе части равенства (18.3) на dt , получим

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt.$$

Интегрируя обе части этого уравнения в пределах от нуля до t , имеем

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F}dt,$$

или

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (18.4)$$

где \vec{S} – импульс равнодействующей, который равен геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил.

Для материальной точки теорема доказана.

Б. Для системы материальных точек

Запишем выражение (18.3) для каждой точки системы:

$$\frac{d\vec{q}_s}{dt} = \vec{F}_s^e + \vec{F}_s^i, \quad (18.5)$$

где \vec{F}_s^e, \vec{F}_s^i – соответственно равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к каждой точке.

Суммируя n уравнений (18.5), учитывая свойство внутренних сил (равенство нулю главного вектора) $\vec{R}^i = \sum \vec{F}_s^i = 0$, получим доказательство теоремы для системы в дифференциальной форме:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_s^e.$$

Переход к теореме в конечной форме

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e$$

выполняется аналогично доказательству для точки.

При решении задач теорема используется в проекциях на оси координат. В дифференциальной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum X_s^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum Y_s^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum Z_s^e, \quad (18.6)$$

где Q_x, Q_y, Q_z – проекции количества движения на оси координат;

X_s^e, Y_s^e, Z_s^e – проекции внешних сил на оси.

В конечной форме:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_y - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_z - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e, \quad (18.7)$$

где $S_{kx}^e, S_{ky}^e, S_{kz}^e$ – проекции импульсов внешних сил на оси.

Теорема доказана.

Замечания. 1. Внутренние силы не входят в теорему. Следовательно, внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения системы. Они могут изменить количество движения отдельных точек системы, но суммарное количество движения системы изменить не могут.

2. Рассмотренная ранее теорема о движении центра масс представляет собой иную форму записи теоремы об изменении количества движения. Действительно, количество движения системы $\vec{Q} = M\vec{v}_c$, где \vec{v}_c – скорость центра масс. Подставляя \vec{Q} в выражение (18.1) и учитывая, что масса M не зависит от времени, получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_s^e, \quad M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum \vec{F}_s^e, \quad M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_s^e \text{ – теорема о движении}$$

центра масс.

Теорема о движении центра масс обычно используется для нахождения внешних сил, в частности реакций связей по заданному закону движения центра масс. Теорема применяется также для исследования поступательного движения тела. Теорема об изменении количества движения используется для анализа движения жидкости, газов (сплошная среда), упругих тел. Теорема применяется также при изучении явления удара.

3. Закон сохранения количества движения

Из теоремы можно вывести важные следствия:

а) если главный вектор внешних сил в течение всего времени движения равен нулю, то количество движения системы не изменяется.

Если $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_s^e = 0$, то $\vec{Q} = \vec{Q}_0$ – количество движения системы остается таким, каким было в начальный момент времени;

б) если проекция главного вектора всех внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на ту же ось является постоянной величиной.

Если $R_x^e = \sum X_s^e = 0$, то $Q_x = Q_{x0}$.

Рассмотрим некоторые *примеры*. Законом сохранения количества движения можно объяснить явление отдачи или отката при выстреле. Если рассматривать винтовку и пулю (рис. 18.1,а), снаряд и орудие как одну систему (рис. 18.1,б), то давление пороховых газов будет внутренней силой и не может изменить общего количества движения системы.

Действительно, для случая, показанного на рис. 18.1,а, $m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$, так как внешние силы – сила тяжести винтовки и пули – действуют перпендикулярно оси Ox . Тогда $v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1x} = \frac{-9 \cdot 10^{-3}}{6} \cdot 600 = -0,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, винтовка смещается в направлении, противоположном положительному направлению оси x^1 .

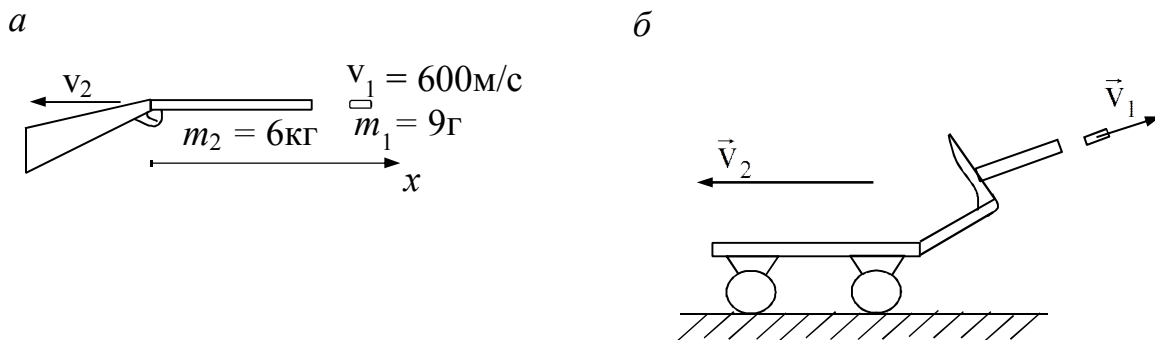


Рис. 18.1

¹Отметим, что в рассматриваемом примере v_1 – абсолютная скорость пули.

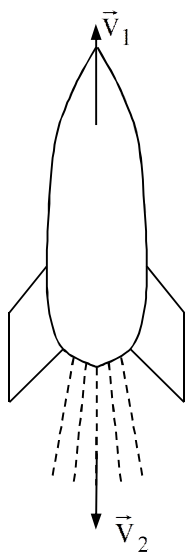


Рис. 18.2

Законом сохранения количества движения объясняется также отдача при реактивном движении, которая появляется при отделении от тела с некоторой скоростью какой-либо его части.

Так, при движении ракеты отделяющейся частью является струя газов, образующихся при сгорании топлива. Когда реактивная струя с большой скоростью вырывается из ракеты, то ракета вследствие отдачи устремляется в противоположную сторону (рис. 18.2).

18.2. Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов)

Теорема. Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему, относительно этого центра:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s^e). \quad (18.8)$$

Доказательство

А. Для одной материальной точки

Пусть на точку массой m действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ и \vec{F} – их равнодействующая (рис. 18.3).

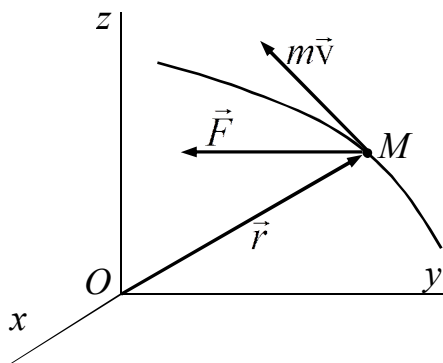


Рис. 18.3

Запишем основное уравнение динамики $m\vec{a} = \vec{F}$ и умножим обе части этого равенства слева на радиус-вектор \vec{r} :

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (18.9)$$

В правой части этой формулы получен момент равнодействующей, который по теореме Вариньона равен сумме моментов всех составляющих сил:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s).$$

Преобразуем левую часть выражения (18.9), используя формулу производной от векторного произведения:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}.$$

Но $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов.

Векторное произведение радиуса-вектора на количество движения представляет собой момент количества движения относительно центра O :

$$\vec{k}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{m}_0(\vec{F}). \quad (18.10)$$

Для одной материальной точки теорема доказана.

Б. Для системы материальных точек

Возьмем некоторую точку M_s системы. На нее действуют внешние и внутренние силы (рис. 18.4). Обозначим \vec{F}_s^e – равнодействующую внешних сил, \vec{F}_s^i – равнодействующую внутренних сил. На основании только что доказанной для точки теоремы имеем

$$\frac{d\vec{k}_{s0}}{dt} = \vec{m}_0(\vec{F}_s^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_s^i) \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (18.11)$$

Просуммировав такие равенства, написанные для всех точек системы, учитывая свойство внутренних сил $\vec{M}_0^i = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s^i) = 0$ – равенство нулю главного момента внутренних сил, получим окончательно

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s^e), \quad (18.12)$$

где \vec{K}_0 – кинетический момент системы относительно неподвижного центра;

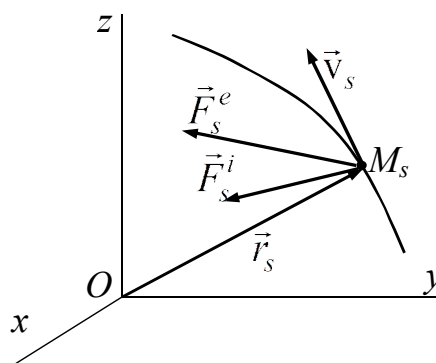


Рис. 18.4

$\vec{M}_0^e = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s^e)$ – главный момент внешних сил относительно этого центра.

Проецируя (18.12) на декартовы оси координат, получим теорему моментов относительно осей:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\vec{F}_s^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\vec{F}_s^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_s^e), \quad (18.13)$$

где K_x, K_y, K_z – кинетические моменты системы относительно осей;

$m_x(\vec{F}_s^e), m_y(\vec{F}_s^e), m_z(\vec{F}_s^e)$ – моменты внешних сил относительно этих осей.

Теорема доказана.

Замечания. 1. Внутренние силы не входят в теорему и не влияют непосредственно на изменение кинетического момента системы. Внутренние силы могут изменять момент количества движения отдельных точек системы, но кинетический момент в целом они изменить не могут.

2. Теорема моментов доказана относительно неподвижного центра и относительно неподвижной оси, т.е. для абсолютного движения системы в основной системе отсчета. Можно доказать, что теорема в такой же форме справедлива и для относительного движения, если подвижная система отсчета совершает поступательное движение вместе с центром масс по отношению к данной инерциальной системе отсчета.

Теорема моментов в относительном движении по отношению к центру масс

Пусть $O_1x_1y_1z_1$ – неподвижная (инерциальная) система отсчета, $Sxyz$

– система, движущаяся поступательно вместе с центром масс (рис. 18.5). Механическая система совершает сложное движение, которое можно разложить на переносное поступательное и относительное движение.

Теорема. В указанном относительном движении производная по времени от кинетического момента системы относительно центра масс равна сумме моментов внешних сил относительно центра масс:

$$\frac{d\vec{K}_c^{\text{отн}}}{dt} = \sum \vec{m}_c(\vec{F}_s^e). \quad (18.14)$$

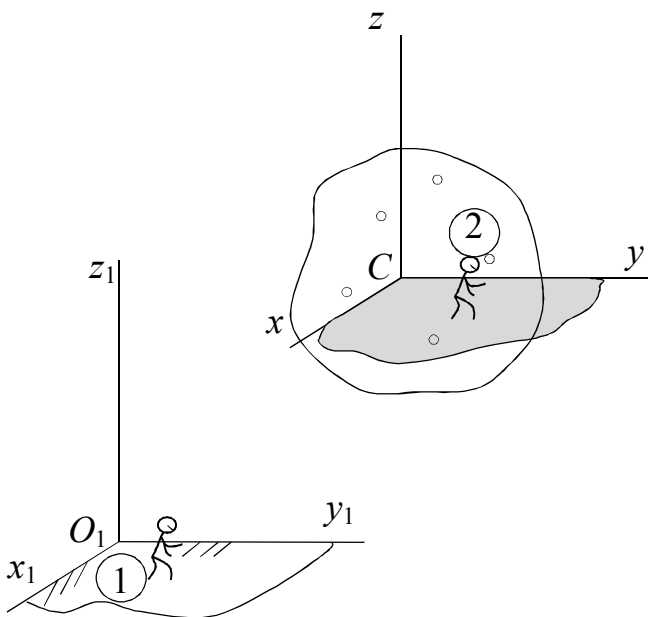


Рис. 18.5

Теорему можно записать относительно осей, проходящих через центр масс:

$$\frac{dK_{cx}^{\text{отн}}}{dt} = \sum m_{cx}(\vec{F}_s^e), \quad \frac{dK_{cy}^{\text{отн}}}{dt} = \sum m_{cy}(\vec{F}_s^e), \quad \frac{dK_{cz}^{\text{отн}}}{dt} = \sum m_{cz}(\vec{F}_s^e). \quad (18.15)$$

Отметим, что в любой другой подвижной системе отсчета теорема не будет иметь такого вида.

3. Закон сохранения кинетического момента

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия:

а) если главный момент внешних сил относительно неподвижного центра во все время движения равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра остается постоянным по модулю и по направлению.

$$\text{Если } \sum \vec{m}_0(\vec{F}_s^e) = 0, \text{ то } \vec{K}_0 = \vec{K}_0|_{t=0} (\text{const}); \quad (18.16)$$

б) если главный момент внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю во все время движения, то кинетический момент системы относительно этой оси будет постоянным.

$$\text{Если } \sum m_x(\vec{F}_s^e) = 0, \text{ то } K_x = K_x|_{t=0} (\text{const}). \quad (18.17)$$

Отметим также: если главный момент внешних сил относительно центра масс равен нулю во все время движения (см. (18.14)), то кинетический момент в относительном движении будет постоянным.

Сформулированные утверждения и выражают закон сохранения момента количества движения (или кинетического момента).

Приведем примеры на закон сохранения кинетического момента.

Пример 18.1. Движение искусственного спутника Земли (ИСЗ)

Движение ИСЗ происходит под действием центральной силы – силы притяжения, направленной к центру Земли – точке O (рис. 18.6). В этом случае момент силы \vec{F} относительно центра O равен нулю ($\vec{m}_0(\vec{F}) = 0$) во все время движения. Следовательно, момент количества движения относительно центра O остается постоянным: $\vec{k}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{k}_0|_{t=0}$. Вектор \vec{k}_0 будет постоянным по модулю и направлению. Из постоянства направления следует, что траекторией точки будет плоская кривая. Из постоянства модуля вытекает, что $mvh = \text{const}$, где h – длина перпенди-

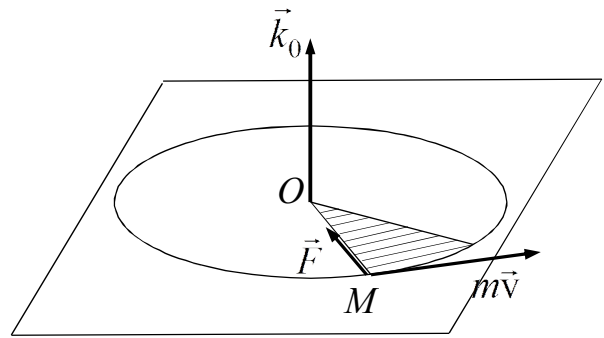


Рис. 18.6

куляра, опущенного из точки O на линию вектора $m\vec{v}$. Отсюда видно, что чем меньше h , тем больше скорость v .

Пример 18.2. Закон сохранения момента количества движения можно продемонстрировать на опыте с "платформой Жуковского". Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси Oz (рис. 18.7). Если платформе с находящимся на ней человеком сообщить угловую скорость ω_0 (рис. 18.7,а), то кинетический момент системы относительно вертикальной оси Oz можно представить в виде

$$K_z = J_z^{(0)} \omega_0,$$

где $J_z^{(0)}$ – момент инерции человека и платформы относительно оси Oz .

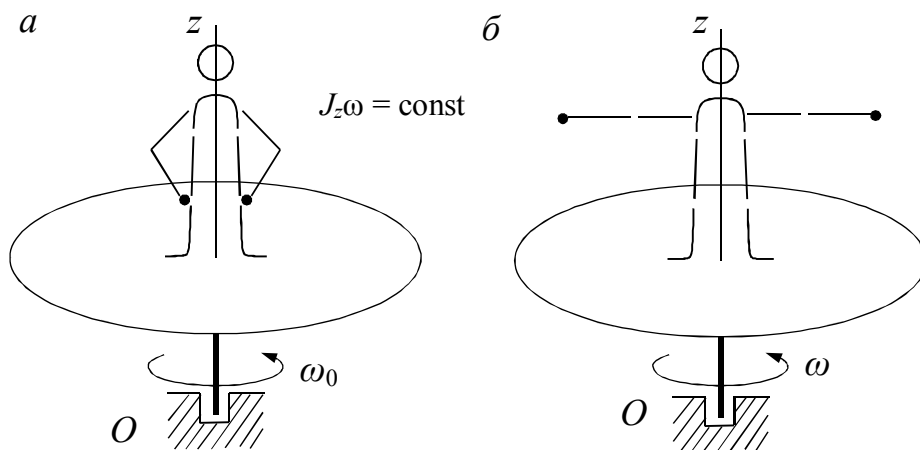


Рис. 18.7

Если пренебречь силами трения, то внешние силы – сила тяжести и реакции подшипников – не дают моментов относительно вертикальной оси, т.е. $M_z^e = \sum m_z (\vec{F}_s^e) = 0$ и, следовательно, будет выполняться закон сохранения кинетического момента относительно оси Oz $K_z = K_z(0)$, т.е.

$$J_z \omega = J_z^{(0)} \omega_0.$$

Если человек разведет руки в стороны (рис. 18.7,б), то увеличится момент инерции J_z и угловая скорость уменьшится, и наоборот. Это же явление можно наблюдать при выполнении упражнений (вращений) акробатами, фигуристами и др.

Пример 18.3. По ободу круглой горизонтальной платформы 1, масса которой m_1 и радиус R , идет человек 2, масса которого m_2 (рис. 18.8,а). Скорость человека относительно платформы – $v_r = u$. Пренебрегая трением в подшипниках, определить угловую скорость вращения платформы. В начальный момент времени человек и платформа находились в покое, платформу считать однородным диском.

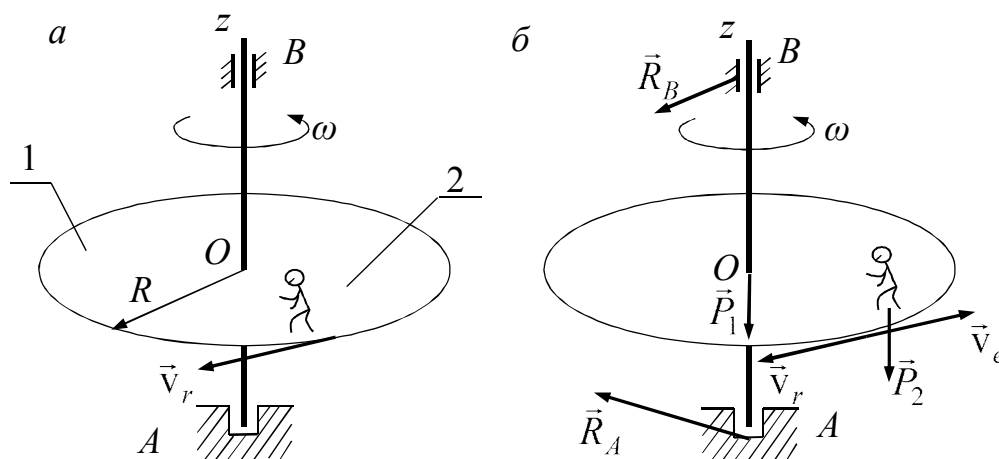


Рис. 18.8

Решение задачи полезно начать с кинематического анализа (рис. 18.8,б). Платформа 1 совершает вращательное движение с угловой скоростью ω . Движение человека 2 является сложным: относительное движение по отношению к платформе криволинейное со скоростью $v_r = u$, переносное движение – вращение платформы и переносная скорость $v_e = R\omega$.

Решение. В систему включим платформу и человека, внешние силы \vec{P}_1 , \vec{P}_2 и реакции опор \vec{R}_A и \vec{R}_B . Применим теорему моментов относительно оси Oz :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_s^e).$$

Сумма моментов внешних сил относительно оси Oz равна нулю, $\sum m_z(\vec{F}_s^e) = 0$, так как силы пересекают ось Oz или параллельны ей. Кинетический момент системы равен сумме кинетических моментов платформы K_{1z} и человека K_{2z} .

Кинетический момент платформы

$$K_{1z} = J_{1z}\omega = \frac{m_1 R^2}{2} \omega.$$

Кинетический момент человека

$$K_{2z} = K_{2z}^{\text{пер}} + K_{2z}^{\text{отн}} = m_2 v_e R - m_2 v_r R = m_2 R^2 \omega - m_2 u R.$$

Кинетический момент системы

$$K_z = \frac{m_1 R^2}{2} \omega + m_2 R^2 \omega - m_2 u R.$$

Поскольку главный момент внешних сил равен нулю, то выполняется закон сохранения кинетического момента:

$$K_z = K_z|_{t=0}.$$

Если в начальный момент времени система находилась в покое, то $K_z|_{t=0} = 0$.

Приравнявая нулю кинетический момент в произвольный момент времени

$$\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)R^2\omega - m_2 u R = 0,$$

определим угловую скорость:

$$\omega = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \frac{u}{R}.$$

При анализе полученного выражения угловой скорости видно, что если $m_1 \gg m_2$, то $\omega \approx 0$ – тяжелая платформа остается неподвижной.

Если $m_1 \ll m_2$, то $\omega \approx \frac{u}{R}$ – угловая скорость "легкой" платформы.

18.3. Теорема об изменении кинетической энергии

Эта общая теорема динамики устанавливает связь между мерой механического движения – кинетической энергией и мерой действия силы – работой или мощностью. Теорема может быть сформулирована в трех формах.

На элементарном перемещении: *Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на систему:*

$$dT = \sum dA_s^e + \sum dA_s^i. \quad (18.18)$$

На конечном перемещении: *Изменение кинетической энергии системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему, на этом перемещении:*

$$T - T_0 = \sum A_s^e + \sum A_s^i. \quad (18.19)$$

Через мощность: Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_s^e + \sum N_s^i. \quad (18.20)$$

А. Для материальной точки

Пусть точка M перемещается из положения M_1 в положение M_2 (рис. 18.9) и \vec{F} – равнодействующая всех сил, действующих на точку.

Запишем основное уравнение динамики точки

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

и умножим обе части равенства на элементарное перемещение точки $d\vec{r}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r}. \quad (18.21)$$

В правой части выражения (18.21) стоит элементарная работа равнодействующей $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, которая равна сумме работ всех действующих на точку сил.

Левую часть выражения (18.21) можно представить в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

причем учтено, что $\vec{v}^2 = v^2$ – скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля. Тогда получим

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_s. \quad (18.22)$$

Для элементарного перемещения теорема доказана.

Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих точкам M_1 и M_2 , получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_s, \quad (18.23)$$

где v – скорость точки в положении M_2 ;

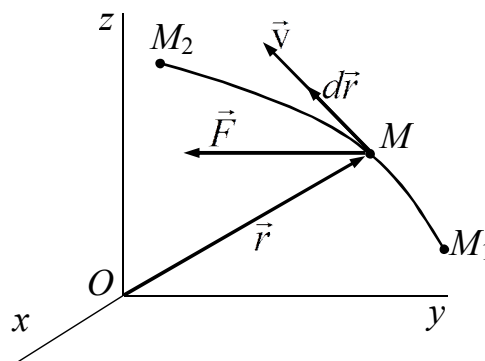


Рис. 18.9

v_0 – скорость точки в положении M_1 ;

$\sum A_s$ – работа всех сил, действующих на точку при перемещении из положения M_1 в положение M_2 .

Б. Для механической системы

Возьмем одну из точек системы с массой m_s . На эту точку действуют внешние и внутренние силы – \vec{F}_s^e и \vec{F}_s^i (равнодействующие соответствующих сил). На основании вышедшей теоремы для точки:

$$d\left(\frac{m_s v_s^2}{2}\right) = dA_s^e + dA_s^i, \quad (18.24)$$

где dA_s^e и dA_s^i – элементарные работы внешних и внутренних сил.

Написав такие уравнения для всех точек, просуммировав их, учитывая, что $T = \sum \frac{m_s v_s^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, получаем

$$dT = \sum dA_s^e + \sum dA_s^i. \quad (18.25)$$

Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих начальному и конечному положениям, получим

$$T - T_0 = \sum A_s^e + \sum A_s^i. \quad (18.26)$$

Разделив обе части выражения (18.25) на элементарный промежуток времени dt , учитывая, что $N = \frac{dA}{dt}$ – мощность силы, получаем теорему об изменении кинетической энергии, выраженную через мощность:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_s^e + \sum N_s^i. \quad (18.27)$$

Замечания. 1. В теорему об изменении кинетической энергии в общем случае входят внешние и внутренние силы. При изучении работы сил были рассмотрены случаи механических систем (абсолютно твердое тело, неизменяемая механическая система, система, состоящая из абсолютно твердых тел, соединенных шарнирами, нерастяжимыми нитями), когда работа внутренних сил равна нулю: $\sum A_s^i = 0$.

В этом случае теорема об изменении кинетической энергии запишется так:

$$dT = \sum dA_s^e, \quad T - T_0 = \sum A_s^e, \quad \frac{dT}{dt} = \sum N_s^e, \text{ т. е. в теореме в этом случае}$$

будут входить только внешние силы.

2. Достаточно часто в механике рассматриваются системы с идеальными связями. Если все действующие силы, как внешние, так и внутренние, разделить на активные и реакции связей, то теорему на элементарном перемещении можно записать в виде

$$dT = \sum dA_s^{\text{акт}} + \sum dA_s^{\text{реакц}} \quad (18.28)$$

Связи, наложенные на систему, называются идеальными, если выполняется условие $\sum dA_s^{\text{реакц}} = 0$. На рис. 18.10 показаны примеры идеальных связей.

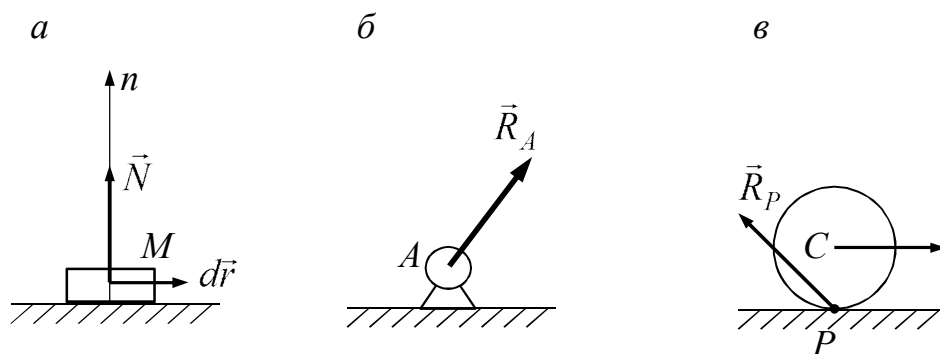


Рис. 18.10

Здесь *a* – неподвижная гладкая поверхность, для которой

$$dA = |\vec{N}| \cdot |d\vec{r}| \cos 90 = 0;$$

б – неподвижный шарнир без трения: $dA = \vec{R} \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$;

в – шероховатая поверхность для катящегося без скольжения тела, когда $v_P = 0$ – скорость точки приложения силы равна нулю (МЦС). Следовательно элементарная работа реакции

$$dA = |\vec{R}_P| \cdot v_P \cdot dt = 0.$$

Для системы с идеальными связями теорема примет вид

$$dT = \sum dA_s^{\text{акт}}, \quad T - T_0 = \sum A_s^{\text{акт}}.$$

Изменение кинетической энергии системы с идеальными связями на элементарном и конечном перемещениях равно сумме работ всех активных сил (внешних и внутренних).

Соответственно в записи теоремы через мощность $\frac{dT}{dt} = \sum N_s^{\text{акт}}$ учитывается мощность только активных сил.

3. Использование той или иной формы теоремы определяется навыками, полученными при решении задач. При определении скоростей точек

тел удобно использовать теорему на конечном перемещении в форме (18.26). Для определения ускорений находится производная по времени от выражения (18.26), причем конечное перемещение является произвольным. Для определения ускорений удобно теорему об изменении кинетической энергии записывать через мощность в форме (18.27).

4. Закон сохранения механической энергии

Если на изучаемый объект – точку или систему – действуют только потенциальные силы, то теорема об изменении кинетической энергии примет вид

$$T - T_0 = A = \Pi_0 - \Pi, \quad (18.29)$$

где Π_0 , Π – потенциальная энергия в начальном и конечном положении системы.

Учитывая, что сумма кинетической и потенциальной энергий $E = T + \Pi$ представляет полную механическую энергию, выражение (18.29) можно представить в виде

$$E = E_0. \quad (18.30)$$

Это и есть закон сохранения механической энергии – *полная механическая энергия при движении системы в потенциальном силовом поле является величиной постоянной*.

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются консервативными.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается постоянной. Это можно продемонстрировать на примере свободного падения тела (рис. 18.11,а) в среде без сопротивления.

На рис. 18.11,б видно, что потенциальная энергия тела уменьшается при его падении, а кинетическая энергия соответственно увеличивается.

Если на систему действуют также непотенциальные силы (например, силы сопротивления), то теорема об изменении кинетической энергии примет вид

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi + A_{\text{непот. сил}},$$

или

$$(T + \Pi) - (T_0 + \Pi_0) = A_{\text{непот. сил}},$$

$$E - E_0 = A_{\text{непот. сил}}. \quad (18.31)$$

В этом случае при движении системы механическая энергия изменяется, и ее изменение равно работе непотенциальных сил.

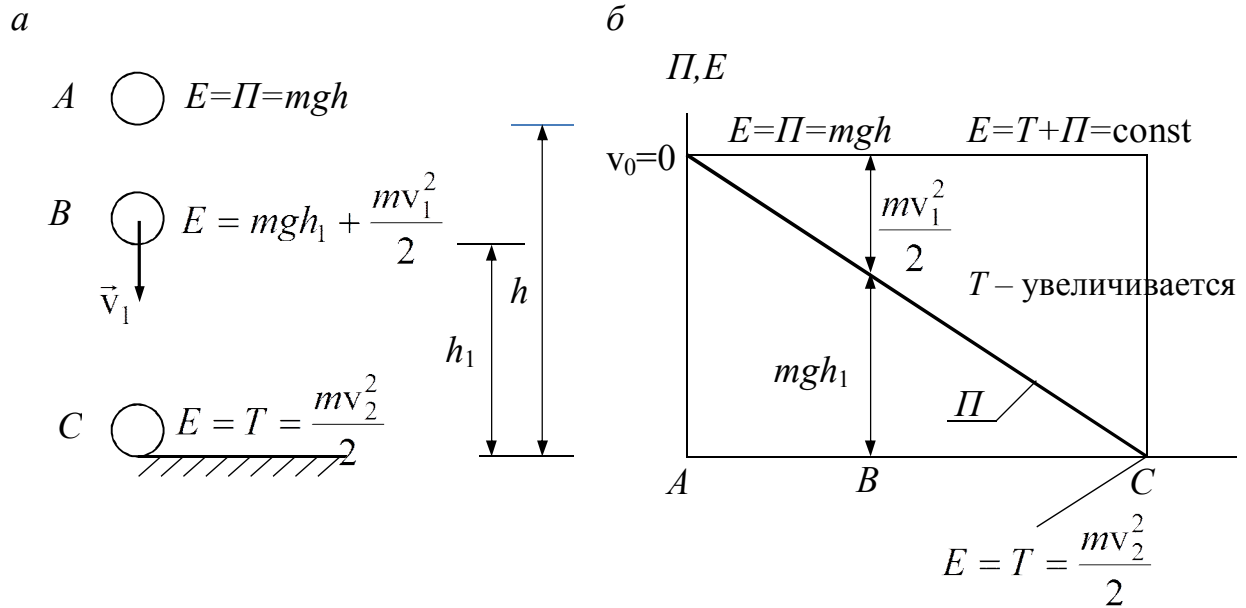


Рис. 18.11

Пример 18.4. Однородный стержень OA длиной l и весом P падает из горизонтального положения без начальной скорости, вращаясь вокруг горизонтальной неподвижной оси O (рис. 18.12, *a*). Пренебрегая сопротивлениями, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня как функции угла поворота.

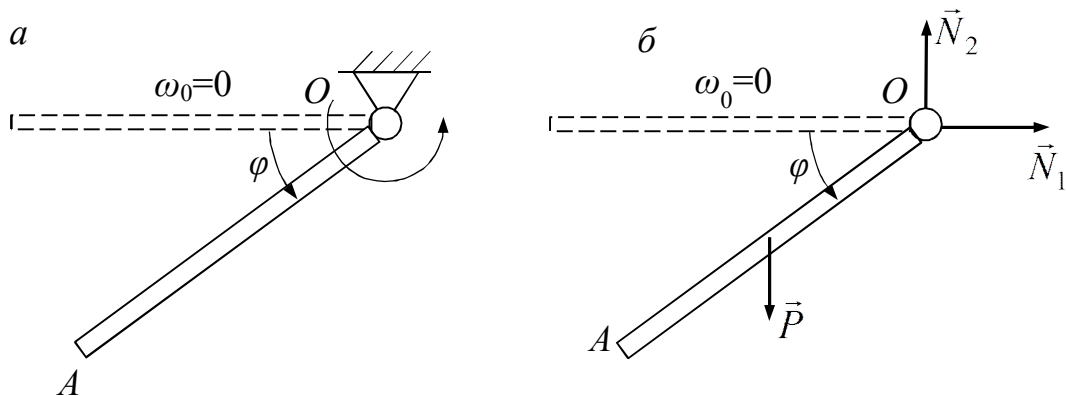


Рис. 18.12

Решение. 1. Рассмотрим движение стержня и изобразим его в произвольный момент времени (рис. 18.12, *б*). Стержень совершает вращательное движение.

2. Покажем действующие на него силы: \vec{P} , \vec{N}_1 , \vec{N}_2 .

3. Отметим на рисунке начальное и конечное положения стержня и запишем теорему на конечном перемещении:

$$T - T_0 = \sum A_s^e.$$

Кинетическая энергия стержня:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2,$$

$T_0 = 0$ в силу начальных условий.

Работа внешних сил: $\sum A_s^e = Ph = mg \frac{l}{2} \sin \varphi$, $A(\vec{N}_1) = OA(\vec{N}_2) = 0$, так как связь идеальная. Вычислив кинетическую энергию и работу сил, находим угловую скорость:

$$\frac{1}{6} ml^2 \omega^2 = mg \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad \omega^2 = 3 \frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (18.32)$$

Для определения углового ускорения стержня найдем производную по времени от левой и правой частей выражения (18.32):

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = 3 \frac{g}{l} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получаем выражение углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \varphi. \quad (18.33)$$

Замечание. В выражения (18.32), (18.33) не входит вес стержня P . Читателям предлагается с помощью теоремы о движении центра масс $M\vec{a}_c = \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ определить опорные реакции, учитывающие силу тяжести стержня.

Пример 18.5. Барабан 1 массой m_1 и радиусом R вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O . Барабан считать однородным диском, к которому приложен постоянный вращающий момент $M_{вр}$ (рис. 18.13,а). Груз 2 массой m_2 поднимается посредством каната, навитого на барабан. Пренебрегая весом каната и сопротивлениями, найти угловое ускорение барабана, реакцию шарнира в точке O и натяжение каната.

Решение. Барабан 1 совершает вращательное движение, его угловая скорость ω_1 ; груз 2, который заменяем точкой, совершает прямолинейное движение, его скорость v_2 (рис. 18.13,б). Связь между скоростями: $v_2 = R\omega_1$.

Отметим, что ускорения и перемещения связаны так же, как скорости: $a_2 = R\varepsilon_1$, $h_2 = R\varphi_1$, где a_2 – ускорение груза; h_2 – его вертикальное перемещение; ε_1 , φ_1 – угловое ускорение, угол поворота барабана.

За систему принимаем барабан, груз, канат. Внешние силы – \vec{P}_1, \vec{P}_2 , $M_{\text{вр}}$, \vec{N}_1, \vec{N}_2 (рис. 18.13, б).

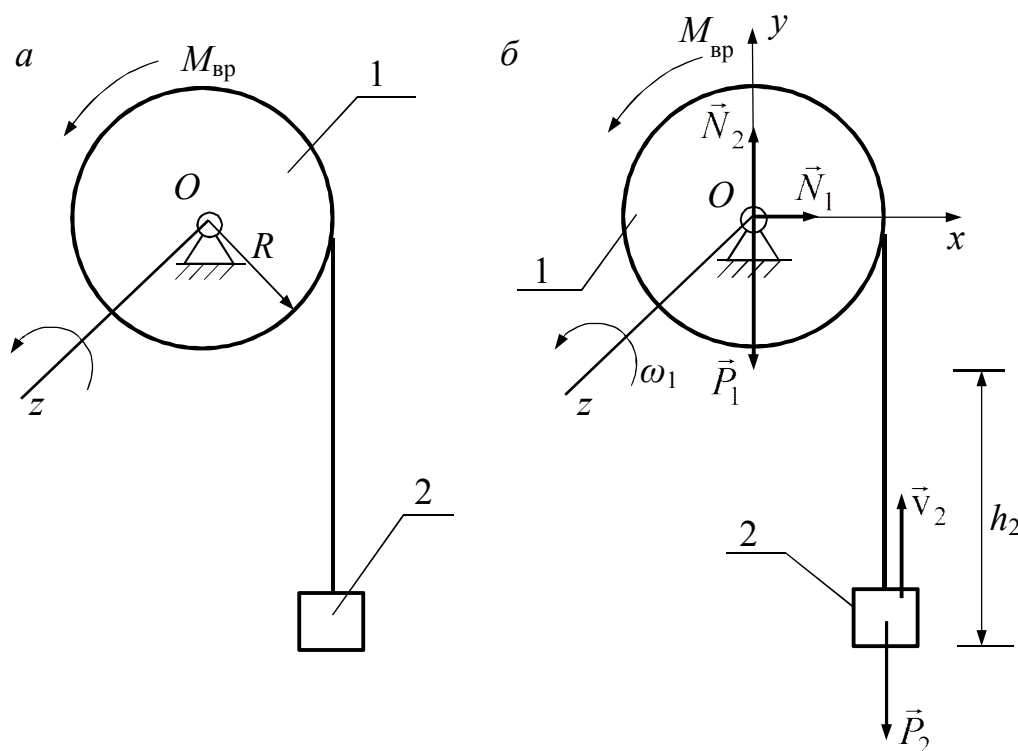


Рис. 18.13

Угловое ускорение барабана можно определить с помощью теорем об изменении кинетического момента или кинетической энергии.

Теорема об изменении кинетического момента относительно оси вращения:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_s^e).$$

Главный момент внешних сил:

$$\sum m_z(\vec{F}_s^e) = M_{\text{вр}} - P_2 R = M_{\text{вр}} - m_2 g R.$$

Кинетический момент системы относительно оси Oz (см. гл. 17):

$$K_z = J_{1z} \omega_1 + m_2 v_2 R = \frac{m_1 R^2}{2} \omega_1 + m_2 R^2 \omega_1 = \frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) R^2 \omega_1.$$

Подставляя в теорему, получаем

$$\frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) R^2 \frac{d\omega_1}{dt} = M_{\text{вр}} - m_2 g R.$$

Угловое ускорение барабана ε_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{2(M_{\text{вр}} - m_2 g R)}{(m_1 + 2m_2)R^2}. \quad (18.34)$$

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии на конечном перемещении:

$$T - T_0 = \sum A_s^e + \sum A_s^i.$$

Работа внутренних сил $\sum A_s^i = 0$; не нарушая общих рассуждений, считаем, что в начальный момент времени система находится в покое, тогда $T_0 = 0$.

Работа внешних сил:

$$\sum A_s^e = M_{\text{вр}}\varphi_1 - m_2 g h_2 = M_{\text{вр}}\varphi_1 - m_2 g R \varphi_1 = (M_{\text{вр}} - m_2 g R)\varphi_1$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_{1z} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_1^2 = \frac{1}{4} (m_1 + 2m_2) R^2 \omega_1^2.$$

Подставляя выражение кинетической энергии в теорему, получим

$$\frac{1}{4} (m_1 + 2m_2) R^2 \omega_1^2 = (M_{\text{вр}} - m_2 g R) \varphi_1. \quad (18.35)$$

Из выражения (18.35) можно найти зависимость угловой скорости от угла поворота барабана. Вычисляя производную левой и правой частей по времени, получим

$$\frac{1}{4} (m_1 + 2m_2) R^2 2\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (M_{\text{вр}} - m_2 g R) \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Выражение углового ускорения барабана:

$$\varepsilon_1 = \frac{2(M_{\text{вр}} - m_2 g R)}{(m_1 + 2m_2)R^2}.$$

Для определения углового ускорения удобно теорему об изменении кинетической энергии записать через мощность:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_s^e + \sum N_s^i.$$

Мощность внутренних сил $\sum N_s^i = 0$, мощность внешних сил

$$\sum N_s^e = M_{\text{вр}} \omega_1 - P_2 v_2 = M_{\text{вр}} \omega_1 - m_2 g R \omega_1 = (M_{\text{вр}} - m_2 g R) \omega_1.$$

Подставляя выражение мощности в теорему и вычисляя производную от кинетической энергии, получим значение углового ускорения барабана.

Для определения реакции шарнира в точке O воспользуемся теоремой о движении центра масс системы:

$$M\vec{a}_c = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Проецируя записанную теорему на оси Ox и Oy , получим

$$x) Ma_{cx} = N_1;$$

$$y) Ma_{cy} = -P_1 - P_2 + N_2.$$

Нетрудно видеть, что $Ma_{cx} = 0$, $Ma_{cy} = m_1 a_{0y} + m_2 a_{2y} = m_2 a_2 = m_2 R \varepsilon_1$.

Подставляя проекции ускорения на оси в теорему, получаем

$$N_1 = 0; \quad N_2 = (m_1 + m_2)g + m_2 R \varepsilon_1.$$

Полезно отметить, что составляющая реакции N_2 при движении системы имеет статическую часть $-(m_1 + m_2)g$ и динамическую добавку $-m_2 R \varepsilon_1$.

Для определения натяжения каната рассмотрим движение груза 2 (рис. 18.14). Записывая основное уравнение динамики

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{N}_3,$$

проецируя уравнение на ось y , получим $m_2 R \varepsilon_1 = -P_2 + N_3$, откуда натяжение каната при движении системы $N_3 = m_2 g + m_2 R \varepsilon_1$, состоящее из статической составляющей и динамической добавки.

Определив натяжение каната, применяя теорему о движении центра масс для барабана 1, также можно найти составляющие реакции N_1 и N_2 (рекомендуется проделать самостоятельно).

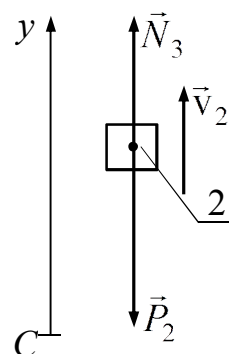


Рис. 18.14

18.4. Динамика твердого тела

Рассмотрим приложение общих теорем к динамике твердого тела, совершающего один из видов движений – поступательное, вращательное, плоскопараллельное.

А. Поступательное движение тела

Поступательное движение тела полностью определяется движением центра масс, поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс (16.11) представляют собой дифференциальные уравнения поступательного движения тела.

Б. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Пусть на тело, имеющее неподвижную ось вращения z (рис. 18.15), действует система заданных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Кроме того, на тело действуют реакции подшипников \vec{R}_A и \vec{R}_B . Под действием всех этих внешних

сил – активных и реакций связей – тело может вращаться вокруг оси равномерно, ускоренно или замедленно. Применим теорему моментов относительно оси z :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_s^e).$$

Кинетический момент K_z вращающегося тела

$$K_z = J_z \omega.$$

Подставив K_z в теорему моментов и вынося момент инерции J_z за знак производной, получим

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_s^e) \quad (18.36)$$

(для твердого тела величина J_z не зависит от времени).

Из кинематики известно выражение углового ускорения $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$.

Тогда уравнение (18.36) можно переписать в форме

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum m_z(\vec{F}_s^e) \quad (18.37)$$

$$\text{или } J_z \varepsilon = \sum m_z(\vec{F}_s^e).$$

Полученное уравнение (18.36) или (18.37) называют дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Сравнивая уравнение $J_z \varepsilon = \sum m_z(\vec{F}_s^e)$ с основным уравнением динамики точки $m\vec{a} = \sum \vec{F}_s$, видим, что для вращающегося тела момент инерции выполняет ту же роль, что и масса для материальной точки:

$$\varepsilon = \frac{\sum m_z(\vec{F}_s^e)}{J_z}, \quad a = \frac{|\sum \vec{F}_s|}{m}.$$

Чем больше момент инерции J_z , тем меньшее угловое ускорение может сообщить телу приложенный вращающий момент $M_z^e = \sum m_z(\vec{F}_s^e)$.

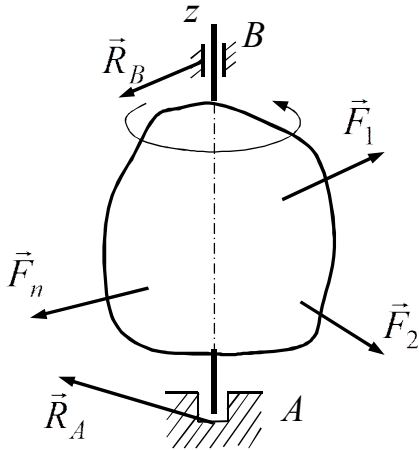


Рис. 18.15

Момент инерции тела относительно оси вращения является мерой инертности его в этом движении (подобно массе в поступательном движении).

Используя уравнение $J_z \ddot{\varphi} = \sum m_z(\vec{F}_s^e)$, можно решить две основные задачи динамики: 1) по заданному кинематическому закону вращения $\varphi = \varphi(t)$ определить главный момент внешних сил; 2) по заданным внешним силам определить уравнение вращения.

Замечание. Отметим правило знаков при использовании уравнения (18.37). Направление вращения тела принимают за положительное. Момент сил, направленных в сторону вращения, берется со знаком *плюс*, момент сил, направленных в противоположную сторону, – со знаком *минус*.

В качестве приложения дифференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси рассмотрим задачу о колебаниях математического и физического маятников.

Математический и физический маятники

Математическим маятником называется тело, рассматриваемое как материальная точка, подвешенное на нерастяжимой нити и движущееся под действием силы тяжести в вертикальной плоскости.

Физическим маятником называют твердое тело произвольной формы, вращающееся под действием силы тяжести вокруг горизонтальной (или наклонной) оси, не проходящей через центр тяжести. Ось вращения называют осью подвеса маятника. Для исследования движения маятников воспользуемся теоремой моментов относительно оси подвеса. Уравнение движения составим для физического маятника. Проведем через центр тяжести плоскость перпендикулярно оси подвеса и изобразим маятник в произвольный момент времени (рис. 18.16), где φ – угол отклонения маятника. На маятник действуют сила тяжести \vec{P} и реакция подшипника \vec{N} , сопротивлением пренебрегаем.

Запишем дифференциальное уравнение вращения маятника вокруг оси Oz :

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum m_z(\vec{F}_s^e),$$

где J_z – момент инерции маятника относительно оси Oz ;

$$\sum m_z(\vec{F}_s^e) = -Pa \sin \varphi;$$

a – расстояние от центра тяжести до оси подвеса.

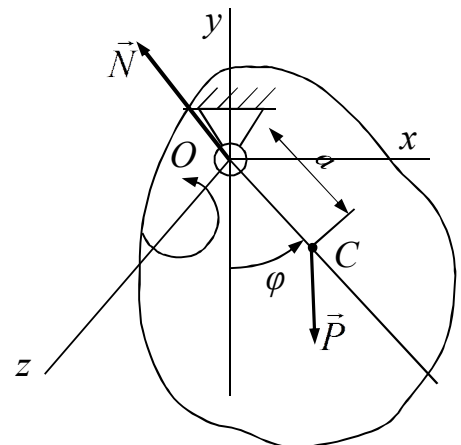


Рис. 18.16

Подставляя в уравнение значение момента внешних сил, получим

$$J_z \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{Pa}{J_z} \sin \varphi = 0. \quad (18.38)$$

Это дифференциальное уравнение движения маятника в элементарных функциях не решается. Рассмотрим частный случай – малые колебания маятника, когда $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение (18.38) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (18.39)$$

где $k^2 = \frac{Pa}{J_z}$.

Решение линейного уравнения (18.39)

$$\varphi = A \sin(kt + \alpha), \quad (18.40)$$

где произвольные постоянные A , α определяются из начальных условий. Период колебания физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Pa}} \quad (18.41)$$

не зависит от начальных условий.

Совершенно аналогично можно вывести уравнение колебаний математического маятника. Можно уравнение движения математического маятника получить из уравнений для физического маятника, положив $a = l$ – длина нити; $J_z = ml^2$ – момент инерции точечной массы (рис. 18.17).

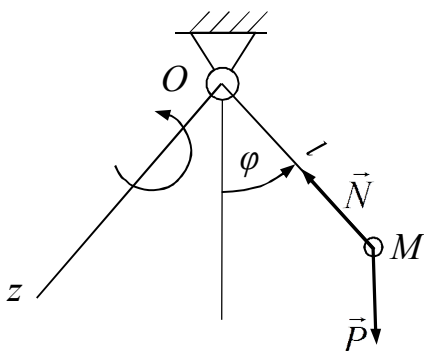


Рис. 18.17

В этом случае квадрат циклической частоты свободных колебаний математического маятника

$$k^2 = \frac{Pa}{J_z} = \frac{Pl}{ml^2} = \frac{g}{l}$$

и дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Полученное выражение периода колебаний математического маятника известно из курса физики.

В. Плоскопараллельное движение тела

Пусть тело, совершающее плоское движение, имеет плоскость материальной симметрии, которую совместим с плоскостью чертежа (рис. 18.18). Положение тела, совершающего плоское движение, как известно из кинематики, определяется положением полюса и углом поворота вокруг полюса. В задачах динамики плоского движения тела за полюс принимают обычно центр масс. Разложим, как это принято в кинематике, плоское движение на поступательное вместе с полюсом C и вращательное вокруг оси Cz , проходящей через точку C (рис. 18.18). Пусть к телу приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (активные и реакции связей).

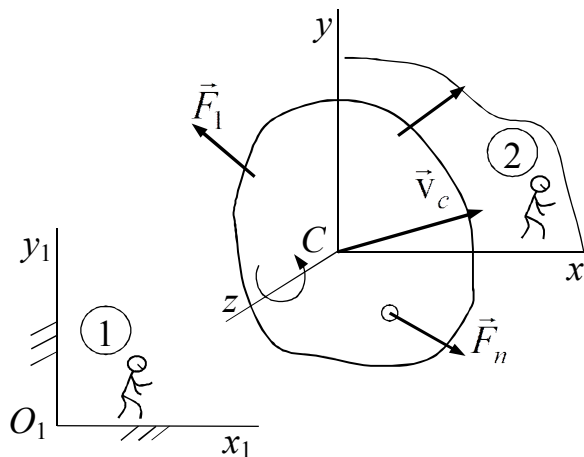


Рис. 18.18

Для описания поступательного движения вместе с полюсом воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_s^e. \quad (18.42)$$

Для изучения относительного вращательного движения воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в относительном движении:

$$\frac{dK_{Cz}^{\text{отн}}}{dt} = \sum m_{Cz}(\vec{F}_s^e). \quad (18.43)$$

Поскольку относительное движение вращательное, то кинетический момент в этом движении:

$$K_{Cz}^{\text{отн}} = J_{Cz}\omega = J_{Cz}\dot{\varphi}. \quad (18.44)$$

Проецируя выражение (18.42) на оси координат, подставляя (18.44) в формулу (18.43), получим дифференциальные уравнения, описывающие плоское движение тела:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= \sum X_s^e, \\ M \ddot{y}_c &= \sum Y_s^e, \\ J_{Cz} \ddot{\varphi}_c &= \sum m_{Cz}(\vec{F}_s^e). \end{aligned} \right\} \quad (18.45)$$

Интегрируя полученные уравнения с учетом начальных условий, получим кинематические уравнения плоского движения.

Рассмотрим примеры на исследование дифференциальных уравнений движения тел.

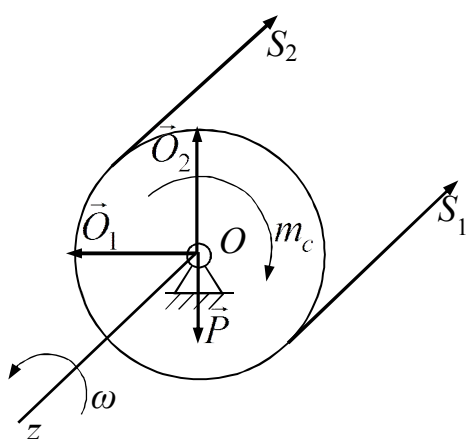


Рис. 18.19

Пример 18.6. Шкив радиусом r и весом P приводится во вращение ремнем (рис. 18.19). Натяжение ведущей ветви ремня в два раза больше натяжения ведомой ($S_1 = 2S_2$). На шкив действуют силы сопротивления, момент которых относительно оси вращения $m_c = \text{const}$. Определить уравнение вращения шкива, если в начальный момент времени шкив находился в покое, считая шкив однородным диском. Числовые данные: $r = 20$ см; $P = 0,6$ кН; $S_2 = 0,2$ кН; $m_c = 20$ Н·м.

Решение. Рассмотрим шкив в произвольный момент времени. Действующие силы: \vec{P} , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , m_c , \vec{O}_1 , \vec{O}_2 .

Составим дифференциальное уравнение вращения тела вокруг оси Oz :

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum m_z(\vec{F}_s^e)$$

или

$$J_z \ddot{\varphi} = (S_1 - S_2)r - m_c,$$

момент инерции

$$J_z = \frac{Mr^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2.$$

Подставив числовые значения, получим $\ddot{\varphi} = 16,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Поскольку $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \text{const}$, то вращение равноускоренное, $\omega_0 = 0$ и уравнение вращения шкива

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = 8,15 t^2 \text{ рад}.$$

Пример 18.7. Однородный цилиндр скатывается по наклонной плоскости без скольжения (рис. 18.20). Определить ускорение центра цилиндра, силу трения и наименьший коэффициент трения скольжения цилиндра о плоскость, при котором возможно качение без скольжения.

Дано: G, R, α .

Определить: a_c, F_T, f_{\min} .

Решение. Рассмотрим движение цилиндра и изобразим его в произвольный момент времени. Выберем оси координат, покажем действующие силы: $\vec{G}, \vec{F}_T, \vec{N}$.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения:

$$M \ddot{x}_c = \sum X_s^e; \quad Ma_c = G \sin \alpha - F_T; \quad (18.46)$$

$$M \ddot{y}_c = \sum Y_s^e; \quad 0 = N - G \cos \alpha; \quad (18.47)$$

$$J_{cz} \ddot{\varphi} = \sum m_{cz}(\vec{F}_s^e); \quad \frac{MR^2}{2} \varepsilon = F_T R. \quad (18.48)$$

Поскольку качение происходит без проскальзывания, то точка Р является мгновенным центром скоростей, $v_c = R\omega$ и $a_c = R\varepsilon$.

Из уравнений (18.46) и (18.48) найдем ускорение центра:

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

и силу трения скольжения: $F_T = \frac{1}{3} G \sin \alpha$.

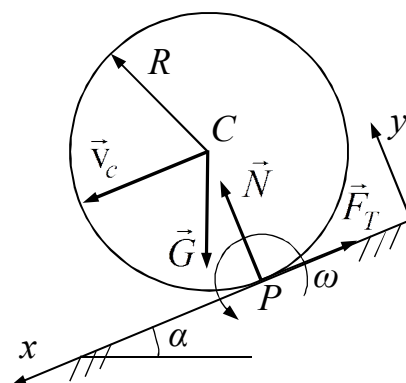


Рис. 18.20

Такая сила трения должна действовать на цилиндр, чтобы он катился без скольжения. При качении без скольжения сила трения удовлетворяет условию

$$F_T \leq fN.$$

Подставляя найденные значения F_T и N , получим

$$\frac{1}{3} G \sin \alpha \leq fG \cos \alpha \quad \text{или} \quad f_{\min} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Если коэффициент трения скольжения будет меньше этой величины, то цилиндр будет катиться с проскальзыванием. В этом случае $v_c \neq R\omega$, но $F_T = F_{\max} = fN = fG \cos \alpha$.

Из уравнения (18.46) находим ускорение центра цилиндра:

$$Ma_c = Mg(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

откуда

$$a_c = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Из уравнения (18.48) находим угловое ускорение цилиндра при качении с проскальзыванием:

$$\varepsilon = \frac{2fg}{R} \cos \alpha.$$

Учтем сопротивление качению, которое возникает при скатывании цилиндра по наклонной плоскости без скольжения (рис. 18.21). Пусть коэффициент трения качения равен k .

В этом случае к действующим на цилиндр силам \vec{G} , \vec{F}_T , \vec{N} добавим пару трения качения с моментом

$$m_T = kN.$$

Дифференциальные уравнения плоского движения примут вид

$$Ma_c = G \sin \alpha - F_T; \quad (18.49)$$

$$0 = N - G \cos \alpha; \quad (18.50)$$

$$\frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a_c}{R} = F_T R - m_T. \quad (18.51)$$

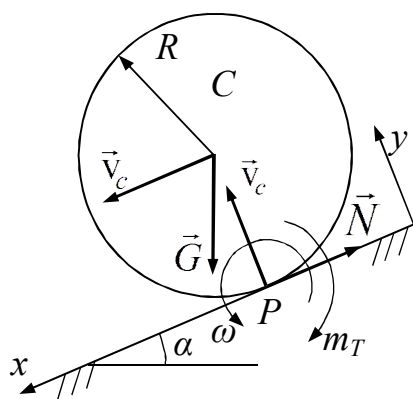


Рис. 18.21

Из уравнений (18.49), (18.51), учитывая $m_T = kG \cos \alpha$, находим ускорение центра цилиндра:

$$a_c = \frac{2}{3} g \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$$

Из уравнения (18.51) находим силу трения скольжения

$$F_T = \frac{1}{3} G \left(\sin \alpha + 2 \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$$

Учитывая, что качение происходит без проскальзывания, $F_T \leq f_{\min} N$, получим минимальное значение коэффициента трения скольжения:

$$f_{\min} = \frac{1}{3} \left(\tan \alpha + 2 \frac{k}{R} \right).$$

Пример 18.8. Груз массой m_1 приводит в движение цилиндрический каток массой m_3 при помощи нити, перекинутой через неподвижный блок массой m_2 и намотанной на каток (рис. 18.22). К блоку, радиус которого r_2 , приложена пара сил с моментом сопротивления M_c . Определить ускорение

груза, реакции, считая, что блок и каток – однородные круглые диски, каток катится без скольжения, массой нити можно пренебречь.

Дано: m_1, m_2, m_3, M_c, r_2 .

Определить: a_1 , опорные реакции.

Решение. Расчленим систему на отдельные тела и составим уравнение движения каждого тела. Отметим, что груз 1 совершает поступательное движение, блок 2 – вращательное движение, каток 3 – плоское движение и точка P является мгновенным центром скоростей.

Примем скорость груза 1 v_1 в качестве основной, тогда связь между скоростями имеет вид

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}, \quad \omega_3 = \frac{v_1}{2r_3}, \quad v_c = \frac{v_1}{2}.$$

Отметим, что связь между ускорениями имеет такой же вид, как между скоростями.

Покажем действующие силы – активные и реакции связей (рис. 18.23).

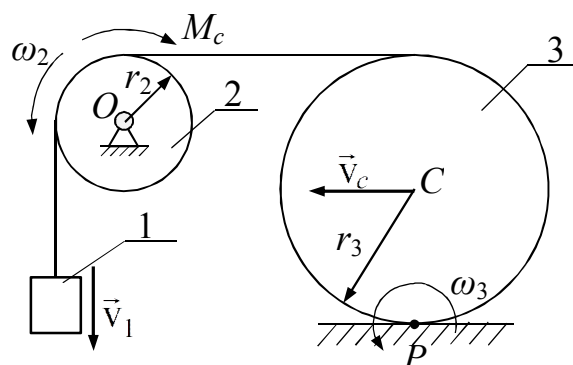


Рис. 18.22

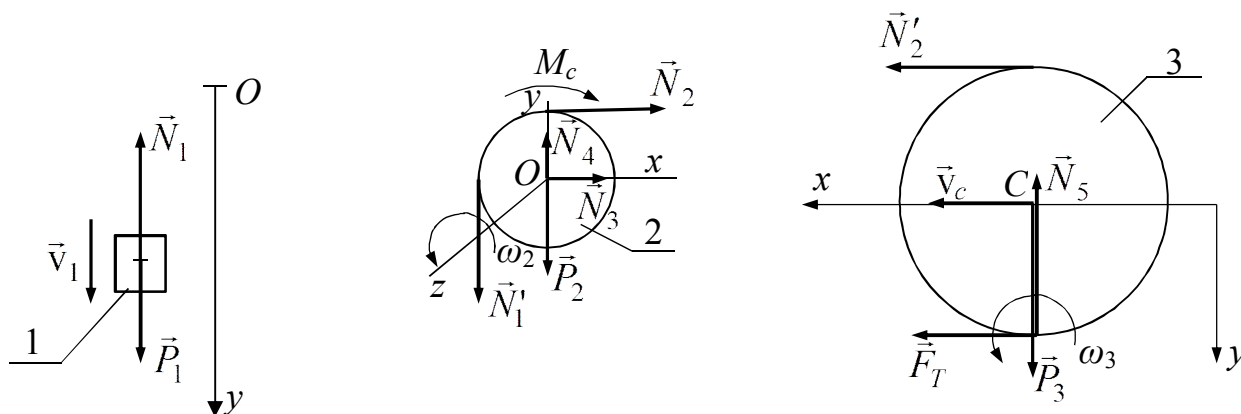


Рис. 18.23

Основное уравнение динамики для груза 1:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{N}_1.$$

Проецируя уравнение на ось Oy , получаем

$$m_1 a_1 = m_1 g - N_1. \quad (18.52)$$

Уравнение вращения блока 2 вокруг оси Oz :

$$J_{2z} \varepsilon_2 = \sum m_z (F_s^e).$$

Момент инерции блока $J_{2z} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, угловое ускорение $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}$, главный момент внешних сил относительно оси Oz : $\sum m_z(\vec{F}_s^e) = N_1 r_2 - M_c - N_2 r_2$, учтено $N'_1 = N_1$.

Подставляя величины в уравнение вращательного движения, после преобразований получаем

$$\frac{m_2 a_1}{2} = N_1 - \frac{M_c}{r_2} - N_2. \quad (18.53)$$

Составляя уравнения плоского движения катка 3 и учитывая $N'_2 = N_2$, $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r_3}$, $a_c = \frac{a_1}{2}$, $J_{cz} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$, получаем после преобразований

$$m_3 \frac{a_1}{2} = N_2 + F_T, \quad (18.54)$$

$$0 = m_3 g - N_5,$$

$$\frac{m_3 a_1}{4} = N_2 - F_T. \quad (18.55)$$

Уравнения (18.52) – (18.55) содержат четыре неизвестные величины: a_1 , N_1 , N_2 , F_T . Решая эту систему, можно найти ускорение a_1 и реакции связей.

Ускорение груза 1:
$$a_1 = \frac{8}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3} \cdot \left(m_1 g - \frac{M_c}{r_2} \right).$$

Натяжение нити:
$$N_1 = m_1 g - m_1 a_1;$$
$$N_2 = N_1 - \frac{M_c}{r_2} - \frac{m_2 a_1}{2}.$$

Сила трения:
$$F_T = N_2 - \frac{m_3 a_1}{4}.$$

Реакцию шарнира O неподвижного блока 2 можно определить, используя теорему о движении центра масс блока:

$$m_2 \vec{a}_0 = \vec{P}_2 + \vec{N}'_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4.$$

Учитывая, что ускорение $a_0 = 0$, и проецируя выражение на оси Ox и Oy , можно получить уравнения для определения составляющих опорной реакции шарнира:

$$\begin{aligned} x) \quad & 0 = N_3 + N_2; \\ y) \quad & 0 = -m_2 g - N_1 + N_4. \end{aligned}$$

Реакция шарнира: $N_O = \sqrt{N_3^2 + N_4^2}$.

Замечание. Ускорение груза 1 можно было бы определить, применяя теорему об изменении кинетической энергии для всей системы. После определения ускорения груза из уравнений движения каждого тела можно определить все опорные реакции.

Вопросы для самопроверки

1. Как формулируется теорема об изменении количества движения в дифференциальной и интегральной формах?
2. Почему происходит откат орудия, отдача винтовки при выстреле?
3. Как формулируется теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси?
4. Почему траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, лежит в одной плоскости?
5. Какой закон механики иллюстрируется с помощью скамейки Жуковского?
6. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии механической системы? Привести различные формы теоремы.
7. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси? При каких условиях тело вращается вокруг неподвижной оси ускоренно, равномерно, замедленно?
8. Какой вид имеют дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела и на основании каких теорем они получены?

Глава 19. Применение общих теорем динамики в элементарной теории удара, приближенной теории гироскопа, движении сплошной среды

19.1. Явление удара. Основные определения и допущения. Действие ударной силы на материальную точку

При изучении движения материальных точек, твердых тел, механических систем предполагалось, что за весьма малый промежуток времени $\Delta t = \tau$ происходит изменение скоростей точек также на весьма малые величины Δv . Однако встречаются случаи, когда при кратковременном взаимодействии тел скорости точек тела, а следовательно, и количества движения их получают большие (конечные) приращения.

Механическое взаимодействие тел, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела изменяются на конечную величину, называется ударом.

Примерами такого явления могут служить удар молотка по гвоздю, удар кия по бильярдному шару, удар молота при ковке, удар бабы копра о сваю и т. д. Примерами удара являются также столкновения движущихся тел, столкновение движущегося тела с неподвижной преградой; к явлению удара относится взрыв. На рис. 19.1 показано конечное изменение скорости мяча при ударе о стену: \vec{v} – скорость в начале удара, \vec{u} – скорость при отскакивании. Изменение скорости: $\Delta \vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$.

Малый промежуток времени τ , в течение которого происходит удар, называют временем удара. Этот промежуток времени измеряется обычно сотыми, тысячными или даже десятитысячными долями секунды.

Поскольку при ударе за малый промежуток времени происходит резкое изменение скоростей точек тела, то ускорения их достигают больших значений. Следовательно, при ударе возникают очень большие силы взаимодействия, исчезающие после окончания удара. Эти силы называют ударными или мгновенными силами.

Мгновенной или ударной силой называют силу, действующую в течение весьма малого промежутка времени, но достигающую при этом таких больших значений, что ее импульс становится конечной величиной. График изменения ударной силы обычно имеет вид, указанный на рис. 19.2.

Импульс ударной силы за время τ называется *ударным импульсом*:

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt, \quad (19.1)$$

он равен площади, показанной на рис.19.2. По теореме о среднем значении интеграла

$$\vec{S} = \vec{F}_{\text{ср}} \cdot \tau, \quad (19.2)$$

где $\vec{F}_{\text{ср}}$ – среднее значение ударной силы.

Здесь τ – малая величина; $\vec{F}_{\text{ср}}$ – большая; \vec{S} – конечная величина.

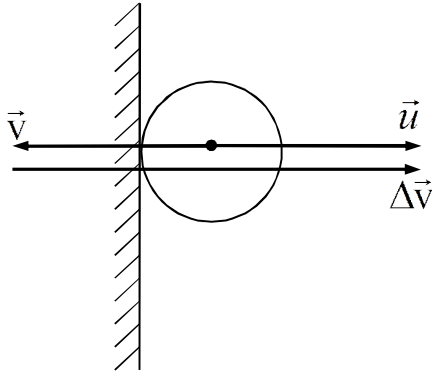


Рис. 19.1

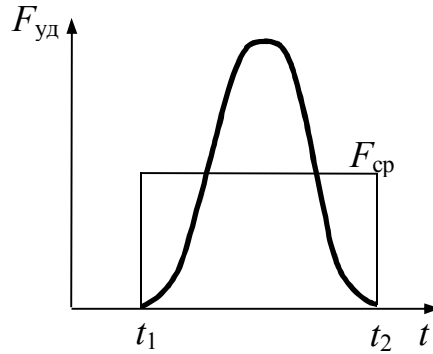


Рис. 19.2

Рассмотрим действие ударной силы на материальную точку. Пусть материальная точка M движется под действием конечных сил, F_k – равнодействующая их (рис. 19.3). Предположим что в некоторый момент времени t_1 на точку начинает действовать ударная сила \vec{F} , импульс которой равен \vec{S} ; она прекращает свое действие в момент t_2 ($\tau = t_2 - t_1$ – время удара).

Применим теорему об изменении количества движения за время τ :

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S}_k + \vec{S}, \quad (19.3)$$

где \vec{v}_1 – скорость точки до удара; \vec{v}_2 – после удара.

Но $\vec{S}_k \ll \vec{S}$, так как $\vec{S}_k = \vec{F}_{k,\text{ср}} \cdot \tau$ и $\vec{S} = \vec{F}_{\text{ср}} \cdot \tau$, где τ –

малая величина; $\vec{F}_{k,\text{ср}}$ – конечная; $\vec{F}_{\text{ср}}$ – большая величина. Пренебрегая импульсами обычных (неударных) сил, примем

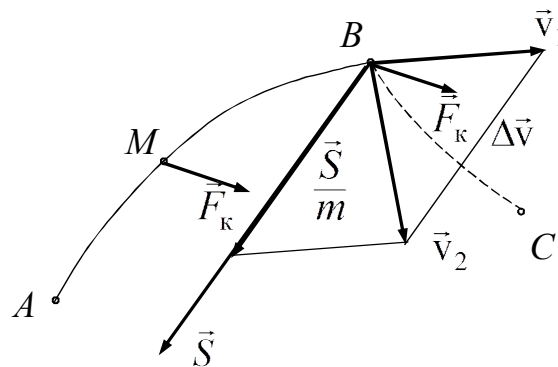


Рис. 19.3

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{1}{m} \vec{S}, \quad (19.4)$$

т. е. за время удара скорость точки получает конечное изменение, пропорциональное импульсу ударной силы.

Покажем, что перемещение точки M за время удара τ будет малой величиной. Действительно, $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{\text{cp}}$, $\Delta t = \tau$, тогда $\Delta \vec{r} = \vec{v}_{\text{cp}} \tau$. Но τ – малая величина, а \vec{v}_{cp} – конечная величина, тогда и $\Delta \vec{r}$ – малая величина. Материальная точка не успевает сместиться заметным образом за время удара τ . После прекращения действия ударной силы движение будет определяться действующей силой F_k . В месте удара траектория точки получает некоторый излом; дальнейшая траектория показана на рисунке пунктиром.

Итак, сформулируем основные допущения, принимаемые при расчете ударов:

- 1) во время удара обычными силами можно пренебрегать, учитывая импульсы только ударных сил;
- 2) перемещения точек за время удара можно не учитывать, т. е. в момент начала удара ($t_1 = 0$) и в момент окончания его ($t_2 = \tau$) точки соударяющихся тел занимают одно и то же положение;
- 3) изменение скорости точки за время удара определяется уравнением

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{m} \vec{S}, \quad (19.5)$$

которое называют *основным уравнением динамики точки при ударе*. Это уравнение в расчете ударов играет ту же роль, что и уравнение $m\vec{a} = \vec{F}$ в расчете движущейся точки под действием обычных сил. Сформулированные допущения сохраняются и при расчете ударов механических систем и твердых тел.

19.2. Удар о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе

Рассмотрим удар материальной точки о неподвижную поверхность. Если скорость точки в начале удара направлена по нормали к поверхности, то удар называют прямым (рис. 19.4,а). Если вектор \vec{v} составляет с нормалью некоторый угол α , то удар называют непрямым (или косым) (рис. 19.4,б).

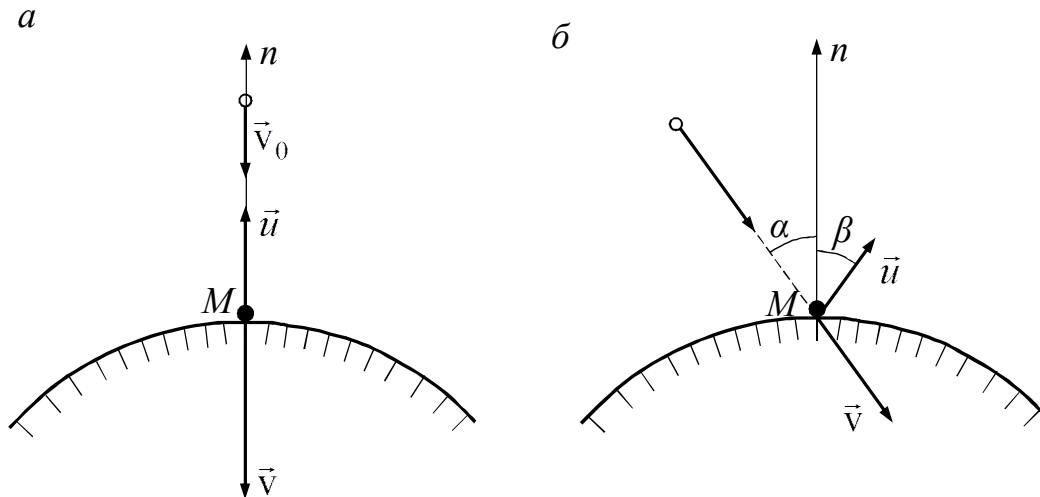


Рис. 19.4

Поставим задачу: зная массу точки m и скорость v в начале удара, найти скорость u в конце удара и импульс ударной силы. Решение этой задачи существенно зависит от упругих свойств поверхностей соударяющихся тел. Различают две фазы удара. В первой фазе соударяющиеся тела деформируются до тех пор, пока относительная скорость их в проекции на нормаль не обратится в нуль; во второй фазе происходит полное или частичное восстановление нарушенной формы. По предложению Ньютона, при расчете ударов применяется гипотеза: отношение модулей проекций на нормаль относительной скорости в конце удара и в начале удара есть постоянная величина, зависящая лишь от материала соударяющихся тел и не зависящая от скоростей соударения и размеров тел. Эта постоянная величина называется коэффициентом восстановления при ударе и определяется экспериментально:

$$k = -\frac{u_n}{v_n}. \quad (19.6)$$

При прямом ударе о неподвижную поверхность

$$k = \frac{u}{v}; \quad (19.7)$$

при непрямом

$$k = \frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha}. \quad (19.8)$$

Замечание. При ударе двух движущихся тел

$$k = \frac{u_{n \text{ отн}}}{v_{n \text{ отн}}} = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}. \quad (19.9)$$

Выражение коэффициента восстановления k в самом общем случае (для касательных и нормальных составляющих скоростей) впервые, по-видимому, опубликовано П.О. Сомовым в 1904 г. Этот коэффициент необходим при решении многих важных технических задач (трубные вибромельницы, вибротранспортеры, стыковка космических кораблей и т. д.).

Коэффициент восстановления заключен в пределах $0 \leq k \leq 1$. Если $k = 1$, то удар называется *абсолютно упругим*, в этом случае $u = v$. Если $k = 0$, то удар называют *абсолютно неупругим*, в этом случае $u_n = 0$ (тело не отскакивает).

Коэффициент восстановления можно определить при помощи следующего простого опыта. С некоторой высоты h_1 (рис. 19.5) отпускают без начальной скорости шарик из испытуемого материала. Ударившись о массивную плиту, тоже из испытуемого (того же или другого) материала, он подскакивает на высоту h_2 . По высотам h_1 и h_2 можно найти скорости v и u : $v = \sqrt{2gh_1}$, $u = \sqrt{2gh_2}$.

Тогда $k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$. Приведем некоторые значения коэффициента

восстановления: для стекла – 15/16, слоновой кости – 8/9, стали – 5/9, дерева – 1/2.

Используя экспериментальное значение коэффициента восстановления, найдем скорость после удара и импульс ударной силы для удара шарика о неподвижную поверхность (рис. 19.6):

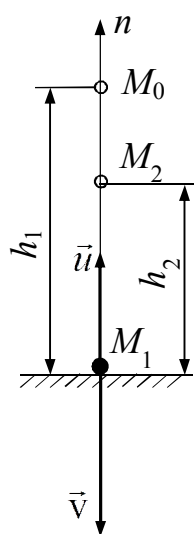


Рис. 19.5

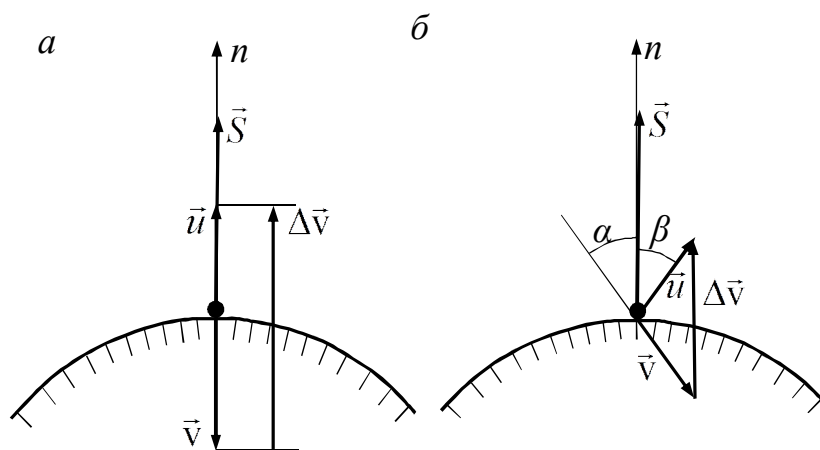


Рис. 19.6

а) для прямого удара $\Delta \vec{v} = \vec{u} - \vec{v} = \frac{1}{m} \vec{S}$; в проекциях на нормаль

$$u + v = \frac{1}{m} S, \text{ где } S = \int_0^{\tau} N dt = N_{\text{cp}} \cdot \tau, \quad k = \frac{u}{v}, \text{ откуда } S = (1 + k)mv; \quad u = kv;$$

б) для непрямого удара $u \cos \beta + v \cos \alpha = \frac{1}{m} S, \quad k = \frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha},$

$$S = (1 + k)mv \cos \alpha.$$

Если пренебречь влиянием трения во время удара, то проекции \vec{u} и \vec{v} на касательную будут равны. Тогда $u \sin \beta = v \sin \alpha$ и $k = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$. По углу

падения можно найти угол отражения. Из формулы для импульса ударной силы видно, что чем больше коэффициент k , тем больше импульс ударной силы.

19.3. Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть на точки механической системы в момент времени t_1 одновременно действуют ударные импульсы, которые прекращают свое действие в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$. Определим вызванное ими изменение количества движения рассматриваемой системы. При этом действием на точки конечных сил за время удара будем пренебрегать. Разделим ударные силы, действующие на каждую точку M_s ($s = 1, 2, \dots, n$) механической системы, на внешние и внутренние. Обозначим равнодействующую внешних и внутренних ударных импульсов, приложенных к каждой точке, \vec{S}_s^e и \vec{S}_s^i . Обозначим скорости каждой точки M_s системы в момент начала действия ударных сил \vec{v}_s , а в момент окончания их действия — \vec{u}_s .

Тогда для каждой точки системы можно записать

$$m_s \vec{u}_s - m_s \vec{v}_s = \vec{S}_s^e + \vec{S}_s^i \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (19.10)$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$\sum_{s=1}^n m_s \vec{u}_s - \sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s = \sum_{s=1}^n \vec{S}_s^e + \sum_{s=1}^n \vec{S}_s^i.$$

Здесь $\sum_{s=1}^n m_s \vec{u}_s = \vec{Q}_\tau$ – количество движения механической системы в момент окончания удара; $\sum_{s=1}^n m_s \vec{v}_s = \vec{Q}_0$ – количество движения в момент начала удара. По свойству внутренних сил $\sum_{s=1}^n \vec{S}_s^i = 0$, следовательно,

$$\vec{Q}_\tau - \vec{Q}_0 = \sum_{s=1}^n \vec{S}_s^e. \quad (19.11)$$

Таким образом, теорема об изменении количества движения системы при ударе формулируется так: *изменение количества движения системы за время удара равно сумме внешних ударных импульсов.*

Учитывая, что $M\vec{v}_c = \sum m_s \vec{v}_s$ и $M\vec{u}_c = \sum m_s \vec{u}_s$, где M – масса всей системы; \vec{v}_c, \vec{u}_c – скорости центра масс системы в начале и конце удара, получим

$$M\vec{u}_c - M\vec{v}_c = \sum_{s=1}^n \vec{S}_s^e. \quad (19.12)$$

В таком виде теорема является *теоремой о движении центра масс системы при ударе.*

При решении задач уравнение (19.11) записывается в координатной форме:

$$Q_{\tau x} - Q_{0x} = \sum S_{sx}^e; \quad Q_{\tau y} - Q_{0y} = \sum S_{sy}^e; \quad Q_{\tau z} - Q_{0z} = \sum S_{sz}^e. \quad (19.13)$$

Заметим, что внутренние ударные силы не изменяют количества движения системы. *Если сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, будет равна нулю, то количество движения системы и скорость центра масс ее при ударе не изменяются.*

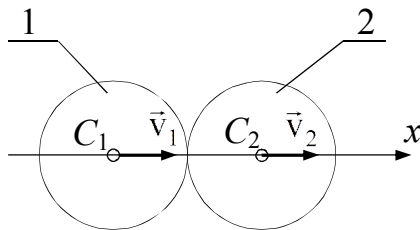


Рис. 19.7

В качестве приложения теоремы об изменении количества движения при ударе можно рассмотреть известный из курса физики прямой центральный удар двух тел (рис. 19.7) (рекомендуется восстановить выкладки самостоятельно). При ударе m_1, m_2 – массы тел; \vec{v}_1, \vec{v}_2 – скорости центров масс в начале удара; \vec{u}_1, \vec{u}_2 – скорости

центров масс в конце удара; k – коэффициент восстановления.

Используя закон сохранения количества движения в проекции на ось x

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

учитывая значение коэффициента восстановления

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2},$$

получаем значение скоростей центров масс в конце удара и значение ударного импульса:

$$u_1 = v_1 - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2);$$

$$u_2 = v_2 + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2);$$

$$S = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

19.4. Теорема об изменении кинетического момента системы при ударе

Пусть на механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами m_s , действуют силы конечной величины \vec{F}_s и в некоторый момент времени t_1 начинают действовать ударные силы $\vec{F}_s^{\text{уд}}$, прекращающие свое действие в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$ (рис. 19.8). Выясним изменение кинетического момента системы относительно неподвижного центра и оси за время удара.

Запишем основное уравнение теории удара для точки M_s :

$$m_s \vec{u}_s - m_s \vec{v}_s = \vec{S}_s^e + \vec{S}_s^i \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

В правую часть входят импульсы только ударных сил, как внешних, так и внутренних. Импульсами конечных сил пренебрегаем на основании сделанных ранее допущений. Умножим векторно уравнение слева на радиус-вектор точки \vec{r}_s и просуммируем полученные уравнения:

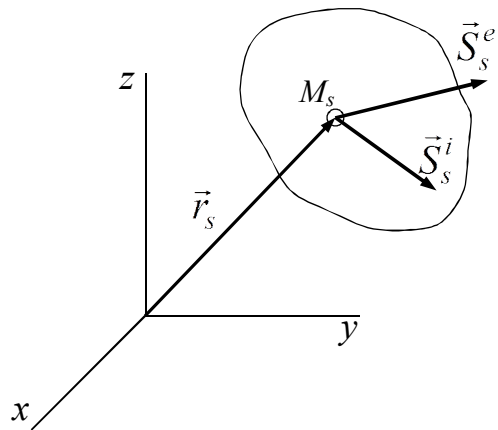


Рис. 19.8

$$\sum_s (\vec{r}_s \times m_s \vec{u}_s) - \sum_s (\vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s) = \sum_s (\vec{r}_s \times \vec{S}_s^e) + \sum_s (\vec{r}_s \times \vec{S}_s^i).$$

Здесь $\sum_s (\vec{r}_s \times m_s \vec{u}_s) = \vec{K}_0^\tau$, $\sum_s (\vec{r}_s \times m_s \vec{v}_s) = \vec{K}_0^0$ – кинетические моменты системы в конце и начале удара, вычисленные относительно центра O ; $\sum_s (\vec{r}_s \times \vec{S}_s^e) = \sum_s \vec{m}_0(\vec{S}_s^e)$ – сумма моментов внешних ударных импульсов относительно центра O ; $\sum_s (\vec{r}_s \times \vec{S}_s^i) = \sum_s \vec{m}_0(\vec{S}_s^i) = 0$ – сумма моментов внутренних ударных импульсов относительно центра O равна нулю, так как моменты внутренних ударных импульсов попарно равны и противоположны.

Итак:

$$\vec{K}_0^\tau - \vec{K}_0^0 = \sum_s \vec{m}_0(\vec{S}_s^e). \quad (19.14)$$

Изменение кинетического момента системы относительно неподвижного центра за время удара равно сумме моментов импульсов всех внешних ударных сил относительно этого центра.

В частном случае, когда выполняется условие $\sum_s \vec{m}_0(\vec{S}_s^e) = 0$, кинетический момент системы за время удара не изменится:

$$\vec{K}_0^\tau = \vec{K}_0^0.$$

Спроецируем уравнение (19.14) на неподвижные оси, проходящие через центр O :

$$K_x^\tau - K_x^0 = \sum m_x(\vec{S}_s^e); \quad K_y^\tau - K_y^0 = \sum m_y(\vec{S}_s^e); \quad K_z^\tau - K_z^0 = \sum m_z(\vec{S}_s^e). \quad (19.15)$$

Изменение кинетического момента системы относительно неподвижной оси за время удара равно сумме моментов импульсов внешних ударных сил относительно этой оси.

В случае, когда, например $\sum m_x(\vec{S}_s^e) = 0$, имеем $K_x^\tau = K_x^0$, т. е. кинетический момент системы относительно оси Ox за время удара не изменится.

Рассмотрим применение этих теорем к изучению действия ударных сил на вращательное и плоское движение тела.

А. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Пусть тело вращается вокруг оси Oz , имея в момент времени t_1 угловую скорость ω_0 . В этот момент на тело начинает действовать ударная сила, прекращающая свое действие в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$, где τ – время удара; \vec{S} – импульс этой силы (рис. 19.9). Определить изменение угловой скорости вращающегося тела за время удара.

Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси Oz :

$$K_z^\tau - K_z^0 = \sum m_z(\vec{S}) \quad \text{или} \\ J_z \omega_\tau - J_z \omega_0 = m_z(\vec{S}), \quad (19.16)$$

где ω_τ – угловая скорость в конце удара.

Реакции подпятника A и подшипника B будут также ударными силами, но моменты их относительно оси Oz равны нулю.

Таким образом:

$$\Delta \omega = \omega_\tau - \omega_0 = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z}. \quad (19.17)$$

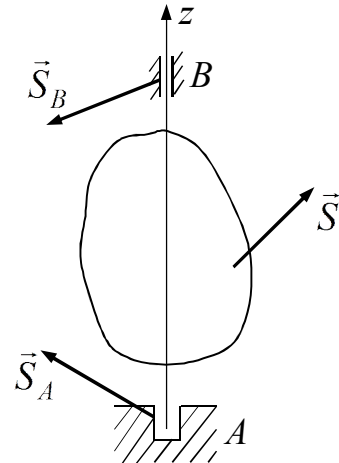


Рис. 19.9

Изменение угловой скорости тела за время удара равно отношению момента приложенного к телу ударного импульса относительно оси вращения к моменту инерции тела относительно этой оси.

Пример 19.1. К однородному стержню $OA = l$, закрепленному шарниром O и имеющему массу m , приложена ударная сила: \vec{S} – импульс этой силы (рис. 19.10,а), $\vec{S} \perp OA$, $OC = AC$. В начале удара угловая скорость стержня равна нулю. Определить угловую скорость стержня ω_τ после удара, импульс ударной реакции (рис. 19.10,б); величину ударного импульса \vec{S} , чтобы после удара стержень отклонился на угол α (рис. 19.10,в).

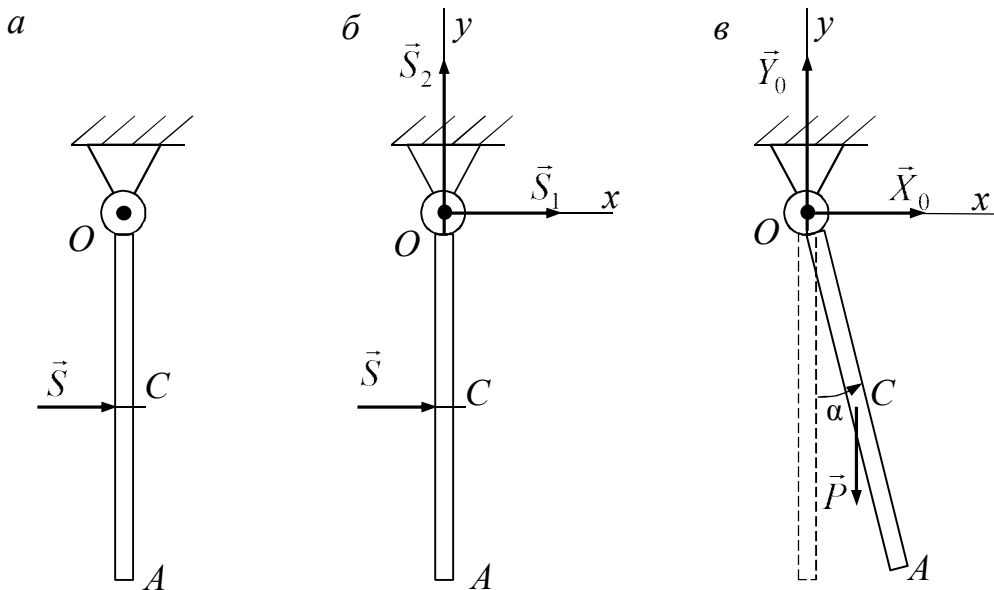


Рис. 19.10

Решение. В данной задаче следует рассмотреть два этапа: 1 – удар по неподвижному стержню и 2 – движение стержня после завершения удара.

Во время удара на стержень кроме заданного импульса \vec{S} действуют также импульсы ударных реакций. Из уравнения (19.17) получим угловую скорость стержня после удара:

$$\Delta\omega = \omega_\tau = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z}.$$

$$\text{Но } m_z(\vec{S}) = S \frac{l}{2}, \quad J_z = \frac{ml^2}{3}, \text{ поэтому } \omega_\tau = \frac{3}{2} \frac{S}{ml}.$$

Импульсы ударных реакций можно найти из теоремы об изменении количества движения при ударе:

$$\vec{Q}_\tau - \vec{Q}_0 = \sum_{s=1}^n \vec{S}_s^e.$$

$$\text{В рассматриваемом примере } \vec{Q}_\tau = m\vec{u}_c, \quad \vec{Q}_0 = 0, \quad u_c = \omega_\tau \frac{l}{2}.$$

Проецируя это уравнение на оси Ox и Oy , получим

$$\begin{aligned} mu_c &= S + S_1, \\ 0 &= S_2, \end{aligned}$$

где S_1, S_2 – проекции импульса ударной реакции.

Подставляя найденную угловую скорость ω_τ , получим

$$S_1 = mu_c - S = m\omega_\tau \frac{l}{2} - S = -\frac{1}{4}S,$$

$$S_2 = 0.$$

Ударная реакция направлена по оси Ox влево. Удар, передающийся на шарнир, будет направлен вправо и равен по модулю $|S_1| = \frac{1}{4}S$.

На втором этапе для определения зависимости угла поворота от начальной угловой скорости ω_τ воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии (рис. 19.10, в).

$$T - T_0 = \sum A_s^e,$$

$$\text{где } T = 0; \quad T_0 = \frac{1}{2} J_z \omega_\tau^2; \quad \sum A_s^e = -mgh = -mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha).$$

Тогда $\frac{1}{2} J_z \omega_\tau^2 = mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha)$.

Учитывая $J_z = \frac{ml^2}{3}$, $\omega_\tau = \frac{3}{2} \frac{S}{ml}$, найдем зависимость импульса от угла, на который повернется стержень:

$$S = 2m \sqrt{\frac{gl(1 - \cos \alpha)}{3}}.$$

Б. Центр удара

Величина ударной реакции подшипников и ее импульс зависят от положения точки, в которой наносится удар, а также от его направления. Появление ударных реакций нежелательно, так как может привести к разрушению подшипников или укорочению срока их службы. Выясним условия, когда удар, приложенный к твердому телу, не передается на подшипники, в которых закреплено это тело.

Центром удара называют точку тела с неподвижной осью вращения, обладающую тем свойством, что приложенный к телу в этой точке ударный импульс не вызывает ударных реакций в точках закрепления оси.

Пусть имеем твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси Oz (рис 19.11). Тело имеет плоскость материальной симметрии, которую совместим с плоскостью чертежа, C – центр тяжести тела, $OC = a$. По телу нанесен удар в плоскости рисунка. Введем оси координат, приняв неподвижную точку O за начало координат, ось Ox направляем через точку C . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ угловая скорость тела равна нулю, $\omega_0 = 0$. Скорость центра тяжести после удара $u_c = a\omega_\tau$. Применив теорему об изменении количества движения при ударе в проекциях на оси Ox и Oy , получим

$$0 = S_x + S_1; \quad Mu_c = S_y + S_2. \quad (19.18)$$

Для того чтобы удар не передавался на подшипники, необходимо выполнение условий: $S_1 = S_2 = 0$. Тогда из уравнений (19.18) получаем

$$S_x = 0, \quad S_y = Mu_c = Ma\omega_\tau.$$

Используя теорему моментов при ударе, имеем

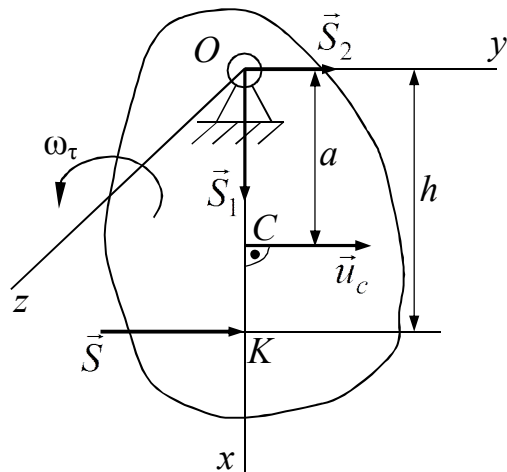


Рис. 19.11

$$\Delta\omega = \omega_\tau - \omega_0 = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z} = \frac{Sh}{J_z},$$

откуда $S_y = S$.

$$\text{Тогда } S_x = 0, \quad S_y = \frac{MaSh}{J_z} = S.$$

Из последнего выражения находим расстояние до точки K , в которой должен быть приложен ударный импульс:

$$h = \frac{J_z}{Ma}. \quad (19.19)$$

Следовательно, чтобы при ударе не возникали ударные реакции, необходимо выполнение условий: 1) удар должен быть направлен перпендикулярно к прямой, соединяющей центр тяжести с осью вращения; 2) прямая, на которой расположен импульс ударной силы, должна находиться от оси вращения на расстоянии h . Точка K будет центром удара.

В примере 19.1 центр удара будет находиться от оси вращения на расстоянии

$$h = \frac{J_z}{ma} = \frac{2}{3}l, \quad \text{т. к. } J_z = \frac{ml^2}{3}, \quad a = \frac{l}{2}.$$

В частном случае, когда центр тяжести лежит на оси вращения, центра удара не существует. В этом случае удар всегда будет передаваться на подшипники.

В. Плоское движение тела

Если к твердому телу, совершающему плоское движение, прикладываются ударные силы, причем движение после окончания удара остается плоским, то изменение скоростей за время удара определяется теоремами об изменении количества движения и кинетического момента. Для рассматриваемого случая плоского движения они имеют следующий вид:

$$M(\vec{u}_c - \vec{v}_c) = \sum \vec{S}_s^e, \quad J_{cz}(\omega_\tau - \omega_0) = \sum m_{cz}(\vec{S}_s^e), \quad (19.20)$$

где \vec{S}_s^e – внешние импульсы ударных сил; $m_{cz}(\vec{S}_s^e)$ – их момент относительно оси, проходящей через центр масс; \vec{u}_c, \vec{v}_c – скорость центра масс после и до удара; ω_τ, ω_0 – угловая скорость тела после и до удара. К уравнениям (19.20) должны быть добавлены условия, определяющие характер удара (коэффициент восстановления k).

19.5. Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно

Теорема об изменении кинетической энергии в выведенной ранее форме в случае удара не может быть использована, так как перемещениями точек во время удара пренебрегают и поэтому нельзя непосредственно подсчитать работу сил. При ударе происходит изменение скоростей точек соударяющихся тел, следовательно, будет происходить изменение кинетической энергии. Вследствие внутреннего трения в материале, остаточных деформаций и нагревания при ударе происходит "потеря" кинетической энергии. "Потерю" кинетической энергии следует понимать как переход ее в иные виды энергии.

Найдем потерю кинетической энергии в случае прямого удара материальной точки о неподвижную поверхность (рис. 19.12).

Кинетическая энергия в начале удара $T_0 = \frac{1}{2}mv^2$,

в конце удара $T_\tau = \frac{1}{2}mu^2$. Потеря энергии при ударе

$$\Delta T = T_0 - T, \quad \Delta T = \frac{1}{2}m(v^2 - u^2).$$

Коэффициент восстановления в рассматриваемом случае

$k = \frac{u}{v}$, тогда $u = kv$ и

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2(1 - k^2).$$

Найдем изменение скорости точки за время удара:

$$\Delta \vec{v} = \vec{u} - \vec{v}, \quad |\Delta \vec{v}| = u + v = v(1 + k),$$

$$v = \frac{|\Delta \vec{v}|}{1 + k}.$$

откуда

Подставив значение v в выражение потери кинетической энергии ΔT , получим

$$\Delta T = \frac{1}{2}m \frac{|\Delta \vec{v}|^2}{(1 + k)^2} (1 - k^2),$$

или, после упрощения,

$$\Delta T = \frac{1}{2}m |\Delta \vec{v}|^2 \frac{1 - k}{1 + k}. \quad (19.21)$$

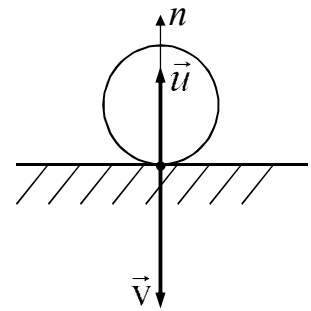


Рис. 19.12

Величину $\Delta\vec{v}$ называют потеряннй при ударе скоростью, а $\frac{1}{2}m|\Delta\vec{v}|^2$ – кинетической энергией, соответствующей потеряннй при ударе скорости. Итак, получаем: *потеря кинетической энергии при ударе равна кинетической энергии, соответствующей потеряннй скорости, умноженной на коэффициент $\frac{1-k}{1+k}$* . Эта теорема была получена в общем случае Л. Карно¹.

При соударении двух движущихся тел потеря кинетической энергии равна кинетической энергии, соответствующей потеряннм скоростям каждого тела и умноженной на коэффициент $\frac{1-k}{1+k}$:

$$\Delta T = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 |\Delta\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\Delta\vec{v}_2|^2 \right], \quad (19.22)$$

где $\Delta\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}_1$, $\Delta\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \vec{v}_2$.

Если удар является абсолютно неупругим и одно из тел до удара было неподвижным, имеем

$v_2 = 0$; $k = 0$; $u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ – скорость после удара; $T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$,
 $T_\tau = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2$ – выражение кинетической энергии в момент начала и конца удара.

Подставив значение u в выражение для T_τ , получим

$$T_\tau = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot T_0,$$

или

$$T_\tau = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} T_0.$$

Потеря кинетической энергии в этом случае

¹ Л. Карно (1753–1823) – выдающийся французский ученый и общественный деятель.

$$\Delta T = T_0 - T_\tau = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0, \quad \text{или} \quad \Delta T = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_0.$$

Таким образом, потеря кинетической энергии при ударе ΔT и оставшаяся после удара кинетическая энергия T_τ составляют определенные части от энергии ударяющего тела. Эти части зависят только от отношения масс соударяющихся тел.

Рассмотрим два случая:

1) $m_1 \gg m_2$. Масса ударяющего тела значительно больше массы тела,

по которому наносится удар. В этом случае $\frac{m_2}{m_1} \approx 0$ и $T_\tau \approx T_0$; потеря кинетической энергии незначительна. Это явление мы наблюдаем при забивке свай, при забивке гвоздей;

2) $m_2 \gg m_1$. Масса ударяющего тела значительно меньше массы те-

ла, по которому наносится удар. В этом случае $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$, $\Delta T \approx T_0$, $T_\tau \approx 0$, т.е. почти вся кинетическая энергия теряется и тела после удара остаются почти неподвижными. Это происходит, например, при ковке металла. Масса поковки и наковальни вместе значительно превосходят массу молота.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие явление удара.

Пример 19.2. Груз весом P_1 падает без начальной скорости с высоты h на плиту весом P_2 , укрепленную на пружине жесткости c . Найти максимальное сжатие пружины λ_{\max} после удара, предполагая, что удар абсолютно неупругий (рис. 19.13).

Решение. Разобьем решение задачи на три этапа: 1) движение груза до начала удара; 2) удар груза о плиту; 3) движение груза с плитой после окончания удара. Скорость груза в конце каждого этапа является начальной скоростью для следующего этапа.

Первый этап. Применяя теорему об изменении кинетической энергии на перемещении h , найдем скорость груза перед началом удара:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g h, \quad v_1 = \sqrt{2gh}.$$

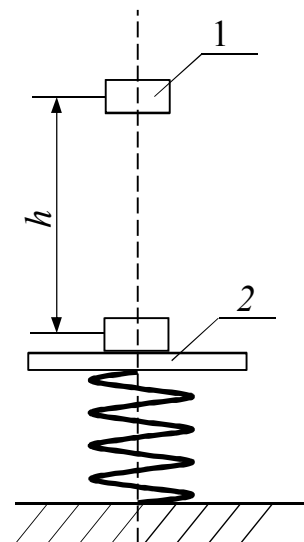


Рис. 19.13

Второй этап. Рассмотрим удар, включив в систему груз и плиту. На систему действуют неударные (обычные) силы тяжести P_1 , P_2 и сила упругости пружины, а также ударные силы взаимодействия. Так как внешних ударных сил нет, то количество движения системы при ударе не изменяется:

$$Q_\tau = Q_0, \quad (m_1 + m_2)u = m_1 v_1.$$

Отсюда

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Третий этап. Используя теорему об изменении кинетической энергии на перемещении системы из положения, где произошел удар, в самое нижнее положение, где деформация пружины максимальна, получим значение λ_{\max} :

$$0 - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (P_1 + P_2)(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2),$$

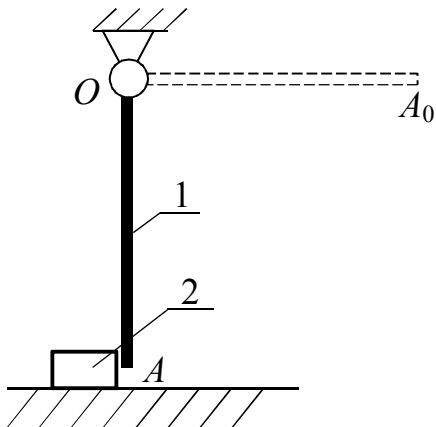
где $\lambda_1 = \frac{P_2}{c}$ – начальное сжатие пружины;

$\lambda_2 = \lambda_{\max}$ – конечное, максимальное сжатие.

Разрешив квадратное уравнение относительно λ_{\max} , найдем определяемую величину сжатия пружины:

$$\lambda_{\max} = \frac{P_1 + P_2}{c} + \frac{\sqrt{P_1^2 + c(m_1 + m_2)u^2}}{c}.$$

Пример 19.3. Однородный стержень весом P_1 и длиной $OA = l$ падает без начальной скорости из горизонтального положения, вращаясь вокруг неподвижной оси O . В вертикальном положении он ударяет груз весом P_2 . Считая удар абсолютно неупругим, найти путь, пройденный грузом после удара, если поверхность шероховатая, f – коэффициент трения скольжения (рис. 19.14).



Решение. Найдем угловую скорость стержня в начале удара. Для этого применим теорему об изменении кинетической энергии на перемещении стержня из горизонтального положения в вертикальное:

$$T - T_0 = \sum A;$$

Рис. 19.14

$$J_0 \frac{\omega^2}{2} - 0 = P_1 \frac{l}{2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{P_1 l}{J_0}}.$$

Затем рассмотрим удар стержня о груз. Применим теорему об изменении кинетического момента системы при ударе, включив в систему стержень и груз. Ударными силами являются силы взаимодействия этих тел (внутренние ударные силы) и реакции подшипников (внешние ударные силы). В рассматриваемом случае $\sum m_0(\vec{S}^e) = 0$ и кинетический момент системы относительно оси вращения не будет изменяться. Кинетический момент системы в начале удара $K_0 = J_0 \omega$, а в конце удара $K_0^\tau = J_0 \omega_\tau + m_2 u l$. Так как удар является абсолютно неупругим, то $u = \omega_\tau l$. Следовательно, имеем

$$J_0 \frac{u}{l} + m_2 u l = J_0 \omega; \quad u = \frac{J_0 \omega l}{J_0 + m_2 l^2}.$$

С такой скоростью начнется движение груза.

Для определения пути, пройденного грузом, применим теорему об изменении кинетической энергии к грузу:

$$0 - \frac{m_2 u^2}{2} = -F \cdot s,$$

где $F = f P_2$ – сила трения. Таким образом, путь груза до остановки

$$s = \frac{u^2}{2 f g}.$$

Пример 19.4. Колесо массой m и радиусом r , катясь без скольжения по горизонтальной направляющей BB' , наталкивается на уступ A и, огибая его, поднимается на горизонтальную поверхность AA' (рис. 19.15).

Высота уступа h . Удар колеса об уступ абсолютно неупругий, скольжение при ударе и при огибании уступа отсутствует. Определить, какова должна быть скорость центра C колеса перед ударом, чтобы колесо вкатилось на верхнюю направляющую. При заданной скорости v_c до удара определить импульс ударной реакции уступа S , записать условие отсутствия проскальзывания, если коэффициент

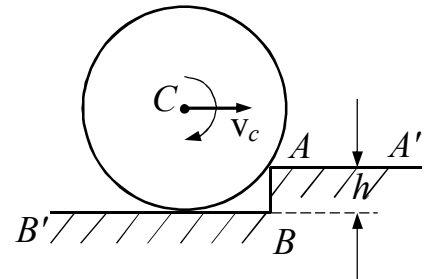


Рис. 19.15

трения скольжения при ударе f . Колесо считать однородным круглым диском. Принять числовые данные: $m = 40$ кг, $r = 0,5$ м, $h = 0,2$ м, $k = 0$ – абсолютно неупругий удар.

Решение. До удара колесо катилось без скольжения по поверхности

$$\omega_0 = \frac{v_c}{CP_v}$$

BB' , и его угловая скорость ω_0 , где v_c – скорость центра C перед ударом; P_v – мгновенный центр скоростей. При ударе о выступ A на колесо действует ударная реакция, импульс которой разложим на составляющие S_F и S_N , направленные по касательной и нормали к поверхности колеса (рис. 19.16). По окончании удара колесо будет поворачиваться вокруг точки A , где находится мгновенный центр скоростей. Скорость центра колеса после удара u_c перпендикулярна радиусу AC , ω – угловая скорость колеса. Уравнения плоского движения при ударе:

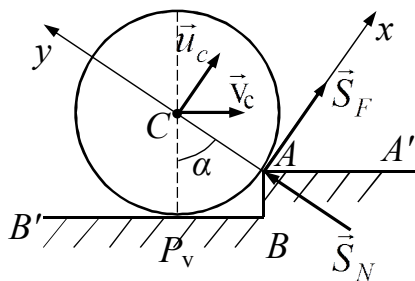


Рис. 19.16

$$\left. \begin{aligned} m(u_c - v_c \cos \alpha) &= S_F, \\ m(0 + v_c \sin \alpha) &= S_N, \\ \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{u_c}{r} - \frac{v_c}{r} \right) &= -S_F \cdot r, \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

где $\cos \alpha = \frac{r-h}{r}; \sin \alpha = \frac{1}{r} \sqrt{2rh - h^2}$.

Из уравнений (19.23) определяются три неизвестные величины u_c , S_F , S_N как функции от v_c . Перепишем уравнения в виде

$$m(u_c - v_c \cos \alpha) = S_F,$$

$$\frac{1}{2} m(u_c - v_c) = -S_F,$$

откуда

$$S_N = m v_c \sin \alpha, \quad S_F = \frac{1}{3} m v_c (1 - \cos \alpha), \quad u_c = \frac{1}{3} v_c (1 + 2 \cos \alpha). \quad (19.24)$$

Для определения величины скорости v_c , при которой колесо вкатывается через уступ на горизонтальную поверхность AA' , применим теорему об изменении кинетической энергии при перемещении колеса на поверхность AA' после удара (поворот вокруг точки A на угол α). На рис. 19.17 показано это перемещение.

$$T - T_0 = \sum A,$$

где $T = \frac{3}{4}mv^2$; $T_0 = \frac{3}{4}mu_c^2$; $\sum A = -mgh$,

откуда $v^2 = u_c^2 - \frac{4}{3}gh$.

Для того чтобы подъем был возможен, должно выполняться условие

$$u_c^2 \geq \frac{4}{3}gh.$$

Подставив u_c из (19.24), получим

$$\frac{v_c^2}{9}(1 + 2\cos\alpha)^2 \geq \frac{4}{3}gh,$$

или

$$v_c \geq \frac{2r\sqrt{3gh}}{3r - 2h}. \quad (19.25)$$

Приняв $v_c = \frac{2r\sqrt{3gh}}{3r - 2h}$ из уравнения (19.24), вычислим u_c , S_F , S_N .
Условие отсутствия проскальзывания при ударе $S_F \leq fS_N$.

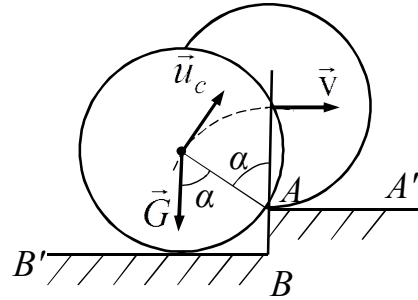


Рис. 19.17

19.6. Приближенная теория гироскопа. Виды гироскопов, основные допущения, основное уравнение приближенной теории гироскопа

В современной технике широко применяются различные гироскопические устройства. Они используются в качестве стабилизаторов, навигационных приборов, измерителей скоростей и ускорений и т.п.

Большая точность движения космических кораблей, баллистических ракет в значительной степени объясняется наличием в их системах управления различных гироскопических устройств.

Основным элементом всех гироскопических устройств является гироскоп¹. *Гироскопом называется тяжелое твердое тело, имеющее ось материальной симметрии и вращающееся около неподвижной точки, лежащей на этой оси.* Ось симметрии называется *осью гироскопа*. В технике гироскопы обычно выполняются в виде массивных сплошных или полых цилиндров.

¹ Слово *гироскоп* составлено из двух греческих слов: «гирос» – вращение и «скопейн» – наблюдаю. Это название ввел французский физик Фуко, пользовавшийся гироскопом для наблюдения за вращением Земли.

Если неподвижная точка совпадает с центром масс гироскопа и ось его может совершать любые вращения вокруг него, то гироскоп называется *уравновешенным* или *свободным*. Закрепление центра масс уравновешенного гироскопа обычно осуществляется при помощи карданова подвеса (рис. 19.18). Карданов подвес состоит из рамы 1, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси AB , а эта ось вместе со 2-й рамой может вращаться вокруг вертикальной оси CD . Все три оси – ось гироскопа O_1O_2 , оси AB и CD – пересекаются в центре масс O гироскопа. При выполнении карданова подвеса добиваются уменьшения трения осей в подшипниках до минимума, а также сильного уменьшения массы рам по сравнению с массой гироскопа. В точных гироскопических устройствах применяют подвесы, исключаяющие подшипники. Такой гироскоп, ось которого может совершать любые вращения вокруг неподвижной точки, называется *гироскопом с тремя степенями свободы*, так как для описания движения его необходимо задание трех независимых параметров. Если у свободного гироскопа закрепить вторую раму, то получим *гироскоп с двумя степенями свободы* (рис. 19.19).

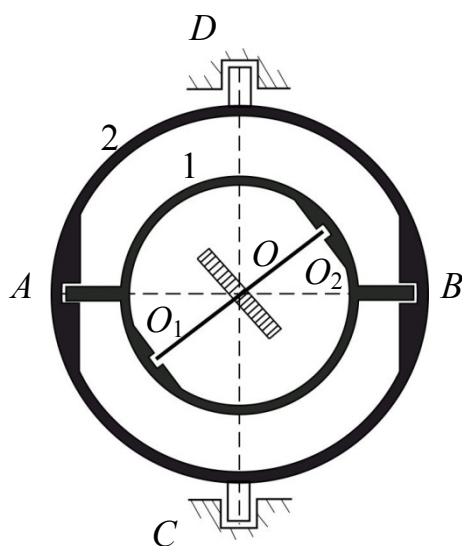


Рис. 19.18

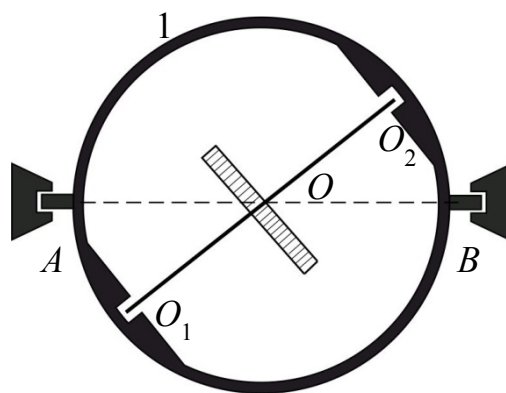


Рис. 19.19

Гироскоп является твердым телом, имеющим одну неподвижную точку. Задача о движении тела с одной неподвижной точкой является очень трудной. Ее точное решение было выполнено в трех классических случаях замечательными учеными Л. Эйлером, Ж. Лагранжем и С. Ковалевской. После Ковалевской этой задачей занимались многие, главным образом русские механики, которые получили решение в некоторых частных случаях.

Для облегчения решения задачи пользуются некоторыми упрощающими допущениями, делающими теорию гироскопа приближенной. Пользование приближенной теорией гироскопа приводит к результатам, во многих случаях удовлетворяющим техническую практику.

Основные допущения приближенной теории гироскопа

Рассмотрим гироскоп, вращающийся с большой угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг своей оси Oz , закрепленной в точке O и занимающей вертикальное положение (рис. 19.20). Вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси Oz . Момент количества движения гироскопа относительно точки O вследствие симметрии будет направлен также по оси гироскопа. Его проекция на эту ось будет равна $J_z\omega$, где J_z – момент инерции гироскопа относительно его оси. Итак,

$$K_O = J_z\omega. \quad (19.26)$$

Пусть теперь ось гироскопа изменяет свое направление в пространстве, поворачиваясь с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг некоторой оси Oz_1 , проходящей через неподвижную точку O (рис. 19.21).

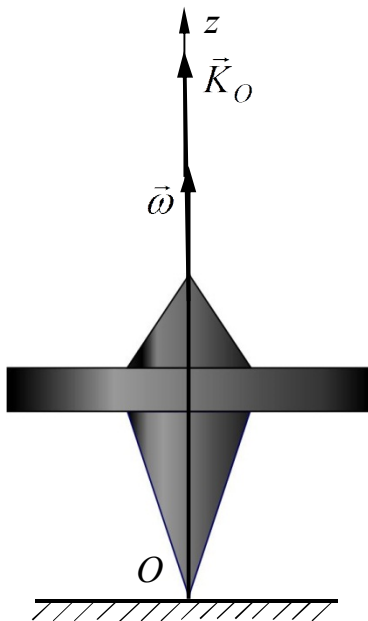


Рис. 19.20

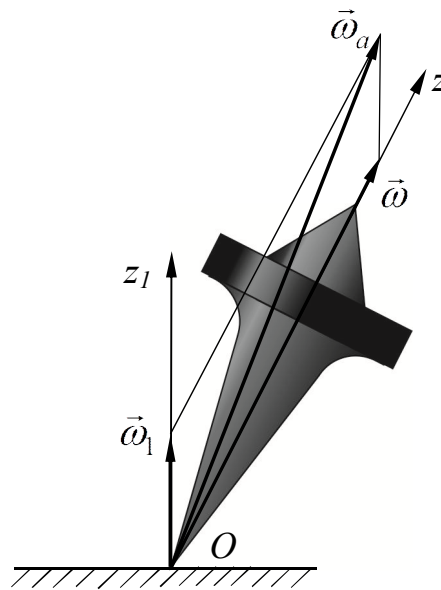


Рис. 19.21

Движение гироскопа будет сложным, состоящим из относительного вращения вокруг оси Oz и переносного вращения вокруг оси Oz_1 . Абсолютная угловая скорость гироскопа, $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}$, не будет направлена по оси гироскопа. Также не будет направлен по этой оси и вектор \vec{K}_O . Но поскольку в технике угловая скорость ω вращения гироскопа вокруг своей оси, называемая *угловой скоростью собственного вращения* и измеряемая

десятками тысяч оборотов в минуту, во много раз превышает ω_1 , то при вычислении \vec{K}_O последней пренебрегают. Таким образом, приближенная теория гироскопа основывается на следующих допущениях:

1) вектор \vec{K}_O – момент количества движения гироскопа относительно точки O – направлен по оси гироскопа;

2) величина вектора \vec{K}_O принимается равной $J_z \vec{\omega}$. Заметим, что в приближенной теории гироскопа пренебрегают ω_1 – угловой скоростью вращения оси гироскопа – только при вычислении \vec{K}_O ; в остальных случаях она учитывается.

Теорема Резаля

Изучение движения гироскопа проводят с помощью теоремы об изменении момента количества движения системы в форме, которую ей придал Резаль. Ранее была получена следующая формула, выражающая теорему об изменении момента количества движения системы:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e.$$

Здесь \vec{K}_O – момент количества движения системы относительно неподвижного центра O , а \vec{M}_O^e – главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра. При движении системы вектор \vec{K}_O изменяется и по модулю, и по направлению. Конец его описывает некоторую кривую, которая будет годографом этого вектора (рис. 19.22). Производная по времени от вектора \vec{K}_O будет скоростью точки B конца вектора \vec{K}_O , поэтому

$$\vec{u} = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e, \quad (19.27)$$

т. е. *скорость конца вектора – момента количества движения системы относительно неподвижного центра – равна главному моменту внешних сил относительно того же центра*. Это и есть специфическая формулировка теоремы об изменении момента количества движения системы, которую дал Резаль. Она часто называется *теоремой Резаля*.

Основное уравнение приближенной теории гироскопа

Пусть на гироскоп действуют силы, главный момент которых относительно неподвижной точки O равен \vec{M}_O^e (рис. 19.23). Скорость \vec{u} конца вектора \vec{K}_O равна \vec{M}_O^e . С другой стороны, выражая в известной формуле $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ для скорости точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, \vec{r} через \vec{K}_O , получаем

$$\vec{u} = \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O = \vec{M}_O^e,$$

или

$$\vec{u} = J_z \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \vec{M}_O^e. \quad (19.28)$$

Это уравнение является *основным уравнением приближенной теории гироскопа*. Здесь $\vec{\omega}$ – угловая скорость собственного вращения гироскопа, а $\vec{\omega}_1$ – угловая скорость вращения оси гироскопа вокруг неподвижной точки.

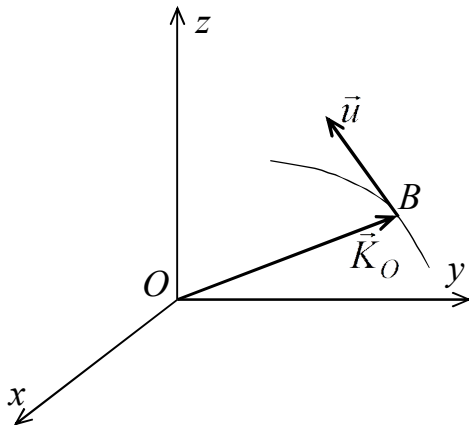


Рис. 19.22

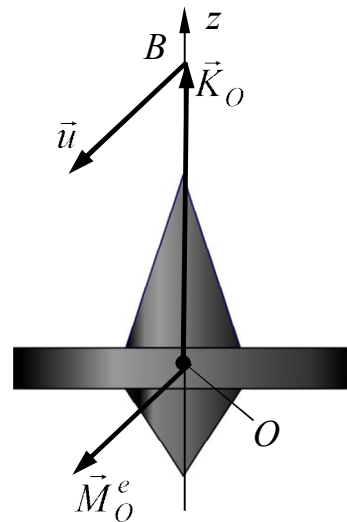


Рис. 19.23

19.7. Основные свойства гироскопа с тремя степенями свободы. Регулярная прецессия оси гироскопа

Основное уравнение (19.28) объясняет свойства, которыми обладает гироскоп. Рассмотрим некоторые из этих свойств.

1. Ось уравновешенного гироскопа (см. рис. 19.18), на который не действуют силы (кроме силы тяжести), сохраняет постоянное направление в пространстве по отношению к инерциальной системе отсчета.

Это свойство вытекает непосредственно из формулы (19.28):

$\vec{M}_O^e = 0$, а следовательно, равна нулю скорость \vec{u} конца вектора \vec{K}_O , т. е. скорость точки B оси гироскопа, поэтому эта ось не изменяет своего направления в пространстве по отношению к звездам.

Свойство оси уравновешенного гироскопа, на который не действуют силы, сохранять свое направление в пространстве является одним из важнейших его свойств. Оно широко используется в космических кораблях, ракетах, самолетах для того, чтобы придать им определенную ориентацию в пространстве. Так, если на космическом корабле на старте ориентировать ось уравновешенного гироскопа на некую звезду, то эта ориентация сохранится во все время полета корабля.

2. Под действием силы, приложенной к оси гироскопа с тремя степенями свободы, ось отклонится не в сторону действия силы, а в ту сторону, куда направлен момент этой силы, т. е. в направлении, перпендикулярном к линии действия силы.

Пусть на гироскоп, имеющий неподвижную точку O , действует сила, параллельная оси Oy и отстоящая от неподвижной точки на расстоянии h (рис. 19.24). Момент этой силы относительно точки O будет направлен по положительной оси Ox и равен по модулю Fh . Вектор \vec{K}_O , равный по модулю $J_z\omega$, направлен по оси гироскопа. Конец этого вектора – точка B оси – будет перемещаться согласно (19.28) со скоростью $\vec{u} = \vec{M}_O(\vec{F})$, а сам гироскоп отклоняться в направлении вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$, т.е. перпендикулярно к линии действия силы F . Если в некоторый момент времени действие силы прекратится, то u обратится в нуль и ось гироскопа остановится, а сам гироскоп будет вращаться вокруг этой оси, отклоненной от первоначального положения на некоторый угол.

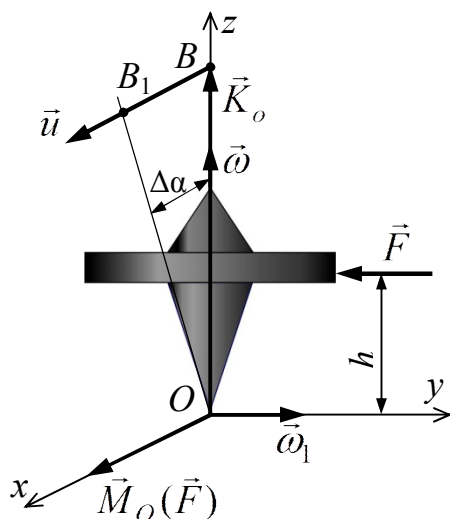


Рис. 19.24

3. Сила, действующая на ось гироскопа в течение очень малого промежутка времени, практически не изменяет направления этой оси.

Положим, что сила \vec{F} действовала на гироскоп (рис. 19.24) в течение очень малого промежутка времени Δt . За это время точка B оси гироскопа (конец вектора \vec{K}_O) переместится в направлении вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ в точку B_1 , повернувшись вокруг оси Oy на малый угол $\Delta\alpha$.

Из (19.28) имеем $u = J_z \omega_1 \omega \sin(\omega_1 \omega) = Fh$. Но $\vec{\omega}_1$ перпендикулярна $\vec{\omega}$, по-

этому $\sin(\omega_1 \omega) = 1$, кроме того, $\omega_1 = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$. Следовательно,

$$J_z \omega \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = Fh$$

Отсюда

$$\Delta\alpha = \frac{Fh\Delta t}{J_z\omega} \quad (19.29)$$

Итак, за время действия силы F , т. е. за Δt секунд, ось гироскопа повернется на угол $\Delta\alpha$, а затем поворот прекратится, так как сила перестанет действовать. Как уже говорилось, угловая скорость собственного вращения гироскопа и его момент инерции – очень большие величины, а выражение $Fh\Delta t$, вследствие малости Δt и конечности Fh , мало. Поэтому величина угла отклонения $\Delta\alpha$ ничтожно мала. Это и доказывает положение, что в случае действия на гироскоп кратковременной силы ось его сохраняет свое положение в пространстве.

Регулярная прецессия оси гироскопа

Под влиянием непрерывно действующей силы, приложенной к оси гироскопа с тремя степенями свободы, ось гироскопа будет совершать движение по конической поверхности с вершиной в неподвижной точке оси. Это движение оси гироскопа называется *прецессией*.

Рассмотрим это явление на примере волчка. На волчок, ось которого образует с вертикалью угол α , действуют две силы: сила тяжести \vec{P} и реакция опорной точки \vec{N} (трением в опоре и сопротивлением воздуха пренебрегаем) (рис. 19.25).

Если бы волчок не вращался вокруг своей оси, он бы под действием силы тяжести упал. Для исключения этого волчку сообщается достаточно большая угловая скорость ω . Конец вектора \vec{K}_O – точка B оси Oz волчка – движется в каждый момент времени со скоростью \vec{u} , равной вектору момента силы P относительно точки O , т.е. перпендикулярно к направлению силы P .

При этом движении ось волчка опишет коническую поверхность. Это движение оси волчка и будет прецессией. Найдем угловую

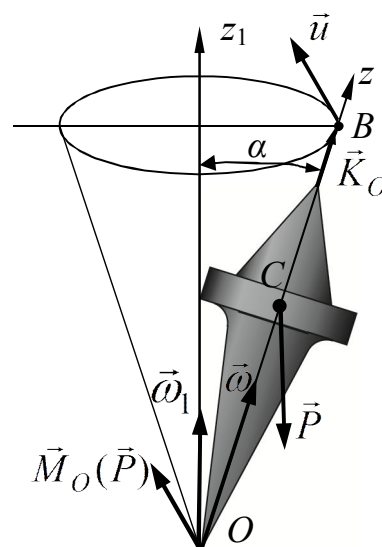


Рис. 19.25

скорость ω_1 прецессии волчка. Запишем (19.28) в следующем виде: $J_z \omega_1 \omega \sin \alpha = Pl \sin \alpha$, так как $M_O^e = Pl \sin \alpha$, где через l обозначено расстояние OC . Отсюда

$$\omega_1 = \frac{Pl}{J_z \omega}. \quad (19.30)$$

Это и есть формула, определяющая скорость прецессии волчка. Эта скорость тем меньше, чем больше угловая скорость собственного вращения волчка, и тем больше, чем меньше эта угловая скорость, что легко проверяется наблюдением за движением волчка. После его запуска ось прецессирует медленно, так как угловая скорость, сообщенная волчку при запуске, большая. В результате сопротивления воздуха и трения оси об опору угловая скорость собственного вращения волчка уменьшается, что вызывает увеличение угловой скорости прецессии. Если угол α не изменяется во время движения волчка, то прецессия называется *регулярной*.

19.8. Гироскоп с двумя степенями свободы.

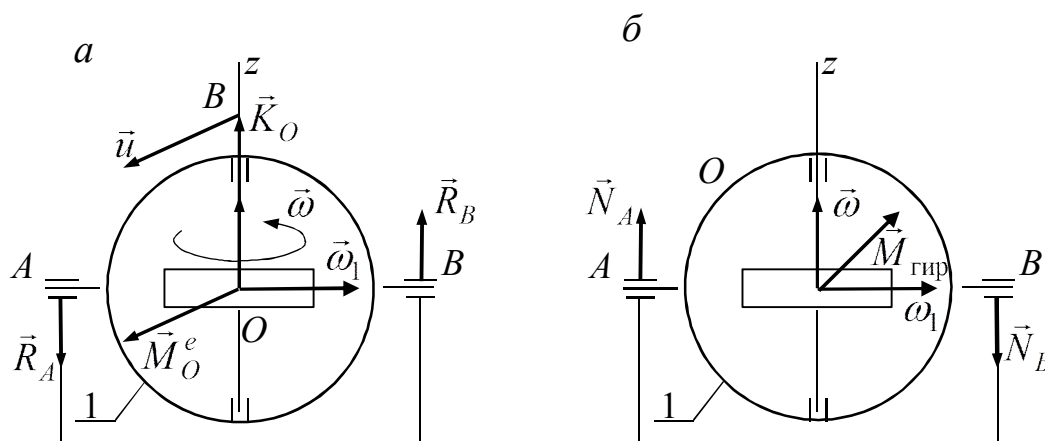
Гироскопический эффект, гироскопический момент

Когда ось гироскопа изменяет свое положение в пространстве, т.е. прецессирует, имеет место *гироскопический эффект*, заключающийся в появлении некоторого момента, называемого *гироскопическим*:

$$\vec{M}_{\text{гир}} = -J_z \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}. \quad (19.31)$$

Наличием гироскопического момента, который, например, уравновешивает опрокидывающий момент силы тяжести, объясняется то, что вращающийся волчок не падает.

Если ось гироскопа поворачивается в результате действия на нее каких-либо устройств, то говорят, что гироскоп совершает *принудительную прецессию*. Сами устройства испытывают давления в опорах. Эти давления называются *гироскопическими*.



Рассмотрим указанные явления на гироскопе с двумя степенями свободы, у которого неподвижная ось AB перпендикулярна к оси гироскопа (рис. 19.26).

Гироскоп вращается с угловой скоростью ω , а рама 1 поворачивается вокруг оси AB (оси прецессии) с угловой скоростью ω_1 ($\omega \gg \omega_1$) (рис. 19.26,а). Так как ось гироскопа совершает вынужденную прецессию, то точка В (конец вектора \vec{K}_O) имеет скорость $u = \omega_1 OB = J_z \omega \omega_1$. Но по теореме Резаля $\vec{u} = \vec{M}_O^e$, где \vec{M}_O^e – момент внешних сил, действующих на гироскоп. Этот момент создают реакции подшипников A и B (\vec{R}_A и \vec{R}_B). Очевидно, что эти реакции образуют пару сил, так как главный вектор сил, действующих на гироскоп, равен нулю (по теореме о движении центра масс $M\vec{a}_0 = \vec{R}^e$, $\vec{a}_0 = 0$, следовательно, $\vec{R}^e = 0$).

По закону равенства действия и противодействия на раму со стороны гироскопа будут действовать равные и противоположные силы \vec{N}_A и \vec{N}_B , также образующие пару сил (рис. 19.26,б).

Пара сил (\vec{N}_A, \vec{N}_B) называется гироскопической парой, а ее момент – гироскопическим моментом $M_{\text{гир}}$. Очевидно, $\vec{M}_O^e = -\vec{M}_{\text{гир}} = \vec{u} = J_z \omega_1 \times \vec{\omega}$.

Модуль гироскопического момента:

$$M_{\text{гир}} = u = J_z \omega_1 \omega \sin(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}) \quad (19.32)$$

Таким образом, при вынужденной прецессии оси гироскопа на подшипники, в которых закреплена его ось, действуют гироскопические давления. Возникновение гироскопических давлений при прецессионном движении оси гироскопа и называют гироскопическим эффектом.

С гироскопическим моментом всегда приходится иметь дело, когда ось вращения маховика, ротора, вала и т.д. изменяет свое направление в пространстве. Так бывает с осью турбины, установленной на теплоходе, которая изменяет направление в результате качки теплохода, с осью пропеллера при вираже самолета и т. п.

Гироскопические давления, появляющиеся в результате действия гироскопического момента, часто достигают очень больших значений; гироскопический момент может вызвать и движение того тела, с которым скреплены подшипники.

Правило Н.Е. Жуковского

Из приведенных рассуждений вытекает простое правило нахождения направления давления на подшипники при вынужденной прецессии, а

именно: если оси гироскопа сообщить принудительную прецессию, то появляющийся при этом гироскопический момент будет стремиться кратчайшим путем установить ось гироскопа параллельно оси прецессии так, чтобы направления угловых скоростей собственного вращения и прецессии при этом совпали. Это правило называется *правилом Н. Е. Жуковского*.

На рис. 19.26,б пара сил \vec{N}_A, \vec{N}_B будет стремиться повернуть ось на прямой угол, чтобы совпали векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$.

Пример 19.5. Определить максимальные гироскопические давления на подшипники турбины, установленной на корабле, который подвержен качке вокруг оси z_1 , перпендикулярной к оси ротора турбины (рис. 19.27), с угловой амплитудой $\varphi_1 = \frac{\pi}{10}$ рад и периодом $T = 20$ с. Вес ротора $P = 10000$ Н, радиус инерции его относительно оси вращения $\rho_z = 0,75$ м, угловая скорость собственного вращения $n = 15000$ об/мин, расстояние между подшипниками $AB = l = 2,0$ м.

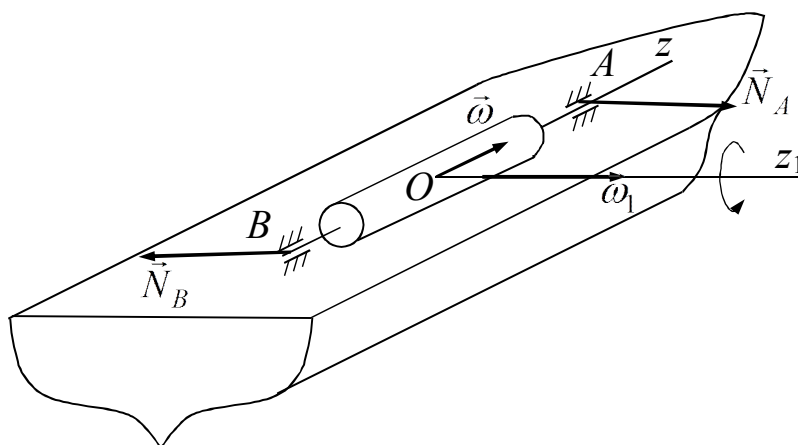


Рис. 19.27

Решение. Угол φ при качке изменяется по закону $\varphi = \varphi_1 \sin \frac{2\pi t}{T}$, следовательно, ω_1 – угловая скорость вынужденного вращения вокруг оси Oz_1 , $\omega_1 = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \varphi_1 \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi^2}{100} \cos \frac{2\pi t}{T}$ рад/с.

Угловая скорость собственного вращения ротора $\omega = \frac{\pi n}{30} = 500\pi$ рад/с. Рассчитываем гироскопический момент по формуле (19.32):

$$M_{\text{гир}} = J_z \omega_1 \omega = \frac{P}{g} \rho_z^2 \omega_1 \omega = \frac{10000}{9,8} 0,75^2 \frac{\pi^2}{100} 500 \pi \cos \frac{\pi t}{10} \approx 89000 \cos \frac{\pi t}{10} \text{ Н} \cdot \text{м} =$$

$$= 89 \cos \frac{\pi t}{10} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$
 Давления N_A и N_B по модулю равны $44,5 \cos \frac{\pi t}{10}$ кН, максимальные значения 44,5 кН. Статические давления на подшипники $N_{\text{ст}} = 5$ кН. Как видим, гироскопические давления оказались в 8,8 раз больше статических.

На рассмотренных свойствах гироскопа основано устройство различных гироскопических стабилизаторов, гироскопических навигационных приборов и приборов специального назначения.

19.9. Применение теорем об изменении количества движения и кинетического момента к сплошной среде – уравнение Эйлера, турбинное уравнение Эйлера

Рассмотрим некоторую сплошную среду, например жидкость или газ. Выделим объем V , ограниченный поверхностью S , и будем следить за движением этого объема, предполагая движение установившимся.

Внешние силы, действующие на объем V со стороны остальной жидкости, а также и других внешних тел, можно разбить на две группы:

1) силы массовые или объемные, т.е. такие, которые действуют на все частицы объема V – как внутренние, так и находящиеся на поверхности объема, например силы тяжести;

2) силы поверхностные, действующие только на частицы, лежащие на внешней поверхности объема, например силы давления на поверхность V со стороны окружающей жидкости или твердых стенок, между которыми движение происходит. К этой же группе сил относятся и силы трения выделенного объема об окружающую его жидкость или твердые стенки.

Обозначим главный вектор внешних объемных сил $\vec{R}_{\text{об}}^e$, а внешних поверхностных сил – $\vec{R}_{\text{пов}}^e$. Если количество движения жидкого объема равно \vec{Q} , то по теореме об изменении количества движения имеем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_{\text{об}}^e + \vec{R}_{\text{пов}}^e. \quad (19.33)$$

Предположим, что жидкость течет по трубе переменного сечения (рис. 19.28). Рассмотрим объем жидкости между двумя какими-нибудь плоскими перпендикулярными стенкам трубы сечениями 1-1 и 2-2.

Пусть S_1 и S_2 – площади поперечных сечений, \vec{v}_1 и \vec{v}_2 – средние по сечению скорости жидкости в этих сечениях, ρ_1, ρ_2 – плотность среды (переменная в общем случае).

Произведение $\rho v S$ определяет массу жидкости, протекающую через поперечное сечение в единицу времени – секундную массу.

По закону сохранения массы $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$ и секундная масса будет постоянной величиной:

$$M = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

Нетрудно показать, что изменение $d\vec{Q}$ количества движения выделенного объема V за время dt будет

$$d\vec{Q} = M(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)dt.$$

Отсюда следует, что секундное изменение количества движения $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ в выделенном объеме

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \quad (19.34)$$

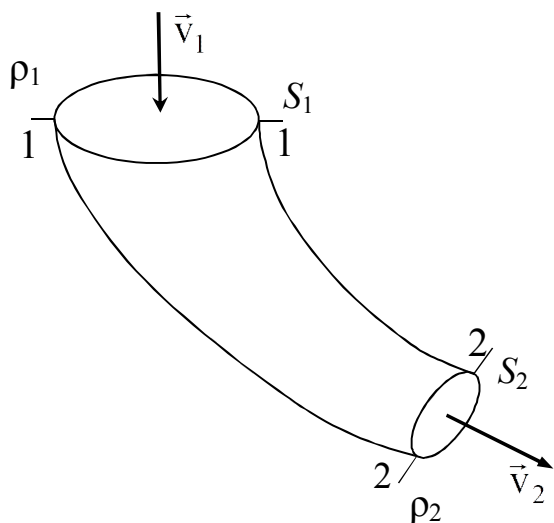


Рис. 19.28

т. е. равно разности секундных количеств движения жидкости, протекающей через сечения, ограничивающие выделенный объем.

С учетом (19.33) теорема об изменении количества движения для сплошной среды – теорема Эйлера – может быть записана в виде

$$M(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{R}_{об}^e + \vec{R}_{пов}^e, \quad (19.35)$$

т.е. изменение секундных количеств движения жидкости, протекающей через два каких-нибудь сечения трубы, равно сумме главных векторов объемных и поверхностных сил.

Векторному уравнению (19.35) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат.

Пример 19.6. Определить величину горизонтальной составляющей силы динамического (дополнительно к гидростатическому) давления воды \vec{N} на колено трубы (рис. 19.29) диаметром $d = 0,3$ м, если скорость движения воды по трубе $v = 2$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

Решение. Воспользуемся теоремой Эйлера, проецируя (19.35) на ось Ох, учитывая $v_1 = v_2 = v$.

Получаем

$$R = Mv = \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$R = 10^3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,3^2}{4} \approx 283 \text{ Н}.$$

По закону равенства действия и противодействия давление воды на колено трубы $N = R$ и приложено к опоре.

Рассмотрим применение теоремы об изменении кинетического момента к сплошной среде – турбинное уравнение Эйлера.

Рассмотрим жидкость, протекающую через колесо турбины, которое вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси (рис. 19.30).

Применим теорему об изменении кинетического момента к совокупности частиц жидкости, заполняющей один из каналов между лопастями турбин:

$$\frac{dK_z}{dt} = m_z(\vec{F}_s^e),$$

где $m_z(\vec{F}_s^e)$ – главный момент относительно оси турбины (вертикальной оси Oz) внешних сил, приложенных к рассматриваемому объему жидкости. Этими внешними силами являются силы тяжести жидкости и реакции стенок канала. Но момент силы тяжести относительно оси Oz равен нулю, и следовательно, m_z является моментом реакции стенок. Последний равен по величине и противоположен по знаку искомому вращающему моменту m_z^* , отнесенному к одному каналу колеса. Имеем

$$m_z^* = -m_z = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (19.36)$$

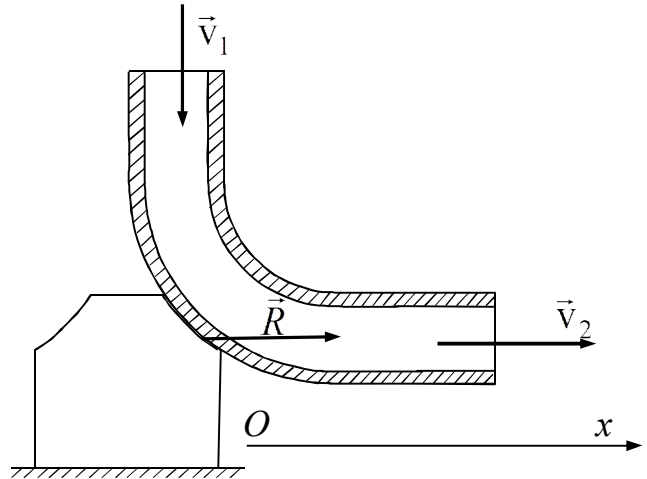


Рис. 19.29

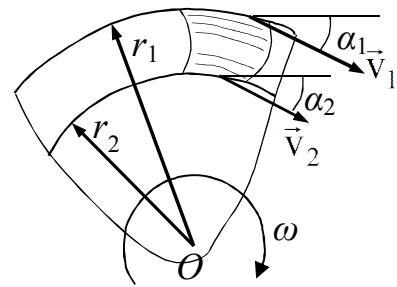


Рис. 19.30

Нетрудно показать, что dK_z – дифференциал кинетического момента жидкости, протекающей сквозь канал:

$$dK_z = Mdt(r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1), \quad (19.37)$$

где M – секундная масса жидкости, протекающая через канал в единицу времени;

v_1, v_2 – абсолютные скорости жидкости на входе в колесо и на выходе из него;

α_1, α_2 – углы, характеризующие направление абсолютных скоростей;

r_1, r_2 – внешний и внутренний радиусы (рис. 19.30).

Подставляя (19.37) в (19.36), находим искомый вращающий момент:

$$m_z^* = -\frac{dK_z}{dt} = M(r_1 v_1 \cos \alpha_1 - r_2 v_2 \cos \alpha_2). \quad (19.38)$$

Уравнение (19.38) представляет собой турбинное уравнение Эйлера.

Нетрудно видеть, что вращающий момент оказывается не зависящим от формы канала и обуславливается значением величин и направлений абсолютных скоростей во входном и выходном сечениях. Формула (19.38) дает выражение момента, вращающего турбину, если под M подразумевать секундный массовый расход жидкости через все каналы колеса турбины.

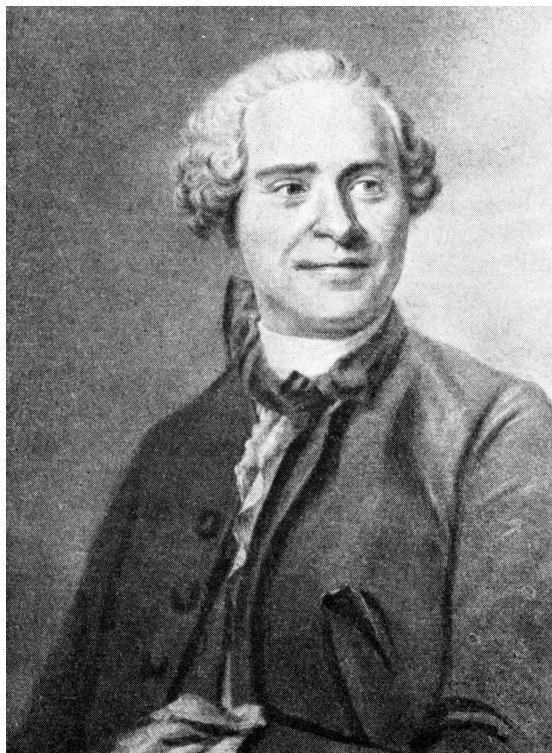
Вопросы для самопроверки

1. Какое явление называется ударом? Почему при ударе за малый промежуток времени скорость изменяется на конечную величину?
2. Какие допущения используются в элементарной теории удара? Как записывается основное уравнение теории удара?
3. Как формулируются теоремы об изменении количества движения и кинетического момента системы при ударе?
4. Как изменяется угловая скорость вращающегося тела при ударе?
5. Как формулируется теорема о потере кинетической энергии при ударе (теорема Карно)?
6. Какие основные допущения принимаются в приближенной теории гироскопа? Как записывается основное уравнение приближенной теории гироскопа?
7. Какими основными свойствами обладает гироскоп с тремя степенями свободы? Как объяснить появление гироскопического давления для гироскопа с двумя степенями свободы?
8. Какой вид принимает теорема об изменении количества движения для сплошной среды?

9. Как записывается выражение для момента, вращающего колеса гидравлической турбины (турбинное уравнение Эйлера)? Какая теорема динамики используется для получения этого уравнения?

Глава 20. Принцип Даламбера

Принцип Даламбера является теоретической основой метода кинетостатики, т.е. приема, позволяющего уравнениям движения придать вид уравнений статики. Этот метод Даламбер¹ изложил в трактате "Динамика", вышедшем в свет в 1743 году. В трактате ученый решил задачу – записать уравнения движения точки и точек системы в форме уравнений равновесия. Следует отметить, что этот принцип еще раньше был сформулирован и применялся Я. Германом² и Л. Эйлером³, работавшими в Петербургской академии наук, и получил поэтому название "Петербургского принципа". По установившейся традиции будем называть этот принцип механики принципом Даламбера, хотя правильнее его было бы назвать принципом Германа-Эйлера-Даламбера. В середине XIX в. в трактовке принципа было использовано понятие "сила инерции материальной точки", что сделало его удобным для решения задач. Новая трактовка принципа Даламбера с использованием понятия силы инерции является основой важного метода технической механики – метода кинетостатики, который заключается в применении методов статики для динамических расчетов механизмов и машин.



Ж. Даламбер (1717–1783)

20.1. Сила инерции материальной точки

Рассмотрим движущуюся материальную точку M массой m (рис. 20.1). Пусть \vec{F} и \vec{N} – равнодействующие активных сил и сил реакции связей, \vec{a} – ускорение этой точки в некоторой инерциальной системе отсчета.

¹ Ж. Даламбер (1717–1783) – французский ученый-механик и философ, профессор политехнической школы и член Парижской академии наук.

² Я. Герман (1678–1733) – швейцарский математик и механик.

³ Л. Эйлер (1707–1783) – знаменитый математик, астроном и физик. За 30 лет работы в Российской академии наук Эйлер создал большое количество работ по математике, механике твердого и упругого тела, гидромеханике и небесной механике.

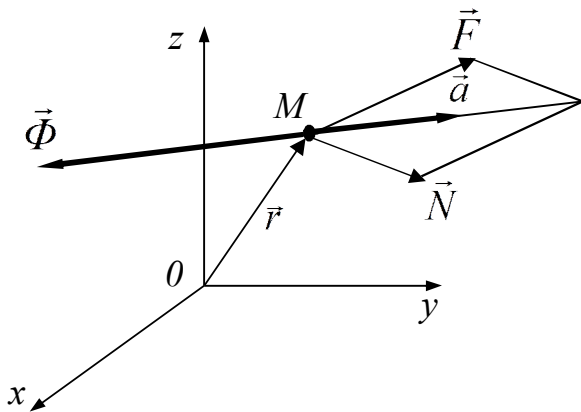


Рис. 20.1

Силой инерции материальной точки называют силу, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \quad \Phi = ma. \quad (20.1)$$

Силу $\vec{\Phi}$ называют также даламберовой силой инерции.

Очевидно, сила $\vec{\Phi}$ равна и противоположна равнодействующей сил, приложенных к точке.

Проекции силы инерции $\vec{\Phi}$ на координатные оси определяются следующими формулами:

а) на декартовы оси координат

$$\Phi_x = -m\ddot{x}, \quad \Phi_y = -m\ddot{y}, \quad \Phi_z = -m\ddot{z}; \quad (20.2)$$

б) на естественные оси, связанные с траекторией точки,

$$\Phi_\tau = -m\dot{v}_\tau = -m\ddot{s}, \quad \Phi_n = -m\frac{v^2}{\rho}, \quad \Phi_b = 0. \quad (20.3)$$

Составляющие силы инерции $\vec{\Phi}$ вдоль естественных осей называют касательной силой инерции и нормальной, или центробежной, силой инерции. Следует отметить, что сила $\vec{\Phi}$ к материальной точке не приложена. Она равна геометрической сумме сил, с которыми движущаяся точка действует на тела, сообщаящие ей ускорение (в том числе и на связи) (рис. 20.2).

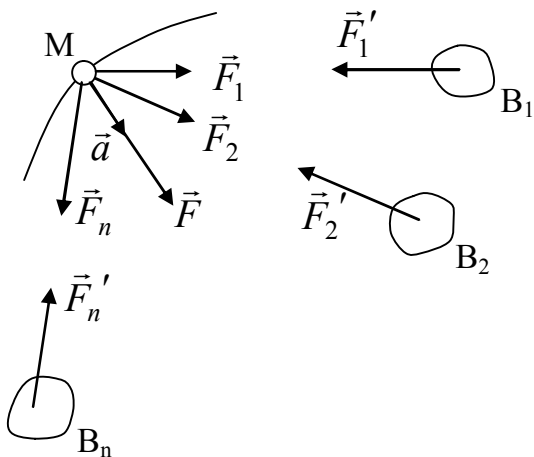


Рис. 20.2

Пусть B_1, B_2, \dots, B_n — тела, сообщаящие точке ускорение;

$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ — система сил, приложенных к точке; $\{\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n'\}$ — силы, приложенные к телам B_1, B_2, \dots, B_n . Сила инерции

$$\vec{\Phi} = \sum \vec{F}_s'.$$

20.2. Принцип Даламбера

Принцип Даламбера для материальной точки

Рассмотрим движущуюся материальную точку M (рис. 20.1). Добавим к движущейся точке силу инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ (рис. 20.3).

Формулировка принципа:

Если к движущейся материальной точке кроме действующих на нее активных сил и реакций связей добавить силу инерции, то полученная система сил будет "уравновешенной" и для нее можно составить уравнения статики.

Математически принцип для материальной точки записывается в виде

$$\{\vec{F}, \vec{N}, \vec{\Phi}\} \approx 0. \quad (20.4)$$

В данном случае получена система сил, приложенных в одной точке (система сходящихся сил), уравнения равновесия которых:

в векторной форме $\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0; \quad (20.5)$

в скалярной форме $\sum X_s + \Phi_x = 0; \quad \sum Y_s + \Phi_y = 0; \quad \sum Z_s + \Phi_z = 0. \quad (20.6)$

Нетрудно убедиться, что из написанных уравнений вытекают второй закон Ньютона и дифференциальные уравнения движения точки (после подстановки в (20.5) значения силы инерции (20.1), в (20.6) – проекций сил инерции Φ_x, Φ_y, Φ_z и переноса соответствующих слагаемых в другую часть равенства). Поэтому можно считать, что уравнение (20.5) представляет собой уравнение движения, записанное в форме уравнения равновесия.

Принцип Даламбера часто используется для определения реакций связей при движении или динамических реакций.

Пример 20.1. Груз весом P , подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длиной l , отведен в горизонтальное положение и отпущен без начальной скорости. Определить натяжение нити в зависимости от угла поворота.

Решение

1. Рассматриваем движение груза M , заменяя его материальной точкой и изображая в произвольном положении (рис. 20.4).

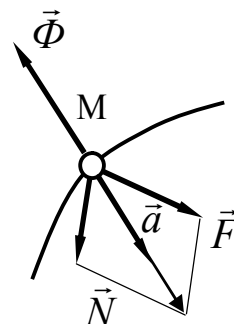


Рис. 20.3

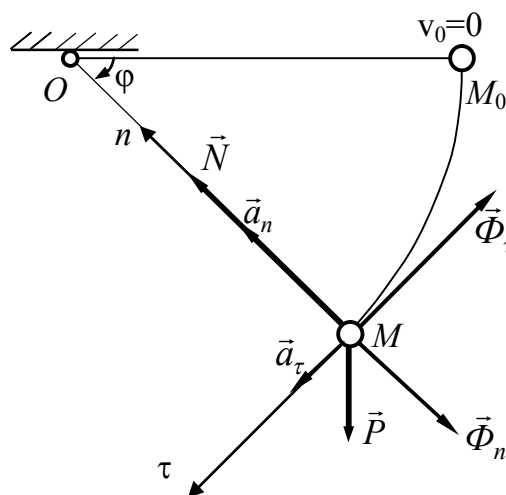


Рис. 20.4

2. Устанавливаем силы, действующие на точку: активная сила \vec{P} , реакция нити \vec{N} .

3. Добавляем к точке силу инерции, раскладывая ее на касательную и нормальную составляющие. Модули составляющих:

$$\Phi_\tau = m \frac{dv_\tau}{dt};$$

$$\Phi_n = m \frac{v^2}{\rho} = m \frac{v^2}{l},$$

где $\rho = l$ – радиус кривизны траектории точки М.

Касательную и нормальную силы инерции направляем противоположно касательному и нормальному ускорениям.

4. Согласно принципу Даламбера полученная система сил будет "уравновешенной" и для нее можно составить уравнение статики

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n = 0. \quad (\text{а})$$

Проецируя (а) на касательную и главную нормаль, получаем

$$\tau) \quad P \cos \varphi - \Phi_\tau = 0; \quad (\text{б})$$

$$n) \quad -P \sin \varphi + N - \Phi_n = 0. \quad (\text{в})$$

Учитывая значения Φ_τ и Φ_n , находим

$$N = P \sin \varphi + \frac{mv^2}{l}.$$

Для определения скорости в зависимости от угла φ можно проинтегрировать уравнение (б), воспользовавшись заменой:

$$\frac{dv_\tau}{dt} = v_\tau \frac{dv_\tau}{ds} = v_\tau \frac{dv_\tau}{l d\varphi}.$$

После разделения переменных и интегрирования получим

$$\frac{mv^2}{l} = 2P \sin \varphi.$$

В этом случае динамическая реакция нити $N = 3P \sin \varphi$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем $N = 3P$ и динамическая реакция в вертикальном положении в три раза больше статической.

Отметим, что для определения скорости можно было применить теорему об изменении кинетической энергии на перемещение из M_0 в M (использование механики Ньютона):

$$\frac{mv^2}{2} = Pl \sin \varphi, \text{ откуда } \frac{mv^2}{l} = 2P \sin \varphi.$$

Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим движущуюся механическую систему, состоящую из n материальных точек (рис. 20.5).

Выделим точку системы M_s ($s = 1, 2, \dots, n$) и покажем действующие на нее силы: \vec{F}_s – равнодействующая активных сил; \vec{N}_s – равнодействующая реакций связей (в активные силы и реакции связей входят как внешние, так и внутренние силы).

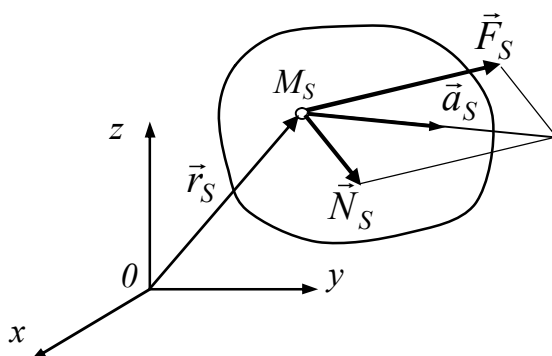


Рис. 20.5

Добавим к каждой точке системы силу инерции $\vec{\Phi}_s = -m_s \vec{a}_s$ (рис. 20.6).

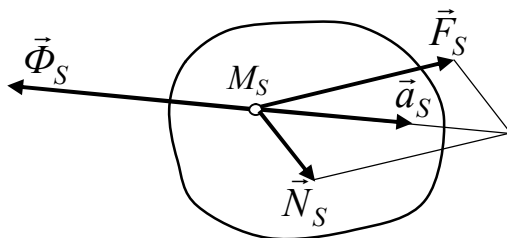


Рис. 20.6

Формулировка принципа:

Если к каждой точке движущейся механической системы в любой момент времени, кроме действующих на нее активных сил и реакций связей, добавить силу инерции, то полученная система сил будет "уравновешенной" и к ней можно применять все уравнения статики.

Математическое выражение принципа:

$$\vec{F}_s + \vec{N}_s + \vec{\Phi}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (20.7)$$

Принцип Даламбера для механической системы выражается совокупностью n векторных равенств, которые эквивалентны уравнениям движения точек системы.

Из статики известно, что если система сил является уравновешенной, то главный вектор этой системы и ее главный момент относительно произвольного центра равны нулю, причем по принципу отвердевания это справедливо как для твердого тела, так и для изменяемой механической системы.

Разделив силы на внешние и внутренние, уравнения статики можно записать в виде

$$\vec{R}^e + \vec{R}^\Phi = 0, \quad (20.8)$$

$$\vec{M}_o^e + \vec{M}_o^\Phi = 0, \quad (20.9)$$

где \vec{R}^e, \vec{R}^Φ – главные векторы внешних сил и сил инерции; учтено, что главный вектор внутренних сил $\vec{R}^i = 0$;

$\vec{M}_o^e, \vec{M}_o^\Phi$ – главные моменты внешних сил и сил инерции относительно произвольного центра, при этом по свойству внутренних сил $\vec{M}_o^i = 0$.

Отметим, что уравнения "равновесия" можно составлять как в целом для механической системы, так и для любой ее части, применяя метод расчленения системы.

Проецируя уравнения (20.8) и (20.9) на оси координат, получим шесть уравнений равновесия для пространственной системы и три уравнения – для плоской системы сил.

Применение принципа Даламбера упрощает процесс составления уравнений движения, так как при этом используются простые методы статики. По существу, уравнения (20.7) представляют уравнения движения точек системы, записанные в форме уравнений равновесия, а выражения (20.8), (20.9) – теоремы об изменении количества движения и кинетического момента системы, записанные в форме уравнений равновесия.

Метод кинетостатики, основанный на принципе Даламбера, широко используется в динамике механизмов при проведении силового расчета и определения сил взаимодействия звеньев механизма друг на друга. Решая задачи о движении твердых тел при помощи принципа Даламбера, приходится добавлять силу инерции в каждой частице тела, и следовательно, возникает задача об упрощении системы сил инерции.

20.3. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

Рассмотрим твердое тело, состоящее из n точек. Добавляя к каждой точке твердого тела силу инерции $\vec{\Phi}_s = -m_s \vec{a}_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$), получаем систему сил инерции (рис. 20.7).

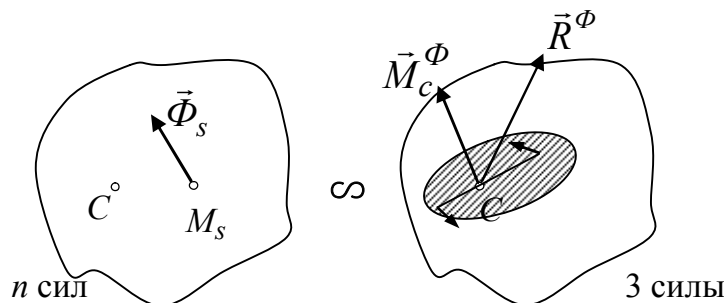


Рис. 20.7

В статике было доказано, что произвольная система сил, действующих на тело, всегда эквивалентна силе и паре сил (теорема Пуансо о приведении системы сил к центру). Следовательно, и силы инерции также можно всегда заменить силой и парой сил. За центр приведения в динамике обычно берут центр масс тела. Найдем главный вектор сил инерции \vec{R}^Φ и главный момент \vec{M}_0^Φ в общем случае движения тела, а также в некоторых частных случаях.

Из уравнений $\vec{R}^e + \vec{R}^\Phi = 0$, $\vec{M}_0^e + \vec{M}_0^\Phi = 0$, теорем о движении центра масс $M\vec{a}_c = \vec{R}^e$ и изменения кинетического момента $\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e$ можно записать: $\vec{R}^\Phi = -\vec{R}^e = -M\vec{a}_c$, $\vec{M}_0^\Phi = -\vec{M}_0^e = -\frac{d\vec{K}_0}{dt}$.

Главный вектор сил инерции определяется по ускорению центра масс и массе тела, а главный момент – по кинетическому моменту тела относительно центра.

Рассмотрим частные случаи движения тела.

1. Поступательное движение. Разбив тело на частицы и добавив в каждой из них силы инерции, получим систему параллельных сил, так как ускорения всех точек равны и параллельны. Приняв центр масс за центр приведения (рис. 20.8), получим $\vec{R}^\Phi = -M\vec{a}_c$, $\vec{M}_c^\Phi = 0$.

Главный момент сил инерции равен нулю, так как тело вокруг центра масс не вращается ($\vec{M}_c^e = 0$).

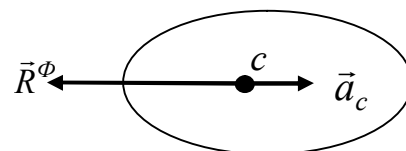


Рис. 20.8

Система сил инерции заменена равнодействующей, равной произведению массы тела на его ускорение, направленной против этого ускорения и приложенной в центре масс.

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости материальной симметрии¹. Пусть тело, имеющее плоскость симметрии Π , вращается вокруг оси C_z , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости Π (рис. 20.9). Поскольку $a_c = 0$, то $\vec{R}^\Phi = 0$.

¹Плоскостью материальной симметрии называется плоскость, относительно которой симметричные точки имеют одинаковые массы.

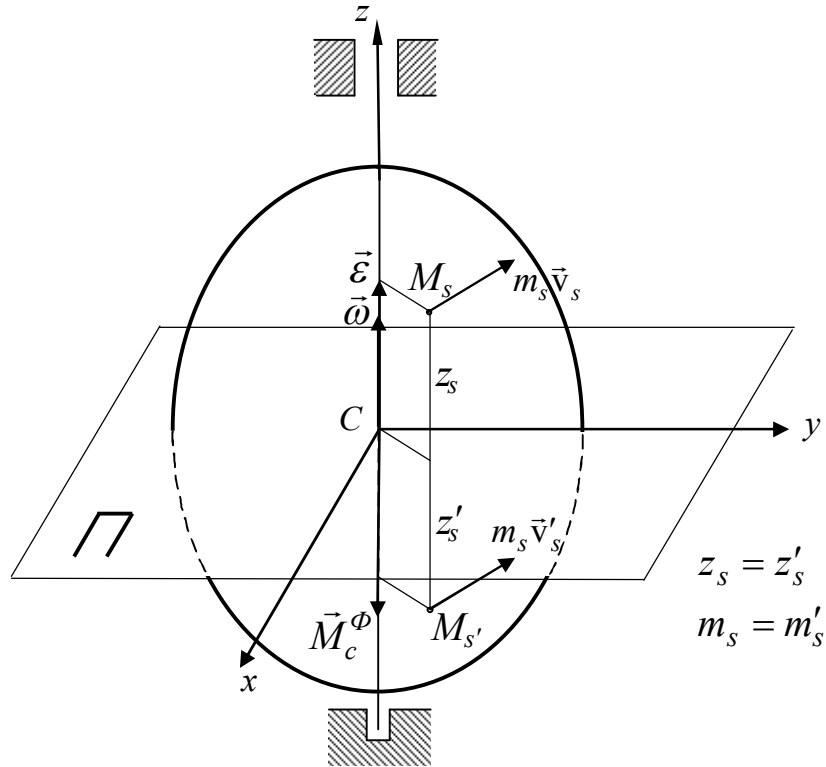


Рис. 20.9

Для нахождения главного момента сил инерции \vec{M}_c^Φ воспользуемся формулой $\vec{M}_c^\Phi = -\frac{d\vec{K}_c}{dt}$, где $\vec{K}_c = K_{cx}\vec{i} + K_{cy}\vec{j} + K_{cz}\vec{k}$. \vec{K}_c – кинетический момент тела относительно центра масс, а K_{cx} , K_{cy} , K_{cz} – относительно координатных осей. Нетрудно видеть, что $K_{cx} = K_{cy} = 0$, так как у симметричных точек M_s и $M_{s'}$ количества движения одинаковы, а моменты их относительно осей C_x и C_y отличаются лишь знаком. Величина $K_{cz} = I_{cz}\omega$ – кинетический момент относительно оси вращения.

В этом случае $\vec{M}_c^\Phi = -J_{cz} \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = -J_{cz} \cdot \varepsilon \cdot \vec{k} = -J_{cz} \cdot \vec{\varepsilon}$.

При вращении тела, имеющего плоскость симметрии, вокруг неподвижной центральной оси, перпендикулярной этой плоскости, силы инерции приводятся к паре сил, расположенной в плоскости симметрии; момент этой пары равен главному моменту сил инерции относительно оси вращения

$$M_{cz} = J_{cz} \varepsilon.$$

Замечание

1. Если тело вращается вокруг оси симметрии, то силы инерции также приводятся к одной паре, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 20.10).

Пример

$$\vec{M}_c^\Phi = -J_{cz} \vec{\varepsilon}.$$

2. Пусть ось вращения перпендикулярна плоскости материальной симметрии и не проходит через центр масс (рис. 20.11).

В качестве центра приведения выберем точку O . Силы инерции приводятся к силе и паре:

$$\vec{R}^\Phi = -M \vec{a}_c; \quad \vec{M}_o^\Phi = -J_{oz} \vec{\varepsilon},$$

где J_{oz} – момент инерции тела относительно оси OZ .

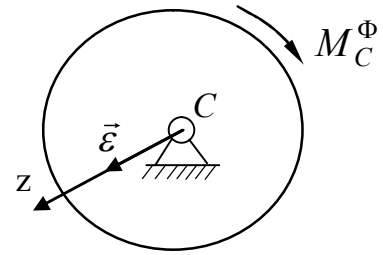


Рис. 20.10

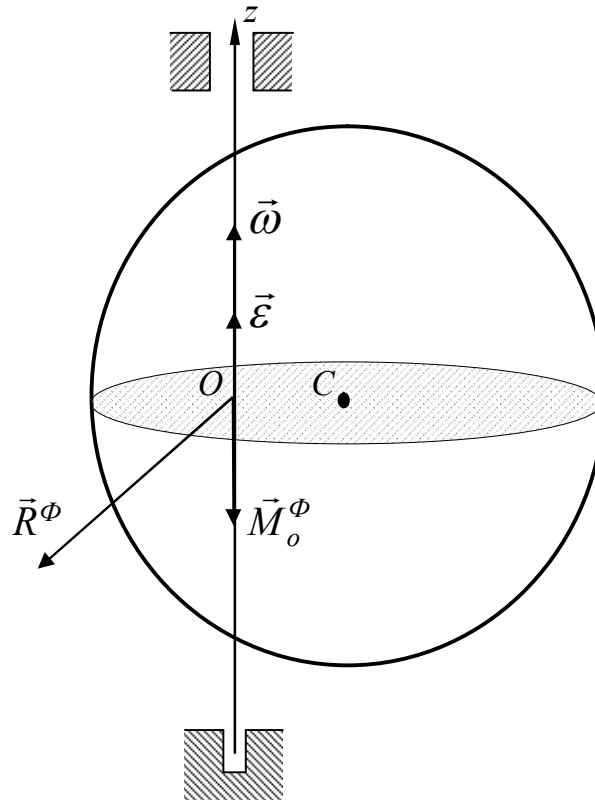


Рис. 20.11

На рис. 20.12 показаны различные случаи приведения сил инерции точек стержня длиной l и массой m , вращающегося в вертикальной плоскости; на рис. 20.12,а показаны силы инерции; на рис. 20.12,б центр приведения сил инерции – точка C – центр масс стержня; на рис. 20.12,в центр приведения – точка O – точка подвеса; на рис. 20.12,г центр приведения – точка D , находящаяся на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от точки O (пара сил инерции и сила \vec{R}_r^Φ приведены к одной силе).

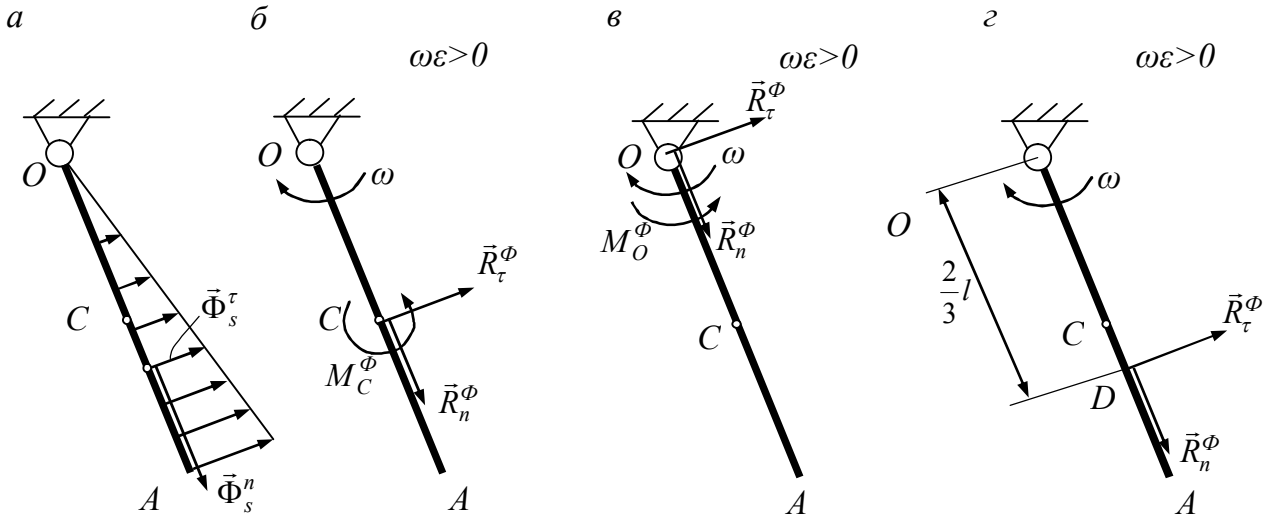


Рис. 20.12

Значения главного вектора и главного момента сил инерции:

$$R_{\tau}^{\Phi} = m \frac{l}{2} \varepsilon; \quad R_n^{\Phi} = m \frac{l}{2} \omega^2; \quad M_C^{\Phi} = \frac{ml^2}{12} \varepsilon; \quad M_O^{\Phi} = \frac{ml^2}{3} \varepsilon; \quad M_D^{\Phi} = 0.$$

Полезно вычислить главный момент сил инерции относительно точки O и убедиться, что во всех случаях он будет одинаков.

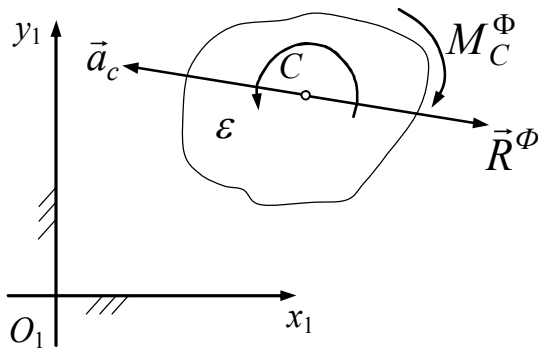


Рис. 20.13

Главный вектор сил инерции точек тела $\vec{R}^{\Phi} = -M\vec{a}_c$ и приложен в центре приведения (центре масс); главный момент перпендикулярен плоскости симметрии:

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -\sum \vec{m}_C(\vec{F}_s^e) = -\vec{M}_C^e = -J_C \varepsilon.$$

Таким образом, система сил инерции в этом случае приводится к силе \vec{R}^{Φ} , приложенной в центре масс, и паре сил, лежащей в плоскости симметрии. Знаки "минус" показывают, что сила \vec{R}^{Φ} направлена против

ускорения центра масс, а момент пары \vec{M}_C^Φ – против углового ускорения.

Замечание. При решении задач обычно вычисляют модули $R^\Phi = Ma_c$ и $M_c^\Phi = J_{cz}\varepsilon$, а направление сил инерции указывают на рисунке.

При решении задач с помощью принципа Даламбера можно рекомендовать следующий план:

- 1) выбрать движущийся объект (точку, механическую систему) и изобразить его в произвольном положении;
- 2) показать активные силы и реакции связей (для механической системы – внешние силы);
- 3) добавить ко всем точкам силы инерции, приводя их к простейшему виду с учетом характера движения тел, входящих в систему. Записать модули сил инерции, указав направление на рисунке;
- 4) составить уравнения равновесия для всей системы или ее части и найти неизвестные величины.

Пример 20.2. Груз массой m_2 поднимается с помощью каната, наматываемого на сплошной цилиндрический вал массой m_1 и радиусом R (рис. 20.14). На вал действует постоянный вращающий момент $M_{вр}$. Пренебрегая сопротивлением и весом каната, определить угловое ускорение вала, натяжение каната и реакции подшипника.

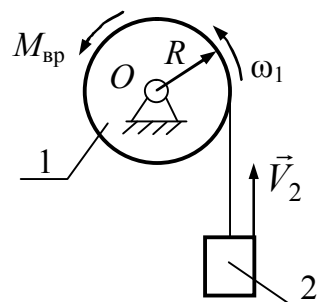


Рис. 20.14

Вал вращается вокруг неподвижной оси, груз, который заменяем материальной точкой, движется прямолинейно. Если ω_1 – угловая скорость вала, то скорость груза $v_2 = R\omega_1$. Аналогично связаны ускорения: $a_2 = R\varepsilon_1$.

Решение

1. Система: вал, канат, груз (рис. 20.15).

2. Внешние силы (активные и реакции связей): $\vec{P}_1, \vec{P}_2, M_{вр}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$.

Натяжение каната будет внутренней силой для системы.

3. Добавляемые силы инерции: для груза $\Phi_2 = m_2a_2 = m_2R\varepsilon_1$; для вала, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости материальной симметрии: $M_O^\Phi = J_{1z}\varepsilon_1 = \frac{m_1R^2}{2}\varepsilon_1$, где

$J_{1z} = \frac{m_1R^2}{2}$. Силы инерции точек каната равны нулю, так как массой каната пренебрегаем.

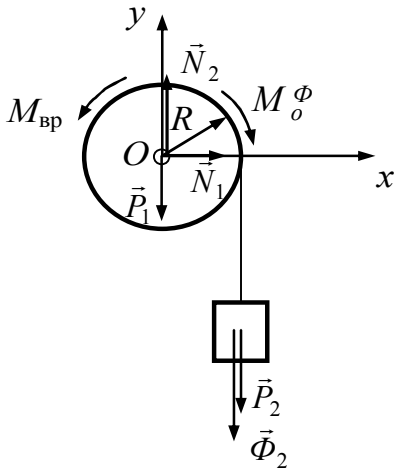


Рис. 20.15

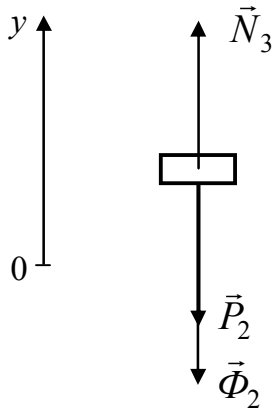


Рис. 20.16

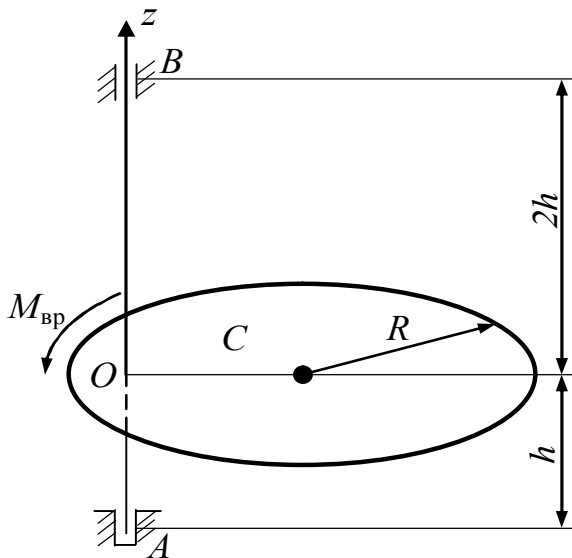


Рис. 20.17

4. Уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\sum X_S = 0; \quad N_1 = 0; \quad (a)$$

$$\sum Y_S = 0; \quad -P_1 - P_2 + N_2 - \Phi_2 = 0; \quad (б)$$

$$\sum m_o = 0 \quad M_{вр} - P_2 R - M_o^\Phi - \Phi_2 R = 0. \quad (в)$$

Подставляя значения сил инерции, находим

$$\varepsilon_1 = \frac{2(M_{вр} - m_2 g R)}{(m_1 + 2m_2)R^2}; \quad N_1 = 0; \quad N_2 = (m_1 + m_2)g + m_2 R \varepsilon_1.$$

Для определения натяжения каната расчленим систему и рассмотрим движение одного груза, (рис. 20.16). На груз действуют силы \vec{P} и \vec{N}_3 . Ускорение груза направлено вверх. Добавленная сила инерции $\Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 R \varepsilon_1$ направлена вниз. Уравнение "равновесия"

$$\sum Y_S = 0; \quad -P_2 + N_3 - \Phi_2 = 0; \quad N_3 = m_2(g + R \varepsilon_1).$$

Конечно, эту задачу можно было решить ранее рассмотренными способами: угловое ускорение ε_1 найти с помощью теоремы об изменении кинетического момента, опорные реакции N_1 и N_2 – с помощью теоремы о движении центра масс системы, N_3 – используя второй закон Ньютона. Принцип Даламбера дает единый метод составления уравнений движения любой механической системы. В этом заключается достоинство данного метода.

Пример 20.3. Однородный круглый диск массой m и радиусом R вращается вокруг вертикальной оси под действием пары сил с моментом $M_{вр}$ (рис. 20.17).

Центр тяжести диска отстоит от оси вращения на расстояние $OC = a$. Определить угловое ускорение диска, реакции подшипника B и подпятника A , если $OB = 2h$, $OA = h$.

Решение

1. Диск с осью (рис 20.18).

2. Внешние силы: \vec{P} , $M_{\text{вр}}$, \vec{A}_1 , \vec{A}_2 , \vec{A}_3 , \vec{B}_1 , \vec{B}_2 (система координат и опорные реакции связаны с вращающимся диском).

3. Силы инерции, приведенные к центру масс: $\Phi_c^\tau = ma\varepsilon$ – касательная составляющая главного вектора сил инерции; $\Phi_c^n = ma\omega^2$ – нормальная составляющая главного вектора сил инерции; $M_c^\Phi = J_{cz}\varepsilon = \frac{mR^2}{2}\varepsilon$ –

главный момент сил инерции относительно центра масс.

4. Уравнения равновесия для произвольной системы сил:

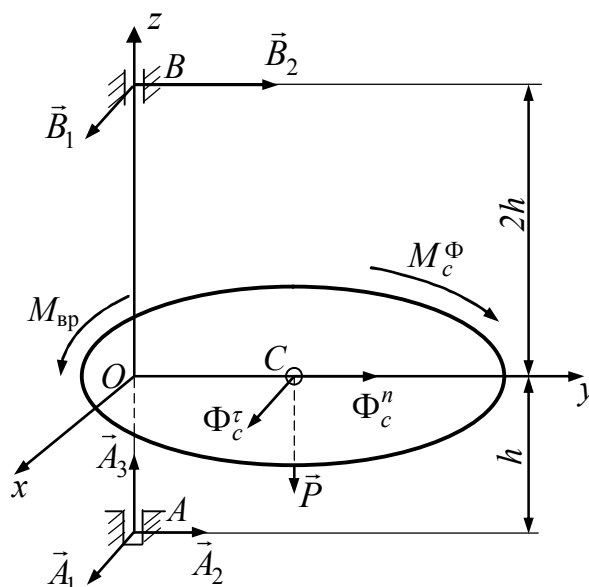


Рис. 20.18

$$\sum X_S = 0; \quad A_1 + B_1 + \Phi_c^\tau = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum Y_S = 0; \quad A_2 + B_2 + \Phi_c^n = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum Z_S = 0; \quad A_3 - mg = 0; \quad (\text{в})$$

$$\sum m_x = 0; \quad -mga + A_2h - B_22h = 0; \quad (\text{г})$$

$$\sum m_y = 0; \quad -A_1h + B_12h = 0; \quad (\text{д})$$

$$\sum m_z = 0; \quad M_{\text{вр}} - M_c^\Phi - \Phi_c^\tau a = 0. \quad (\text{е})$$

Подставляя значения сил инерции, находим

$$\varepsilon = \frac{2M_{\text{вр}}}{m(R^2 + 2a^2)};$$

$$A_1 = -\frac{2}{3}ma\varepsilon; \quad A_2 = -\frac{ma}{3}\left(\frac{g}{h} - 2\omega^2\right); \quad A_3 = mg;$$

$$B_1 = -\frac{1}{3}ma\varepsilon; \quad B_2 = -\frac{ma}{3}\left(\frac{g}{h} + \omega^2\right).$$

Пример 20.4. Тонкий однородный стержень OA массой m и длиной l вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис 20.19). Определить реакцию шарнира и силу упругости пружины, при которой угол α остается постоянным.

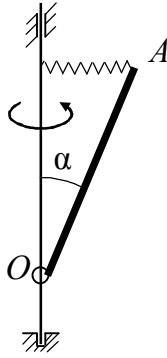


Рис. 20.19

В данной задаче основное внимание следует обратить на приведение сил инерции точек стержня к простейшему виду, учитывая, что масса стержня равномерно распределена по всей длине (рис. 20.20).

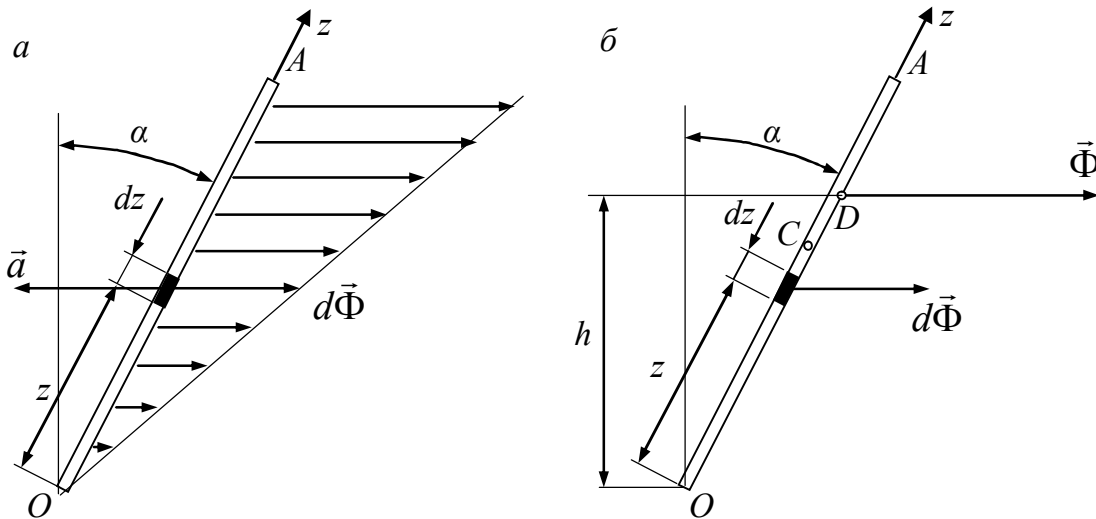


Рис. 20.20

Направим вдоль стержня ось z и выделим элементарный участок стержня dz .

Масса выделенного элементарного участка $dm = \frac{P}{gl} dz$. При равномерном вращении стержня ускорение выделенного элемента равно нормальной составляющей $a = z \sin \alpha \omega^2$. Тогда элементарная сила инерции

$$d\Phi = dma = \frac{P}{gl} z \sin \alpha \omega^2 dz.$$

Нетрудно видеть, что ускорения точек стержня распределены по линейному закону, а силы инерции, приложенные к точкам стержня, представляют систему параллельных сил (рис. 20.20, а). Эта система сил имеет равнодействующую, равную их сумме. Выполняя предельный переход,

устремляя длину каждого элемента к нулю, а их число к бесконечности, получаем значение равнодействующей сил инерции:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^l \frac{P}{gl} \sin \alpha \omega^2 z dz = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2;$$

$$\Phi = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2.$$

Следует отметить, что ускорение центра масс стержня $a_c = \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2$ и равнодействующая равна главному вектору сил инерции.

Для определения точки приложения равнодействующей сил инерции воспользуемся теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно точки O : $\Phi h = \int d\Phi z \cos \alpha$, где в левой части записан момент равнодействующей относительно точки O , а в правой части – сумма моментов элементарных сил инерции относительно этой же точки. Подставляя Φ и $d\Phi$, получим

$$\frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2 h = \int_0^l \frac{P}{gl} \sin \alpha \cos \alpha \omega^2 z^2 dz,$$

отсюда $h = \frac{2}{3} l \cos \alpha$, т.е. равнодействующая приложена в точке D на расстоянии $\frac{2}{3} l$ от точки O .

Дальнейшее решение задачи выполняется согласно плану.

1. Система: стержень OA (рис. 20.21).

2. Внешние силы: \vec{P} , $\vec{F}_{\text{упр}}$, \vec{O}_1 , \vec{O}_2 .

3. Сила инерции Φ , приложенная в точке D , $\Phi = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2$;

$$h = \frac{2}{3} l \cos \alpha.$$

4. Уравнения "равновесия" для плоской системы сил:

$$\sum X_S = 0; \quad -F_{\text{упр}} + O_1 + \Phi = 0; \quad (\text{a})$$

$$\sum Y_S = 0; \quad -P + O_2 = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum m_0 = 0; \quad -P \frac{l}{2} \sin \alpha + F_{\text{упр}} l \cos \alpha - \Phi \frac{2}{3} l \cos \alpha = 0. \quad (\text{в})$$

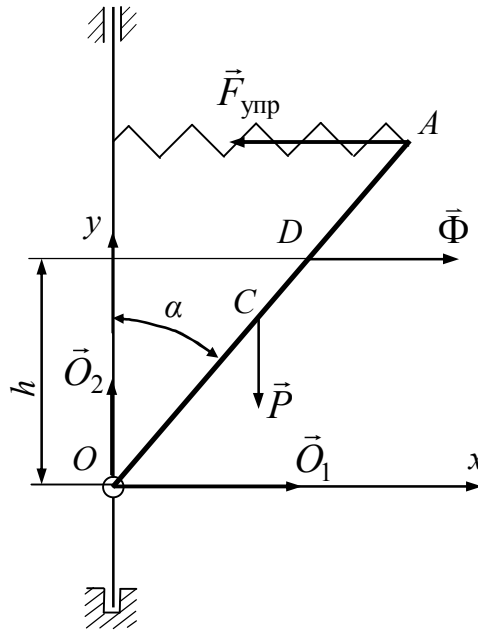


Рис. 20.21

Из уравнения (в) находим силу упругости:

$$F_{\text{упр}} = \frac{1}{2} P \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{3} \frac{Pl}{g} \sin \alpha \omega^2 = mg \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} + \frac{l \omega^2}{3g} \right) \sin \alpha.$$

Составляющие реакции в точке O:

$$O_1 = \frac{1}{6} mg \left(\frac{3}{\cos \alpha} - \frac{l \omega^2}{g} \right) \sin \alpha, \quad O_2 = mg.$$

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что с помощью принципа Даламбера наиболее просто решаются те задачи, в которых нужно найти либо реакции связей, либо ускорения движущихся точек и тел. Большая практическая ценность принципа Даламбера, или метода кинестатики, заключается в том, что, пользуясь силами инерции, можно придать уравнениям динамики форму уравнений статики, что позволяет пользоваться при решении динамических задач простыми методами статики.

Вопросы для самопроверки

1. Как направлена сила инерции для материальной точки, движущейся прямолинейно и замедленно?
2. Как направлена сила инерции материальной точки при равномерном движении по криволинейной траектории?
3. С каким ускорением должен двигаться вниз лифт, чтобы человек, находящийся в нем, не оказывал давления на пол, т.е. был в состоянии невесомости?
4. Сформулируйте принцип Даламбера для механической системы.
5. Учитываются ли внутренние силы в принципе Даламбера для механической системы?
6. На какие колеса (передние или задние) оказывает большее давление автомобиль: а) при ускоренном движении, б) при торможении?
7. Как определяется главный вектор и главный момент сил инерции для твердого тела?

Глава 21. Моменты инерции твердого тела. Определение динамических реакций подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси

21.1. Центробежные моменты инерции

При изучении динамики вращательного движения твердого тела было введено понятие о моменте инерции тела относительно оси как величине, характеризующей распределение массы в теле и являющейся мерой инерции тела во вращательном движении.

Однако момент инерции тела относительно оси, или осевой момент инерции, не характеризует полностью инертные свойства вращающегося тела, в чем легко убедиться на следующем примере. Пусть две материальные точки M_1 и M_2 одинаковой массы прикреплены невесомыми стержнями к вертикальной оси (рис. 21.1).

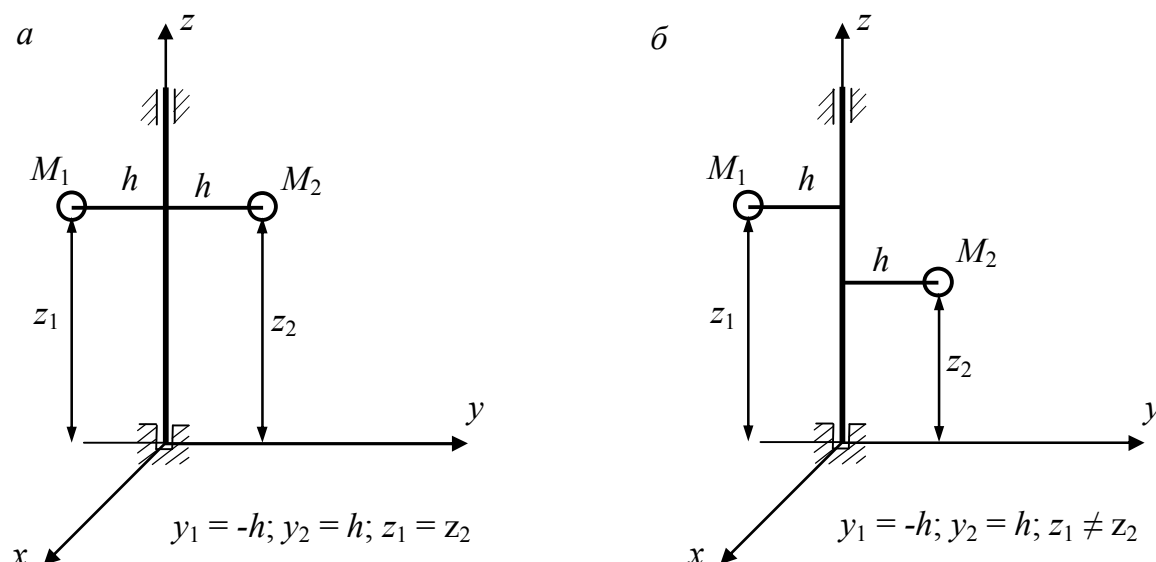


Рис. 21.1

В первом случае (рис. 21.1,а) они расположены симметрично относительно оси z , во втором (рис. 21.1,б) – симметрия нарушена. В обоих случаях осевые моменты инерции относительно оси z будут одинаковы $J_z = 2mh^2$, а распределение масс – различное. При вращении вокруг оси z это будет сказываться в давлении на опоры. Во втором случае будут возникать дополнительные боковые давления на опорные подшипники. Если точки тела расположены относительно оси асимметрично, то приходится пользоваться кроме осевого еще и центробежными моментами инерции тела.

Центробежными моментами инерции тела называются суммы произведений масс точек тела на попарные произведения их координат. Будем обозначать центробежные моменты инерции через J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} . Тогда $J_{xy} = \sum m_s x_s y_s$, $J_{yz} = \sum m_s y_s z_s$, $J_{zx} = \sum m_s z_s x_s$ или, в случае непрерывного распределения масс в теле, $J_{xy} = \int xy dm$, $J_{yz} = \int yz dm$, $J_{zx} = \int zx dm$. А поскольку $dm = \rho dx dy dz$, где ρ – плотность тела, постоянная для однородного тела и являющаяся функцией координат точки $\rho = \rho(x, y, z)$ для неоднородного тела, то

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_{(V)} \rho(x, y, z) xy dx dy dz; & J_{yz} &= \int_{(V)} \rho(x, y, z) yz dx dy dz; \\ J_{zx} &= \int_{(V)} \rho(x, y, z) zx dx dy dz. \end{aligned}$$

Обратим внимание на следующее положение: осевые моменты инерции – существенно положительные величины, отличные от нуля; центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Так, в примере, рассмотренном выше, $J_{yz} = m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2$. В первом случае (а) $J_{yz} = 0$, во втором (б) $J_{yz} \neq 0$.

Зная моменты инерции тела относительно координатных осей и центробежные моменты, можно найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через начало координат.

21.2. Момент инерции тела относительно оси заданного направления

Возьмем точку О за начало координат и проведем ось Оv, составляющую с осями координат углы α , β , γ (рис. 21.2). Зная величины J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} , вычислим момент инерции тела относительно оси Оv.

Момент инерции произвольной точки M_s тела с координатами x_s , y_s , z_s и массой m_s относительно оси Оv равен $m_s h_s^2$, где $h_s = M_s N_s$ – длина перпендикуляра, опущенного из M_s на Оv.

Момент инерции всего тела относительно оси Оv:

$$J_v = \sum m_s h_s^2. \quad (21.1)$$

Выразим h_s через координаты точки и углы α , β , γ . Из прямоугольного треугольника $ON_s M_s$ имеем

$$h_s^2 = OM_s^2 - ON_s^2,$$

где $OM_s^2 = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2$, $ON_s = x_s \cos \alpha + y_s \cos \beta + z_s \cos \gamma$.

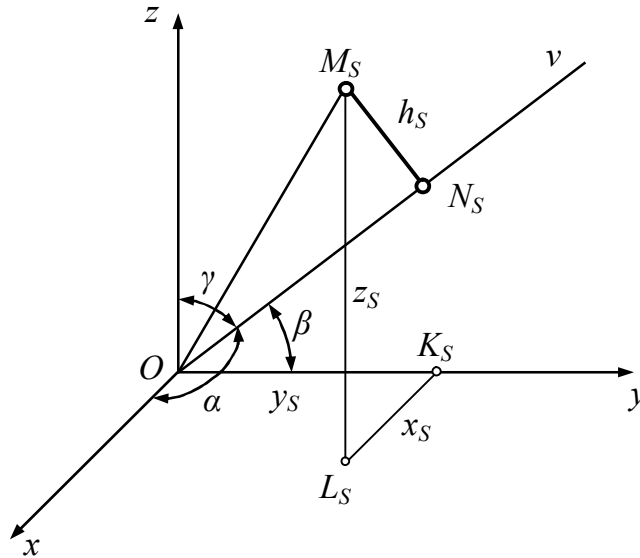


Рис. 21.2

Подставляя значения OM_S и ON_S в выражение для h_S , получаем

$$h_S^2 = (x_S^2 + y_S^2 + z_S^2) - (x_S \cos \alpha + y_S \cos \beta + z_S \cos \gamma)^2.$$

Умножая первую скобку на выражение $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, подставляя значения h_S^2 в формулу (21.1), после несложных преобразований получаем выражение момента инерции относительно оси Ov:

$$J_v = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (21.2)$$

Такова формула для момента инерции тела относительно оси данного направления. Пользуясь ею, можно найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку O , если задано направление этой оси и известны моменты инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке O , и соответствующие этим осям центробежные моменты инерции.

Следовательно, для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат (точку O), достаточно задать направляющие косинусы оси и найти шесть величин — три осевых и три центробежных момента инерции тела.

Совокупность шести величин J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} образует симметричный тензор второго ранга, называемый *тензором инерции тела*. Использование тензора инерции при определении момента инерции тела относительно произвольной оси подробно рассмотрено в [1]. Тензорные величины играют большую роль в современной механике. Изучением правил действия над тензорами занимается тензорный анализ.

Замечание. Если начало координат взять в центре масс тела, то формула (21.2) вместе с теоремой Гюйгенса о зависимости моментов инерции тела относительно параллельных осей позволяют найти момент инерции тела относительно любой оси, как угодно ориентированной в пространстве и проходящей через любую точку.

21.3. Эллипсоид инерции

Для каждой оси, проходящей через начало координат, направляющие косинусы имеют свое определенное значение, поэтому моменты инерции тела относительно этих осей будут различны.

Выясним характер изменения момента инерции тела при изменении направления оси.

Для этого отложим на каждой оси от точки O отрезок, равный $\frac{1}{\sqrt{J_v}}$, где J_v – момент инерции тела относительно соответствующей оси, вычисленный по формуле (21.2). Пусть отрезок, построенный на оси Ov , есть $OA = \frac{1}{\sqrt{J_v}}$ (рис. 21.3). Обозначим координаты конца этого отрезка через x, y, z . Тогда $x = OA \cos \alpha$, $y = OA \cos \beta$, $z = OA \cos \gamma$. Отсюда

$$\cos \alpha = \sqrt{J_v} x, \cos \beta = \sqrt{J_v} y, \cos \gamma = \sqrt{J_v} z.$$

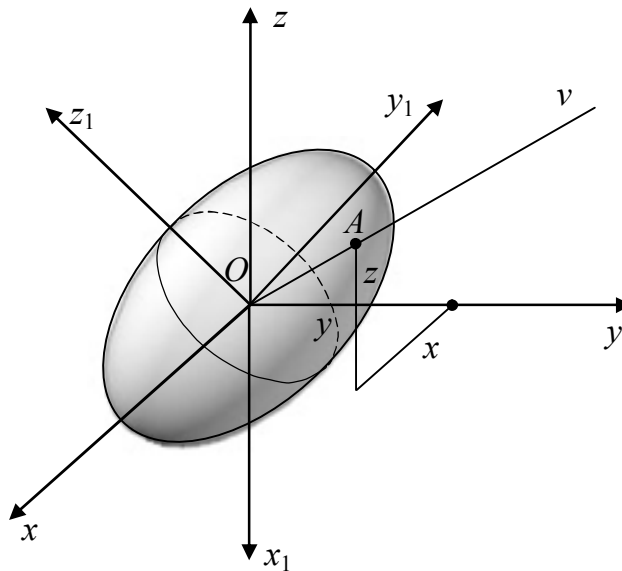


Рис. 21.3

Подставляя эти значения направляющих косинусов в (21.2) и сокращая обе части на J_v , получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = 1. \quad (21.3)$$

Таково уравнение поверхности, на которой лежат концы отложенных отрезков. Это поверхность второго порядка, не имеющая бесконечно удаленных точек, так как радиусы-векторы точек поверхности, равные $\frac{1}{\sqrt{J_v}}$, не могут быть равными ∞ , иначе J_v было бы равно нулю, чего быть не может.

Единственная поверхность второго порядка, не имеющая бесконечно удаленных точек, есть поверхность эллипсоида или, в частном случае, шара.

Таким образом, изменение моментов инерции тела относительно пучка осей, выходящих из точки O , представляется поверхностью эллипсоида (или шара), центр которого совпадает с началом координат, так как уравнение эллипсоида не содержит членов с координатами в первой степени. *Этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции для данного тела в точке O .*

В каждой точке тела можно построить свой эллипсоид инерции, а следовательно, определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через взятую точку, так как он обратен квадрату радиуса-вектора точки пересечения этой оси с поверхностью эллипсоида инерции.

21.4. Главные оси инерции и главные моменты инерции

Каждый эллипсоид имеет три взаимно перпендикулярные оси – оси симметрии. *Эти оси эллипсоида для каждой точки называются главными осями инерции тела для данной точки.*

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции для данной точки называются главными моментами инерции тела для этой точки.

Известно, что если за оси координат взять оси эллипсоида, то его уравнение не будет содержать членов с произведениями координат.

Взяв за оси координат оси Ox_1, Oy_1, Oz_1 (рис. 21.3) эллипсоида инерции тела для данной точки O , получим вместо (21.3) следующее уравнение эллипсоида инерции:

$$J_{x_1} x_1^2 + J_{y_1} y_1^2 + J_{z_1} z_1^2 = 1. \quad (21.4)$$

Поскольку в уравнении отсутствуют члены с произведениями координат, то для главных осей центробежные моменты инерции равны нулю: $J_{x_1 y_1} = 0$; $J_{x_1 z_1} = 0$; $J_{y_1 z_1} = 0$.

Если за оси координат взяты главные оси инерции Ox_1, Oy_1, Oz_1 тела, то формула (21.2) для I_v приобретает вид

$$J_v = J_{x_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1} \cos^2 \beta + J_{z_1} \cos^2 \gamma \quad (21.5)$$

и для нахождения моментов инерции тела относительно осей, проходящих через точку O , достаточно вычислить только три главных момента инерции.

Каждой точке тела соответствует свой эллипсоид инерции. Следовательно, в каждой точке тела имеется три главных оси инерции, совпадающие по направлению с осями эллипсоида инерции.

Эллипсоид инерции, соответствующий центру масс тела, называется центральным эллипсоидом инерции, а его оси – главными центральными осями инерции тела.

Отметим без доказательства некоторые свойства главных осей.

Теорема 1. Главная ось инерции тела для некоторой точки не является главной осью инерции для других своих точек.

Теорема 2. Главная центральная ось инерции является главной осью инерции тела для всех своих точек.

Отметим разницу в свойствах главной и главной центральной осей. Главная центральная ось инерции является главной для всех точек тела, через которые она проходит, а главная нецентральная ось инерции является главной осью инерции только для одной своей точки.

В практике часто приходится находить моменты инерции тел, имеющих либо ось, либо плоскость материальной симметрии.

В этих случаях можно использовать нижеследующие теоремы.

Теорема 3. Если тело имеет ось материальной симметрии, то она является главной осью инерции для всех своих точек.

Теорема 4. Если тело имеет плоскость материальной симметрии, то любая ось, перпендикулярная к ней, будет главной осью инерции тела для точки пересечения оси с плоскостью симметрии.

Пример 21.1. Тонкий однородный стержень AB длиной $2l$ и массой m прикреплен в точке O к вертикальной оси, образуя с ней угол φ (рис. 21.4). Вычислить моменты инерции стержня J_x , J_y и центробежный момент инерции J_{xy} .

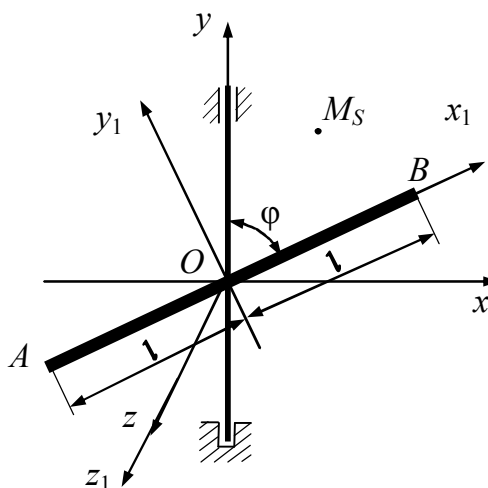


Рис. 21.4

При вычислении моментов инерции относительно осей Ox и Oy воспользуемся формулой (21.2), учитывая,

$$\text{что } J_{x_1} = 0; \quad J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{m(2l)^2}{12} = \frac{ml^2}{3}.$$

Для оси Ox : $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$; $\beta = \pi - \varphi$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Подставляя в (21.2), получаем $J_x = \frac{ml^2}{3} \cos^2 \varphi$.

Для оси Oy : $\alpha = \varphi$; $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$, соответственно $J_y = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \varphi$.

При вычислении J_{xy} воспользуемся выражением $J_{xy} = \sum m_s x_s y_s$, учитывая, что Ox_1 и Oy_1 – главные центральные оси инерции и $J_{x_1 y_1} = \sum m_s x_{s1} y_{s1} = 0$. Координаты произвольной точки M_s в системах $x_1 Oy_1$ и xOy связаны соотношениями:

$$x_s = x_{s1} \sin \varphi - y_{s1} \cos \varphi;$$

$$y_s = x_{s1} \cos \varphi + y_{s1} \sin \varphi.$$

Величина

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_s x_{s1}^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} - \sum m_s y_{s1}^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} = \sum m_s (x_{s1}^2 + z_{s1}^2) \frac{\sin 2\varphi}{2} - \\ &- \sum m_s (y_{s1}^2 + z_{s1}^2) \frac{\sin 2\varphi}{2} = (J_{y1} - J_{x1}) \frac{\sin 2\varphi}{2} = \frac{ml^2}{6} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Пример 21.2. Однородный круглый диск массой M насажен на ось z , проходящую через его центр масс C (рис. 21.5). Ось симметрии диска z_1 лежит в вертикальной плоскости симметрии yCz и образует с осью Cz угол φ . Радиус диска равен r . Вычислить момент инерции диска относительно оси z и центробежные моменты инерции диска J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} .

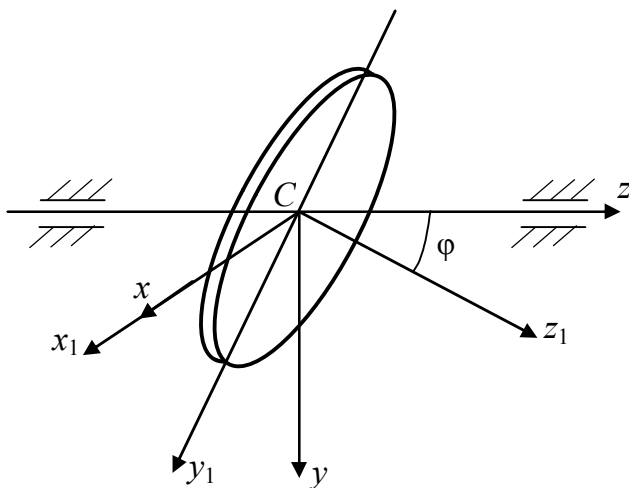


Рис. 21.5

При вычислении момента инерции диска относительно оси Cz воспользуемся формулой (21.2), учитывая, что $J_{z1} = \frac{Mr^2}{2}$;

$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{Mr^2}{4}$; $J_{x_1 y_1} = 0$; $J_{y_1 z_1} = 0$, $J_{z_1 x_1} = 0$, так как оси Cx_1 , Cy_1 , Cz_1 – главные центральные оси инерции.

Для оси Cz $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2} + \varphi$; $\gamma = \varphi$ и значение момента инерции

$$J_z = J_{y_1} \sin^2 \varphi + J_{z_1} \cos^2 \varphi = \frac{Mr^2}{4} \sin^2 \varphi + \frac{Mr^2}{2} \cos^2 \varphi = \frac{Mr^2}{4} (\sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi)$$

Поскольку ось Cx перпендикулярна плоскости материальной симметрии, то центробежные моменты инерции $J_{xy} = 0$, $J_{zx} = 0$. Вычисление величины J_{yz} произведем с использованием выражения $J_{yz} = \sum m_s y_s z_s$, причем связь между координатами точки имеет вид

$$y_s = y_{s_1} \cos \varphi + z_{s_1} \sin \varphi,$$

$$z_s = -y_{s_1} \sin \varphi + z_{s_1} \cos \varphi.$$

Центробежный момент инерции J_{yz} :

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \sum m_s y_s z_s = -\sum m_s y_{s_1}^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} + \sum m_s z_{s_1}^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} = \sum m_s (x_{s_1}^2 + z_{s_1}^2) \frac{\sin 2\varphi}{2} - \\ &- \sum m_s (x_{s_1}^2 + y_{s_1}^2) \frac{\sin 2\varphi}{2} = (J_{y_1} - J_{z_1}) \frac{\sin 2\varphi}{2} = \left(\frac{Mr^2}{4} - \frac{Mr^2}{2} \right) \frac{\sin 2\varphi}{2} = -\frac{Mr^2}{8} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

21.5. Определение динамических реакций подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси

Задача определения реакций подшипников вращающегося тела является одной из важных инженерных задач. В современных машинах угловые скорости вращающихся частей бывают значительными, динамические реакции, зависящие от них, могут быть очень большими, во много раз больше статических. Это вызывает значительную перегрузку подшипников, а также колебания фундаментов, нередко приводит к аварийным ситуациям. Для решения задачи по определению реакций подшипников используем принцип Даламбера.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг вертикальной оси под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 21.6,а).

Будем определять реакции подпятника A и подшипника B , разложив их на составляющие. Оси координат жестко свяжем с вращающимся телом. Расстояния от начала координат до точек A и B обозначим через a и b .

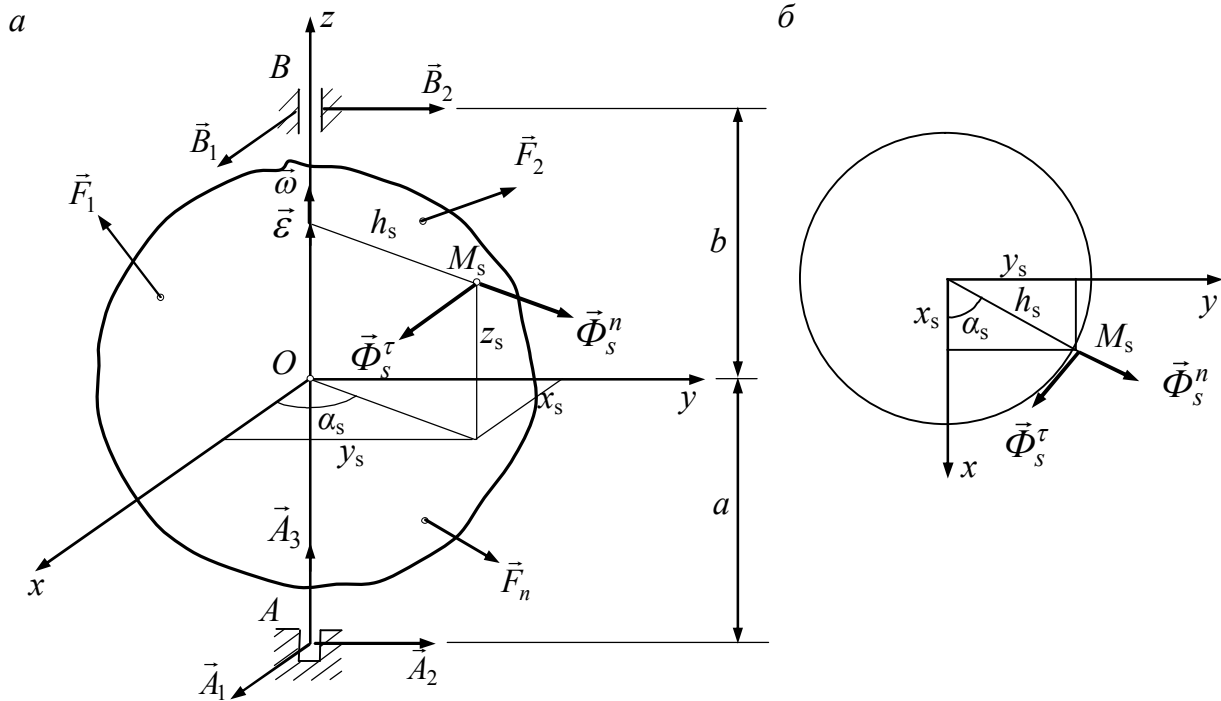


Рис. 21.6

Пусть M_s – произвольная точка тела с координатами x_s, y_s, z_s . Траекторией точки M_s является окружность радиусом h_s . Из Рис. 21.6,б видно, что $x_s = h_s \cos \alpha_s, y_s = h_s \sin \alpha_s$.

Используя формулы для координат центра масс вращающегося тела, запишем

$$Mx_c = \sum m_s x_s, \quad My_c = \sum m_s y_s,$$

где M – масса тела;

x_c, y_c – координаты центра масс в рассматриваемой системе координат.

Отметим, что $J_z = \sum m_s h_s^2$ – момент инерции тела относительно оси z ; $J_{yz} = \sum m_s y_s z_s, J_{zx} = \sum m_s z_s x_s$ – центробежные моменты инерции тела.

Согласно принципу Даламбера добавим к каждой точке тела силу инерции, разложив ее на касательную и нормальную составляющие. Тогда

$$\Phi_s^\tau = m_s a_s^\tau = m_s h_s \varepsilon, \quad \Phi_s^n = m_s a_s^n = m_s h_s \omega^2 \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение тела.

По принципу Даламбера совокупность заданных сил, реакций связей и сил инерции всех точек удовлетворяет уравнениям статики.

Составим шесть уравнений статики:

$$\begin{aligned}\sum X_S &= 0; & \sum X_S + A_1 + B_1 + \sum \Phi_{sx} &= 0; \\ \sum Y_S &= 0; & \sum Y_S + A_2 + B_2 + \sum \Phi_{sy} &= 0; \\ \sum Z_S &= 0; & \sum Z_S + A_3 &= 0; \\ \sum m_x &= 0; & \sum m_x(\vec{F}_s) + A_2 a - B_2 b + \sum m_x(\vec{\Phi}_s) &= 0; \\ \sum m_y &= 0; & \sum m_y(\vec{F}_s) - A_1 a + B_1 b + \sum m_y(\vec{\Phi}_s) &= 0; \\ \sum m_z &= 0; & \sum m_z(\vec{F}_s) + \sum m_z(\vec{\Phi}_s) &= 0.\end{aligned}$$

Вычислим проекции сил инерции и их моменты относительно осей координат.

Проекции сил инерции:

$$\begin{aligned}\sum \Phi_{sx} &= \sum \Phi_{sx}^n + \sum \Phi_{sx}^\tau = \sum m_s h_s \omega^2 \cos \alpha_s + \sum m_s h_s \varepsilon \sin \alpha_s = \\ &= \omega^2 \sum m_s x_s + \varepsilon \sum m_s y_s = M x_c \omega^2 + M y_c \varepsilon; \\ \sum \Phi_{sy} &= \sum \Phi_{sy}^n + \sum \Phi_{sy}^\tau = M y_c \omega^2 - M x_c \varepsilon; \\ \sum m_x(\vec{\Phi}_s) &= \sum m_x(\vec{\Phi}_s^n) + \sum m_x(\vec{\Phi}_s^\tau) = -\sum m_s h_s \omega^2 \sin \alpha_s z_s + \sum m_s h_s \varepsilon \cos \alpha_s z_s = \\ &= -\omega^2 \sum m_s y_s z_s + \varepsilon \sum m_s x_s z_s = -J_{yz} \omega^2 + J_{zx} \varepsilon; \\ \sum m_y(\vec{\Phi}_s) &= \sum m_y(\vec{\Phi}_s^n) + \sum m_y(\vec{\Phi}_s^\tau) = +J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon; \\ \sum m_z(\vec{\Phi}_s) &= \sum m_z(\vec{\Phi}_s^\tau) = -\sum m_s h_s^2 \varepsilon = -J_z \varepsilon.\end{aligned}$$

Система уравнений для определения опорных реакций имеет вид

$$\begin{aligned}\sum X_S + A_1 + B_1 \boxed{+ M x_c \omega^2 + M y_c \varepsilon} &= 0; \\ \sum Y_S + A_2 + B_2 \boxed{+ M y_c \omega^2 - M x_c \varepsilon} &= 0; \\ \sum Z_S + A_3 &= 0; \\ \sum m_x(\vec{F}_s) + A_2 a - B_2 b \boxed{- J_{yz} \omega^2 + J_{zx} \varepsilon} &= 0; \\ \sum m_y(\vec{F}_s) - A_1 a + B_1 b \boxed{+ J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon} &= 0; \\ \sum m_z(\vec{F}_s) - J_z \varepsilon &= 0.\end{aligned}\tag{21.6}$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси Oz , полученное ранее при

помощи теоремы об изменении момента количества движения. Из остальных пяти уравнений находятся составляющие реакций опор.

Опорные реакции имеют статические составляющие, определяемые внешними силами, и динамические составляющие, определяемые силами инерции. Динамические составляющие опорных реакций равны нулю при выполнении следующих условий:

$$x_c = 0, \quad y_c = 0. \quad (21.7)$$

$$I_{yz} = 0, \quad I_{zx} = 0. \quad (21.8)$$

Условия (21.7) указывают, что центр масс тела находится на оси вращения; условия (21.8) – что ось вращения есть главная ось инерции тела для точки O . Следовательно, в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси динамические реакции будут равны нулю, если эта ось есть главная центральная ось инерции тела. Говорят, что в этом случае силы инерции точек тела уравниваются, а само вращающееся тело уравновешено.

Если вращающееся тело не уравновешено, то в технике применяют различные способы балансировки на специальных станках для того, чтобы уравновесить силы инерции точек тела. Способы уравнивания сил инерции вращающихся тел излагаются в курсе теории механизмов и машин.

Рассмотрим некоторые случаи неуравновешенности.

Случай 1. Центр масс тела не лежит на оси вращения, но тело имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси вращения Oz (рис. 21.7).

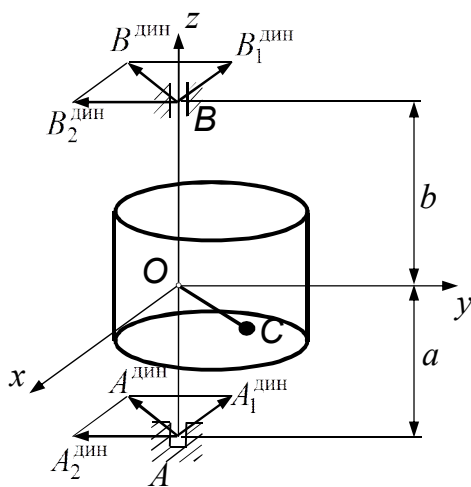


Рис. 21.7

Возьмем оси координат Ox и Oy в плоскости симметрии тела, в этой плоскости находится и центр масс тела. Покажем на рисунке лишь динамические составляющие реакций (статические составляющие, определяемые внешними силами не учитываем).

Поскольку ось Oz – главная ось инерции тела для точки O , то

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0.$$

Решая систему двух последних уравнений из (21.6), находим

$$B_1^{\text{дин}} = \frac{a}{b} A_1^{\text{дин}}, \quad B_2^{\text{дин}} = \frac{a}{b} A_2^{\text{дин}}.$$

Из полученных равенств следует, что полные динамические реакции на опорах A и B , т.е. реакции $A^{\text{дин}}$ и $B^{\text{дин}}$, являются силами параллельными, причем $B^{\text{дин}} = \frac{a}{b} A^{\text{дин}}$.

Равнодействующая этих реакций равна по модулю и противоположна по направлению Φ – главному вектору сил инерции всех точек тела, линия действия которого в этом случае проходит через центр масс тела.

В рассматриваемом случае неуровновешенность тела называется статической, так как обнаружить, что центр масс тела не лежит на оси вращения, можно при помощи статических испытаний.

Случай 2. Центр масс тела лежит на оси вращения, но эта ось не является главной осью инерции тела (рис. 21.8).

Поскольку $x_c = y_c = 0$, то первые два уравнения системы (21.6) обращаются в следующие:

$$A_1^{\text{дин}} + B_1^{\text{дин}} = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} + B_2^{\text{дин}} = 0,$$

т.е. составляющие динамических реакций равны по модулю и направлены в противоположные стороны, поэтому и полные реакции в опорах A и B составляют пару с алгебраическим моментом, равным $A^{\text{дин}}(a + b)$. Модуль

$A^{\text{дин}} = \sqrt{(A_1^{\text{дин}})^2 + (A_2^{\text{дин}})^2}$. Из последних двух уравнений системы (21.6) находим

$$A_1^{\text{дин}} = \frac{1}{a + b} (I_{xz} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon),$$

$$A_2^{\text{дин}} = \frac{1}{a + b} (-I_{xz} \varepsilon + I_{yz} \omega^2).$$

Поэтому момент реактивной пары $M(A^{\text{дин}}, B^{\text{дин}}) = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}$. В рассматриваемом случае тело статически уравновешено, а имеющуюся неуровновешенность называют динамической неуровновешенностью. Динамическую неуровновешенность нельзя обнаружить при помощи статических испытаний, она обнаруживается на специальных стендах и устраняется в технике приемами, описываемыми в курсе теории машин и механизмов.

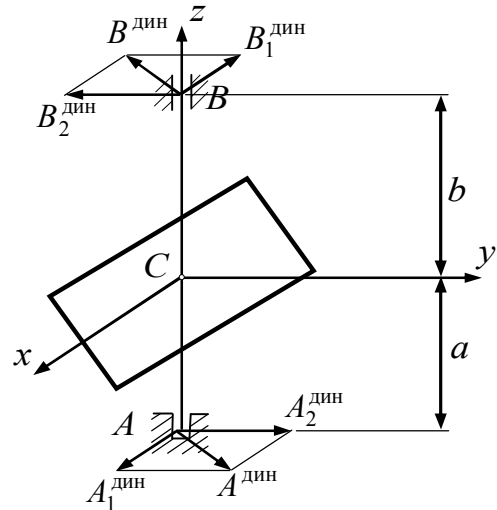


Рис. 21.8

Если центр масс тела не находится на оси вращения и тело не имеет плоскости материальной симметрии, то динамические реакции находятся при помощи общих уравнений (21.6).

Нужно заметить, что часто при решении конкретных задач на определение динамических реакций пользуются не уравнениями (21.6), а непосредственно применяют принцип Даламбера (см. пример 21.3).

Пример 21.3. Центр масс маховика, вес которого P , находится на расстоянии e от горизонтальной оси вращения. Маховик вращается с угловой скоростью, соответствующей n (об/мин). Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения. Расстояния от подшипников A и B до плоскости симметрии равны между собой и равны a . Определить динамические составляющие реакций подшипников (рис. 21.9).

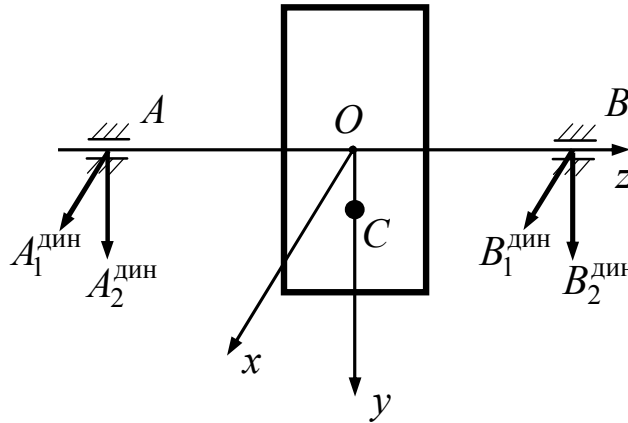


Рис. 21.9

Имеем случай статической неуравновешенности. Взяв точку O пересечения оси вращения с плоскостью симметрии за начало координат системы, жестко скрепленной с маховиком, и выбрав оси, как показано на рисунке, получим

$$x_c = 0, \quad y_c = e, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0.$$

Уравнения (21.6) имеют вид

$$A_1^{\text{дин}} + B_1^{\text{дин}} = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} + B_2^{\text{дин}} + Me\omega^2 = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} a - B_2^{\text{дин}} a = 0,$$

$$A_1^{\text{дин}} a - B_1^{\text{дин}} a = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$A_1^{\text{дин}} = B_1^{\text{дин}} = 0, \quad A_2^{\text{дин}} = B_2^{\text{дин}} = -\frac{Me\omega^2}{2} = -\frac{Pe\pi^2 n^2}{1800g}.$$

Итак, динамические реакции оказались по модулю равными $\frac{Pe\pi^2 n^2}{1800g}$

и, как нетрудно увидеть, непрерывно изменяющимися по направлению в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Пусть $P = 50 \text{ кН}$, $e = 0,5 \text{ мм}$, $n = 3600 \text{ об/мин}$. Произведя вычисления, найдем для динамических реакции значения $A_2^{\text{дин}} = B_2^{\text{дин}} = 181 \text{ кН}$, что превышает статические более чем в семь раз.

Пример 21.4. Маховик малой толщины, который можно принять за тонкий однородный диск, вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей n (об/мин), вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс маховика и образующей угол φ с плоскостью маховика. Вес маховика P , его радиус R . Расстояния между подшипниками и центром маховика одинаковы и равны a . Определить динамические составляющие реакций в подшипниках (рис. 21.10).

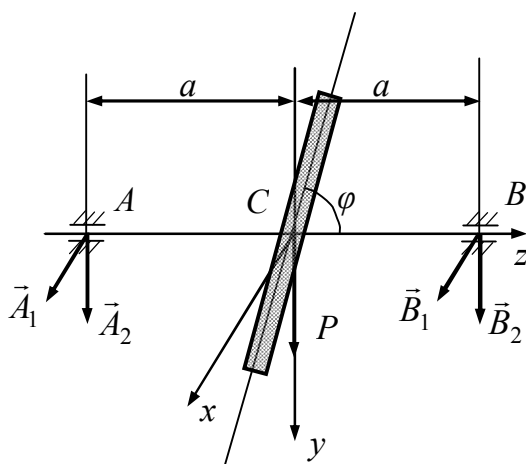


Рис. 21.10

Имеем случай динамической неуравновешенности. Выберем оси координат Cx , Cy , Cz , как показано на рисунке. Тогда координаты центра масс маховика $x_c = y_c = z_c = 0$. Поскольку маховик вращается равномерно, то $\varepsilon = 0$. Ось Cx есть ось симметрии маховика, поэтому $I_{zx} = 0$.

Система уравнений (21.6) для определения динамических составляющих опорных реакций примет следующий вид:

$$A_1 + B_1 = 0; \quad (\text{а})$$

$$A_2 + B_2 = 0; \quad (\text{б})$$

$$A_2 a - B_2 a + I_{yz} \omega^2 = 0; \quad (\text{в})$$

$$-A_1 a + B_1 a = 0. \quad (\text{г})$$

Вычисление центробежного момента инерции I_{yz} рассмотрено в примере 21.2.

$$I_{yz} = -\frac{PR^2}{8g} \sin 2\varphi.$$

Решая полученную систему (а) – (г), находим

$$A_1 = B_1 = 0 ; \quad A_2 = -B_2 = -\frac{PR^2}{16ga} \omega^2 \sin 2\varphi.$$

Опорные реакции в случае неуравновешенности образуют пару сил. Пусть $P = 20$ Н, $R = 20$ см; $n = 12000$ об/мин; $\varphi = 0,04$ рад; $a = 50$ см. Тогда модуль динамических составляющих опорных реакций $A_2 = B_2 = 1280$ Н, что превышает статические составляющие реакций в 128 раз.

Вопросы для самопроверки

1. Как вычислить момент инерции твердого тела относительно нецентральной оси, если известен момент инерции для центральной оси и расстояние между осями?
2. Что нужно знать, чтобы найти момент инерции тела относительно произвольной (центральной) оси?
3. Что называют центробежным моментом инерции тела?
4. Как записать условие, чтобы координатная ось Ox являлась главной осью инерции для начала координат?
5. Что такое статическая и динамическая неуравновешенности твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси?
6. При каких условиях не возникает дополнительных динамических реакций подшипников у вращающегося тела?

Глава 22. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений является основным в аналитической механике. Основы аналитической механики были заложены Эйлером уже в 1736 году в работе "Механика, или наука о движении, изложенная аналитически", посвященной динамике материальной точки. Выдающимся событием в ранней истории этой науки стал выход в свет "Аналитической механики" Лагранжа в 1788 году. Развитие аналитической механики со времен Лагранжа связано с именами многих прославленных математиков. Среди тех, кому принадлежат наиболее фундаментальные открытия в этой области, в первую очередь следует назвать Лапласа, Гамильтона, Остроградского, Якоби, Гаусса и Пуанкаре.

Жозеф Луи Лагранж – французский математик и механик, заложивший основы аналитической механики. Элегантность и внутренняя гармоничность методов "Аналитической механики" вполне оправдывают мнение ирландского математика У.Р. Гамильтона, назвавшего эту книгу научной поэмой.

В предисловии к первому изданию книги Лагранж писал: "Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи".

Аналитическая механика Лагранжа становится ветвью анализа, лишенного каких-либо "механических рассуждений", так как в ней указаны общие методы для составления уравнений любой задачи механики, после чего решение становится чисто математической проблемой.

Механика Лагранжа делится на две части: статику и динамику. Статика у Лагранжа основана на принципе виртуальных (возможных) скоростей, в динамике Лагранж исходит из двух законов: закона инерции и закона сложения движений (по правилу параллелограмма). Аналитическая механика Лагранжа основана на общей формуле, которую сейчас называют уравнением Даламбера-Лагранжа или общим уравнением динамики. Исходя из этого уравнения, Лагранж вывел дифференциальные уравнения



Жозеф Луи Лагранж (1736–1813)

движения в двух видах – это знаменитые уравнения движения Лагранжа первого и второго рода. Уравнения движения второго рода замечательны тем, что для систем, при движении которых не изменяется их полная механическая энергия, эти уравнения можно составить, зная общее выражение только двух величин: кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Число этих уравнений минимально, оно равно числу степеней свободы системы.

Принцип возможных перемещений выражает необходимое и достаточное условие равновесия любой механической системы. Этот принцип также называют принципом виртуальных перемещений, принципом виртуальных работ, принципом возможных скоростей, принципом Лагранжа. Известное из школьного курса физики "золотое правило механики" является частным случаем этого принципа. Прежде чем рассматривать принцип, введем понятие возможного перемещения и расширим наши представления о связях.

22.1. Связи и их классификация

Свободным твердым телом, в частности свободной материальной точкой, как известно из предыдущего, называют тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений. При наличии ограничений тело будет несвободным. Ограничения, налагаемые на положение и скорости точек тела или механической системы, которые должны выполняться при любых действующих силах, называются связями. Итак, *связи – это наперед заданные дополнительные условия геометрического или кинематического характера, которые должны выполняться во время движения, включая и начальный момент времени*. В большинстве случаев связи осуществляются другими телами (шарнирами, опорными поверхностями, нитями и т.д.).

Аналитически связи выражаются равенствами, содержащими время, координаты точки и их производные (скорости). В общем случае уравнение связи для материальной точки имеет вид

$$f\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) = 0. \quad (22.1)$$

Для системы материальных точек в уравнения связей входят координаты и скорости нескольких точек. В зависимости от того, что входит в уравнения, производят классификацию связей.

Если в уравнение связи не входят скорости, т.е. ограничения наложены на положение точки или системы, то связь называют *голономной*.

Ее уравнение имеет вид

$$f(t, x, y, z) = 0. \quad (22.2)$$

Если уравнение связи содержит скорости и не интегрируется, то связь называют *неголономной*.

Если время t не входит явно в уравнение, то связь называют *стационарной*, в противном случае связь является *нестационарной*.

На рис. 22.1 показана материальная точка, которая может двигаться только по поверхности. Пусть уравнение этой поверхности $f(x, y, z) = 0$. Это голономная стационарная связь.

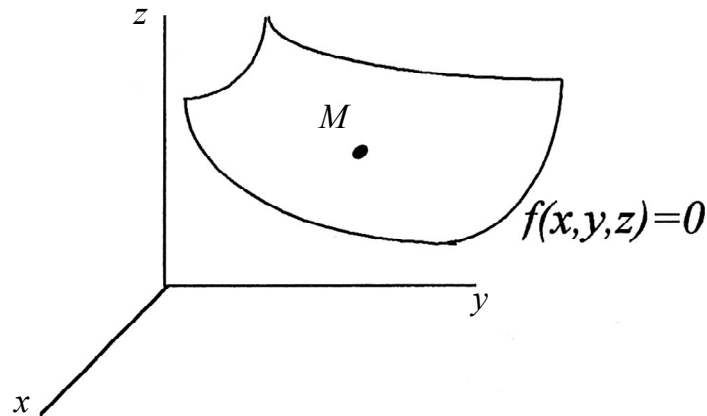


Рис. 22.1

На рис. 22.2 показаны две материальные точки, соединенные стержнем постоянной длины l . Уравнение связи имеет вид

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0.$$

Это голономная стационарная связь.

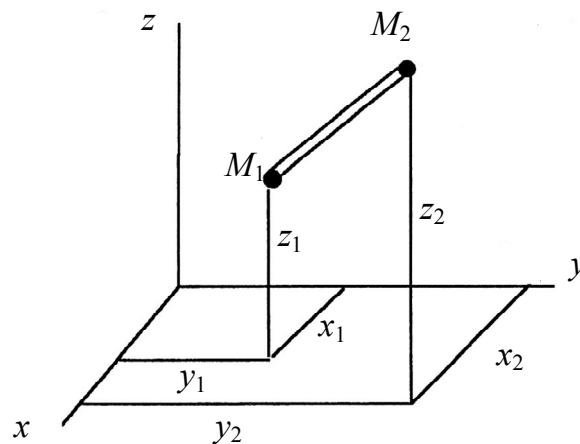


Рис. 22.2

Если длина стержня меняется с течением времени $l = f(t)$, то уравнение связи

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - f^2(t) = 0.$$

Это голономная нестационарная связь.

На рис. 22.3 плоскость $z = 0$ – стационарная связь для точки A , а плоскость $z = vt$ – нестационарная связь для точки B .

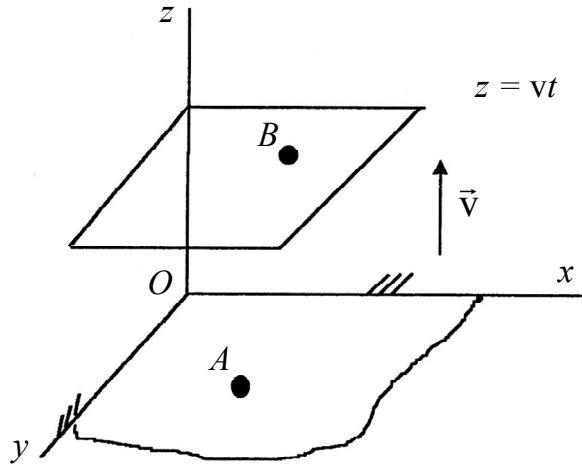


Рис. 22.3

Пусть колесо радиусом R катится без скольжения по горизонтальной поверхности (рис. 22.4). Положение колеса в плоскости xOy определяется координатами x_c, y_c центра колеса C (полюса) и углом поворота φ – колесо совершает плоское движение. Траекторией точки C является горизонтальная прямая $y_c = R$ – голономная связь. Точка касания колеса с поверхностью (т. P) является мгновенным центром скоростей, и ее абсолютная скорость равна нулю: $v_p = v_e - v_r = 0$. Это условие можно записать в виде

$\dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0$. Но данное уравнение интегрируется и приводит к соотношению между координатами x_c и φ в виде

$$x_c - R\varphi = 0.$$

Это голономная стационарная связь.

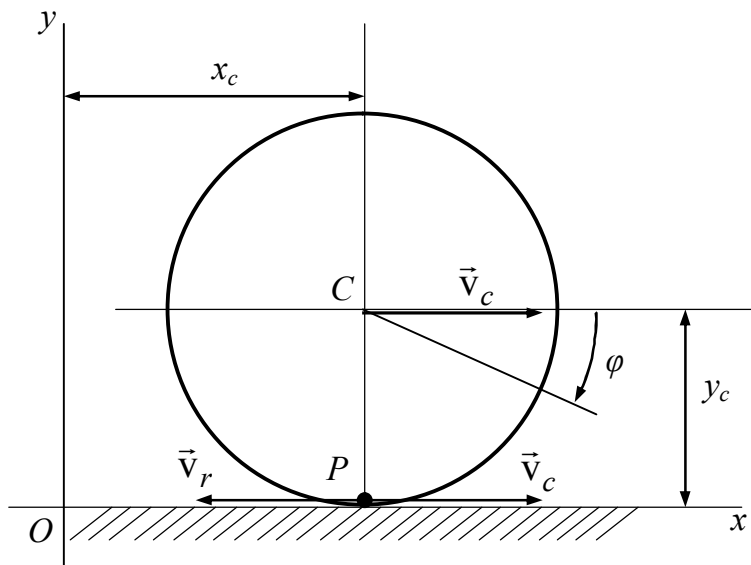


Рис. 22.4

Гладкая горизонтальная плоскость $z = 0$, по которой катится идеально отполированный шар радиусом R , также представляет пример голономной связи (рис. 22.5). При этом центр шара может перемещаться в плоскости, параллельной плоскости xOy , т.е. $z_c = R$ – голономная связь – и вектор скорости точки C должен лежать в этой плоскости. В остальном положения и перемещения шара произвольны, шар может скользить по плоскости или катиться по ней с любым скольжением.

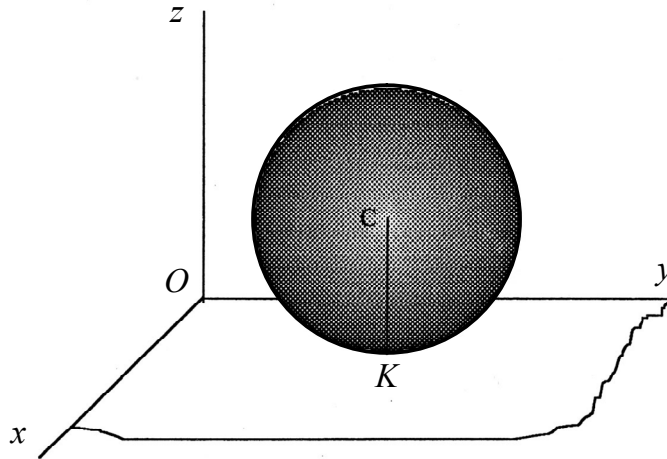


Рис. 22.5

Если шар катится без скольжения по шероховатой поверхности, то возникает дополнительная связь – условие отсутствия скольжения, заключающееся в том, что скорость точки K , которая в данный момент времени соприкасается с плоскостью, равна нулю ($v_K = 0$). Это условие может быть записано в виде равенства

$$\vec{v} + (\vec{\omega} \times \overline{CK}) = 0,$$

где $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость шара.

Учитывая, что проекции вектора \overline{CK} на неподвижные оси $Oxyz$ равны $0; 0; -R$, можно получить в проекциях на оси:

$$\dot{x}_C - R\omega_y = 0 \quad \dot{y}_C - R\omega_x = 0 \quad \dot{z}_C = 0.$$

Последнее уравнение интегрируется и дает голономное условие $z_c = R$. Первые два уравнения неинтегрируемы, что можно проверить, выражая ω_x, ω_y через углы Эйлера ψ, θ, ϕ и их производные по времени. Поэтому первые два уравнения дают пример неголономных связей.

Связи можно делить также на удерживающие (двусторонние) и не удерживающие (односторонние). Связь называется *удерживающей* (двусторонней), если она накладывает ограничения в двух взаимно противоположных направлениях, и *неудерживающей* (односторонней) в противном случае.

На рис. 22.6 приведены примеры удерживающих связей – направляющие для ползуна, стержень для сферического маятника. На рис. 22.7 показаны неудерживающие связи – направляющая для ползуна и нить для сферического маятника.

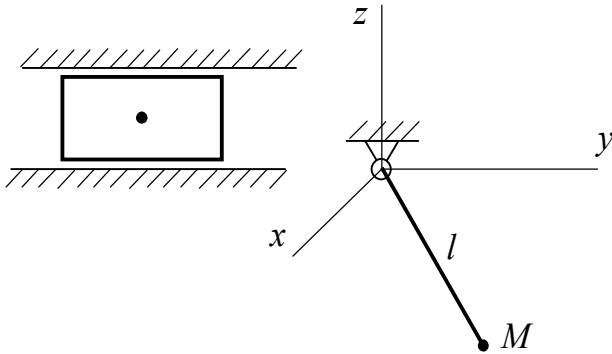


Рис. 22.6

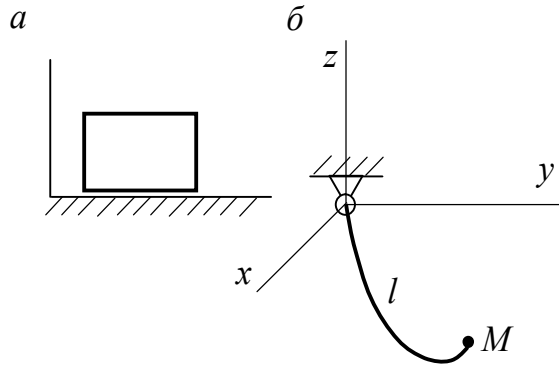


Рис. 22.7

Заметим, что аналитически неудерживающие связи представляют в виде неравенств, показывающих, в какую именно сторону может двигаться освободившаяся от связей точка. Для рис. 22.7 уравнение неудерживающей связи

$$a) \ z \geq 0 \quad \text{и} \quad б) \ x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2.$$

Знак неравенства в первом случае показывает, что ползун может оторваться от поверхности вверх, а точка может сойти со сферической поверхности внутрь ее.

Замечание. Если движение точки или системы ограничено связями, то координаты должны удовлетворять уравнению (22.2). Но эти связи накладывают определенные ограничения на скорости и на ускорения точек, которые должны выполняться независимо от дифференциальных уравнений движения и, следовательно, от приложенных сил. Эти уравнения можно получить, если продифференцировать уравнения (22.2) по времени соответственно один или два раза.

22.2. Возможные или виртуальные перемещения точек механической системы

В динамике рассматривалось действительное перемещение точек под действием приложенных к ним сил.

Пусть точка движется по некоторой криволинейной траектории,

\vec{F} – равнодействующая сил, действующих на точку. Если положение точки определяется радиусом-вектором $\vec{r}(t)$, то элементарное перемещение точки $d\vec{r}$ представляет собой действительное перемещение (рис. 22.8).

Это прямолинейный бесконечно малый отрезок, представляющий дифференциал радиуса-вектора и направленный по касательной к траектории в сторону движения. Проекция действительного перемещения точки $d\vec{r}$ на оси координат (dx , dy , dz) представляют собой дифференциалы координат точки приложения силы \vec{F} . Естественно, что для несвободной точки действительное перемещение совместимо с наложенными на точку или точки системы связями.

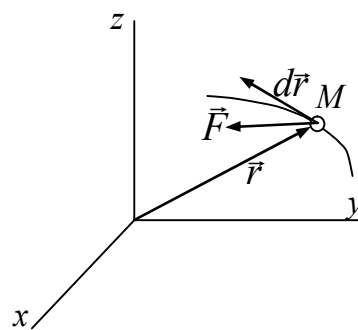


Рис. 22.8

Ясно, что если точка неподвижна (по отношению к рассматриваемой системе отсчета), то ее действительное перемещение равно нулю.

Рассмотрим точку (или механическую систему), на которую наложены ограничивающие ее перемещения связи, и все элементарные перемещения, допускаемые связями. Эти перемещения в отличие от действительного не совершаются фактически за какой-то промежуток времени, а представляют собой множество воображаемых перемещений, которые могли быть сообщены точке в данный момент времени.

Дадим определение: *Возможными или виртуальными перемещениями точек несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения точек системы, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями.*

Возможные перемещения точек системы удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) это воображаемые малые перемещения;
- 2) они не нарушают наложенных связей;
- 3) для нестационарных связей их рассматривают при остановленных связях;
- 4) не зависят от действующих на систему сил (в отличие от действительных, которые определяются действующими силами).

Возможные перемещения точек обозначаются через $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$, модули их – через δs , возможные углы поворота твердых тел – через $\delta\varphi$, $\delta\psi$ и т.д.

Вариации координат δx , δy , δz можно определять как дифференциалы функций, если координаты точек записаны как функции от некоторых параметров.

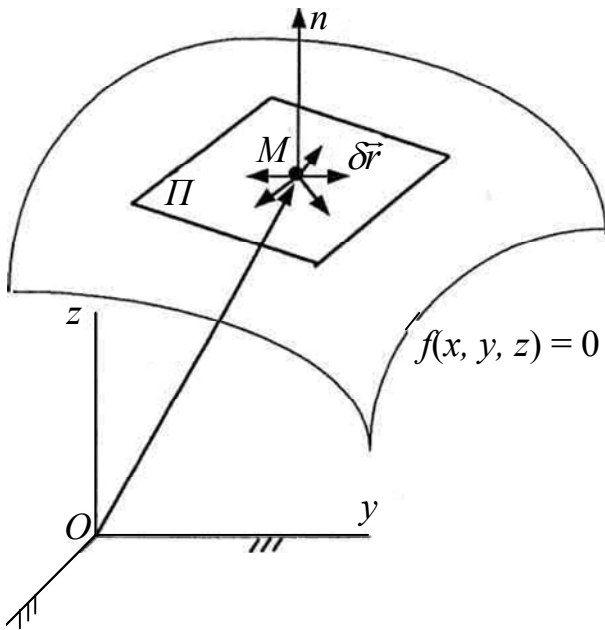


Рис. 22.9

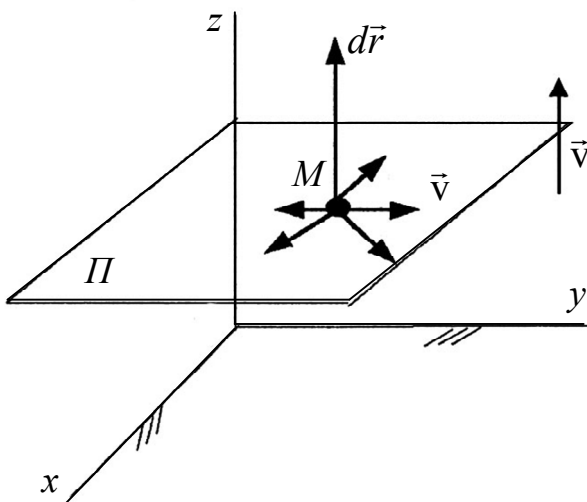


Рис. 22.10

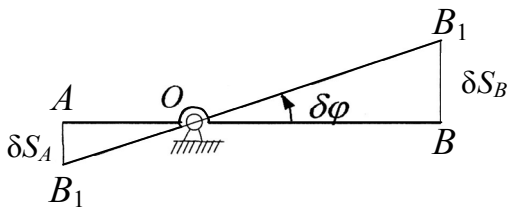


Рис. 22.11

Рассмотрим несвободную материальную точку, которая вынуждена оставаться на неподвижной поверхности, уравнение которой $f(x, y, z) = 0$ (рис. 22.9). Возможные перемещения точки изображаются приращениями радиуса-вектора точки, расположенными в виде веера на плоскости Π , касательной к поверхности в данной точке. Для стационарной связи действительное перемещение точки совпадает с одним из возможных. Для нестационарной связи действительное перемещение не совпадает ни с одним из возможных. На рис. 22.10 показана точка, находящаяся на плоскости $z = vt$ (человек в кабине лифта). Для нестационарной связи действительное перемещение точки направлено вертикально вверх, а возможные перемещения, которые происходят при остановленной плоскости Π , расположены в этой плоскости.

Приведем примеры возможных перемещений. Стержень OA (рис. 22.11) может вращаться вокруг оси, проходящей через точку O , и связь допускает поворот вокруг этой оси. Тогда $\delta\varphi$ – возможное перемещение стержня – вращательное, $\delta S_A = OA\delta\varphi$ и $\delta S_B = OB\delta\varphi$ – возможные перемещения точек A и B .

Заметим, что криволинейные перемещения точек A и B в силу их малости заменяем прямолинейными отрезками.

Кроме того, при действительном движении стержня скорости точек A и B связаны с угловой скоростью известными из кинематики соотношениями $v_A = OA\omega$, $v_B = OB\omega$, т.е. возможные перемещения точек A и B свя-

заны с возможным перемещением стержня как скорости точек с угловой скоростью.

На рис. 22.12 показан диск, находящийся на шероховатой поверхности. Возможное перемещение диска – плоскопараллельное, представляющее поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей.

Возможные перемещения точек A , B , D связаны с перемещением $\delta\varphi$ соотношениями

$$\delta S_A = AP\delta\varphi; \delta S_B = BP\delta\varphi; \delta S_D = DP\delta\varphi.$$

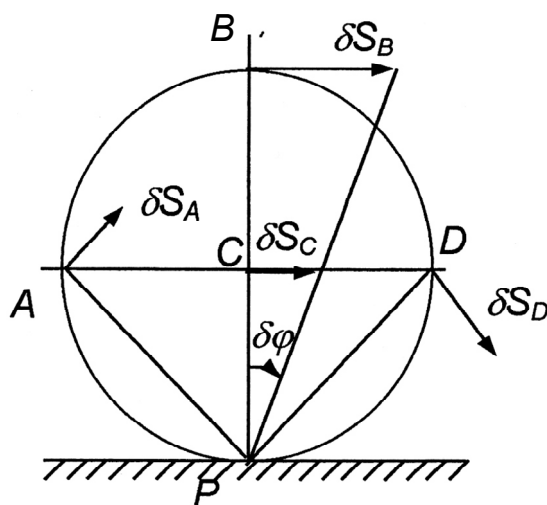


Рис. 22.12

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 22.13) $\delta\varphi$ – возможное перемещение кривошипа; δS_A , δS_B – возможные перемещения точек A и B . Причем $\delta S_A = OA\delta\varphi$ и проекции возможных перемещений точек A и B на прямую AB алгебраически равны, $\text{пр}_{AB}[\delta S_A] = \text{пр}_{AB}[\delta S_B]$ – аналогично проекциям скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки.

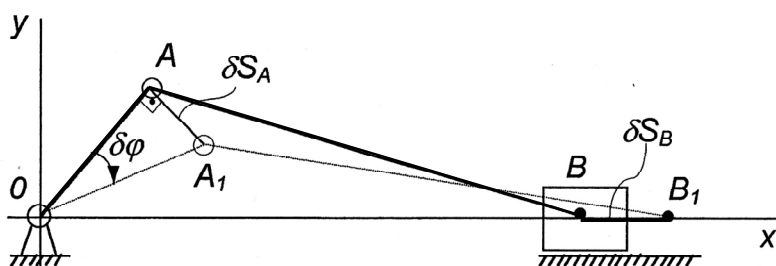


Рис. 22.13

Для возможного или виртуального перемещения можно ввести понятие виртуальной работы силы \vec{F} – это элементарная работа, которую совершает сила на виртуальном перемещении:

$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Отметим, что виртуальная работа обозначается символом δA в отличие от элементарной работы на действительном перемещении $dA = \vec{F} d\vec{r}$.

22.3. Идеальные связи

В статике рассматривались гладкие связи и связи с трением. Реакция гладкой связи была направлена перпендикулярно к поверхности связи (рис. 22.14).

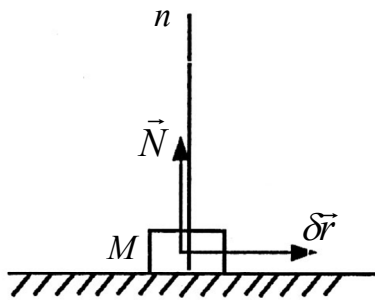


Рис. 22.14

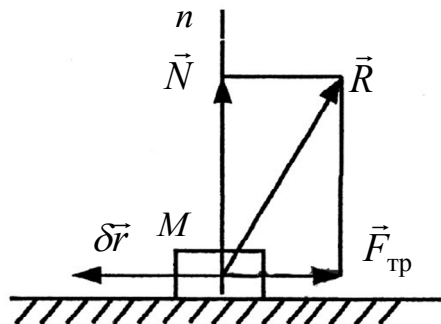


Рис. 22.15

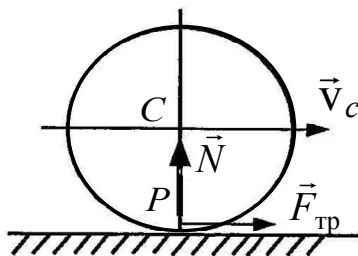


Рис. 22.16

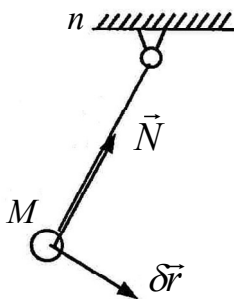


Рис. 22.17

Работа реакции гладкой связи на любом возможном перемещении равна нулю, так как реакция перпендикулярна перемещению точки ее приложения, т.е. $\delta A(\vec{N}) = \vec{N} \delta \vec{r} = 0$.

Для связей с трением (рис. 22.15) работа реакции шероховатой поверхности равна работе силы трения $\delta A(\vec{R}) = \delta A(\vec{F}_{\text{тр}}) = \vec{F}_{\text{тр}} \delta \vec{r}$.

В некоторых случаях работа реакции на любом возможном перемещении для негладких поверхностей также равна нулю. Так при качении без скольжения по шероховатой поверхности (рис. 22.16) работа составляющих реакции \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ на любом виртуальном перемещении равна нулю, поскольку возможное перемещение точки P равно нулю (точка P является мгновенным центром скоростей).

Связи называются идеальными, если сумма элементарных работ реакций связей на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \vec{N}_s \delta \vec{r}_s = 0. \quad (22.3)$$

Таким образом, показанные на рис. 22.14 и 22.16 связи являются идеальными, а шероховатая поверхность на рис. 22.15 – неидеальной связью.

Показанная на рис. 22.17 связь, осуществляемая с помощью невесомой, нерастяжимой нити, является идеальной связью:

$$\vec{N} \delta \vec{r} = |\vec{N}| |\delta \vec{r}| \cos 90^\circ = 0.$$

Реакция направлена вдоль нити, а возможное перемещение составляет прямой угол с реакцией.

22.4. Принцип возможных перемещений

Еще раз отметим, что принцип возможных перемещений выражает условия равновесия точки или механической системы, находящейся под действием активных сил при заданных связях¹.

Прежде всего разделим силы, приложенные к механической системе, на две группы:

- 1) реакции идеальных связей;
- 2) все остальные силы, которые назовем активными. Иногда группу активных сил называют задаваемыми или явными силами.

Формулировка принципа: *Для равновесия несвободной механической системы, на которую наложены идеальные, стационарные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении из положения равновесия равнялась нулю.*

$$\sum \delta A_F = 0 \quad \text{или} \quad \sum \vec{F}_s \delta \vec{r}_s = 0. \quad (22.4)$$

Если скалярное произведение записать через проекции векторов сомножителей (аналитическое выражение элементарной работы), то принцип возможных перемещений запишется в виде

$$\sum (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) = 0. \quad (22.5)$$

Доказательство необходимости. Предполагается, что система с идеальными связями находится в состоянии покоя. Показать, что сумма работ активных сил на любом возможном перемещении из положения равновесия равняется нулю.

Имеем механическую систему, состоящую из n материальных точек. Освободим ее от связей, заменив их реакциями. Тогда каждая точка системы станет свободной и будет находиться в равновесии под действием двух сил – равнодействующей активных сил \vec{F}_s и равнодействующей реакций идеальных связей \vec{N}_s (рис. 22.18). При равновесии системы $\vec{F}_s = -\vec{N}_s$, т.е. силы равны по величине и направлены в противоположные стороны. Сообщим системе возможное перемещение, определяемое совокупностью возможных перемещений точек системы $\delta \vec{r}_s$.

¹ В форме, близкой к современной, но без доказательства, этот принцип высказал знаменитый математик и механик Иоганн Бернулли. Обобщение принципа на случай неудерживающих связей было дано русским математиком и механиком, основателем аналитической механики в России – М.В. Остроградским.

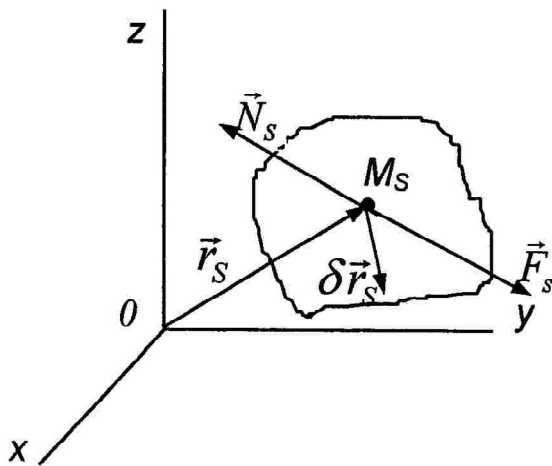


Рис. 22.18

Для рассматриваемой точки M_s вычислим работу активных сил и реакций связей на возможном перемещении:

$$\delta A_F = \vec{F}_s \delta \vec{r}_s + \vec{N}_s \delta \vec{r}_s = (\vec{F}_s + \vec{N}_s) \delta \vec{r}_s = 0,$$

так как выражение в скобках равно нулю.

Составим уравнения для всех точек и просуммируем их. Тогда

$$\sum_s \delta A_F = \sum_s \vec{F}_s \delta \vec{r}_s + \sum_s \vec{N}_s \delta \vec{r}_s = \sum_s (\vec{F}_s + \vec{N}_s) \delta \vec{r}_s = 0,$$

так как каждое слагаемое, входящее в сумму, равно нулю. Поскольку связи идеальные, то $\sum_s \vec{N}_s \delta \vec{r}_s = 0$ и получим

$$\sum_s \vec{F}_s \delta \vec{r}_s = 0 \quad \text{или} \quad \sum_s \delta A_F = 0.$$

Необходимость условия (22.4) доказана.

Доказательство достаточности

Дано: активные силы, приложенные к системе, удовлетворяют условию $\sum_s \vec{F}_s \delta \vec{r}_s = 0$; связи идеальные, т.е. $\sum_s \vec{N}_s \delta \vec{r}_s = 0$. При $t = 0$ (начальный момент времени) система находилась в покое, т.е. $v_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$).

Доказать, что система будет находиться в покое и в дальнейшем, при $t > 0$ $\vec{F}_s = -\vec{N}_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$), т.е. силы, действующие на каждую точку системы, будут уравновешены.

Докажем от противного. Сделаем допущение, что система под действием заданных активных сил выходит из состояния покоя и хотя бы некоторые точки получают скорости, т.е. $\vec{F}_s \neq -\vec{N}_s$. При стационарных связях действительное перемещение каждой точки совпадает с одним из возможных. Применив теорему об изменении кинетической энергии для действительного элементарного перемещения, записываем

$$dT = \sum_s \delta A_F + \sum_s \delta A_N \quad \text{или} \quad dT = \sum_s \vec{F}_s \delta \vec{r}_s + \sum_s \vec{N}_s \delta \vec{r}_s.$$

$\sum_s \vec{N}_s \delta \vec{r}_s = 0$ при идеальных связях и $\sum_s \vec{F}_s \delta \vec{r}_s = 0$ по условию, тогда $dT = 0$ и $T = \text{const}$, т.е. кинетическая энергия остается постоянной. Но в начальный момент времени $t = 0$ $T = 0$ (система находилась в покое) и, следовательно, в любой произвольный момент времени $t > 0$ $T = 0$, что возможно только при скоростях всех точек, равных нулю. Это противоречит сделанному допущению о том, что при $t > 0$ $\vec{F}_s \neq -\vec{N}_s$, т.е. система не находится в равновесии. В действительности, система при таких силах не может выйти из равновесного положения, и при $t > 0$, $\vec{F}_s = -\vec{N}_s$ система находится в равновесии. Достаточность принципа доказана.

Замечания

1. Если среди связей есть неидеальные, то для систем с такими связями также можно применять принцип возможных перемещений. Для этого реакцию неидеальной связи следует отнести к разряду активных сил (например, шероховатую поверхность следует заменить гладкой поверхностью, силу трения по закону Кулона выразить через нормальную реакцию и считать активной силой).

2. Из принципа возможных перемещений можно вывести условия равновесия сил, полученные в статике (равенство нулю главного вектора и главного момента системы сил относительно любого центра $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$).

3. Пользуясь принципом возможных перемещений, можно составлять столько независимых условий равновесия, сколько будет независимых возможных перемещений у изучаемой механической системы (их число равно числу степеней свободы при голономных связях).

Принципом возможных перемещений выгодно пользоваться при решении задач о равновесии системы тел, когда нужно получить условия равновесия без определения реакций связей.

Рассмотрим примеры на использование принципа возможных перемещений.

Пример 22.1. На шарнир B пресса ABC действует заданная сила \vec{P} . Определить силу полезного сопротивления \vec{Q} при равновесии механизма, если задан угол α . Трением пренебречь, учесть, что $AB = BC = l$ (рис. 22.19).

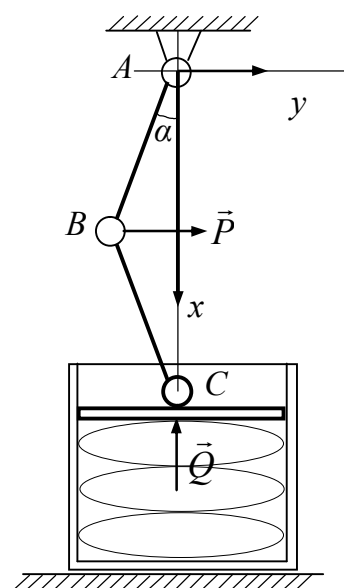


Рис. 22.19

Решение

1. Рассмотрим равновесие прессы.
2. Активные силы \vec{P} , \vec{Q} . Связи – идеальные, от связей не освобождаемся.
3. Воспользуемся принципом возможных перемещений в форме уравнения (22.5).

Для использования последнего выражения составим таблицу, в которую включим проекции активных сил на оси координат, координаты точек приложения сил (уравнения голономных связей для прессы) и вариации этих координат.

\vec{F}_s	X_s	Y_s	x_s	y_s	δx_s	δy_s
\vec{P}	0	$+P$	$l \cos \alpha$	$-l \sin \alpha$	$-l \sin \alpha \delta \alpha$	$-l \cos \alpha \delta \alpha$
\vec{Q}	$-Q$	0	$2l \cos \alpha$	0	$-2l \sin \alpha \delta \alpha$	0

Равенство нулю работы активных сил запишется в виде

$$Q 2l \sin \alpha \delta \alpha - P l \cos \alpha \delta \alpha = 0.$$

Отсюда

$$Q = \frac{1}{2} P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Задачу можно решить, используя принцип в форме (22.4). Для этого нужно было задать механизму прессы возможное перемещение $\delta \alpha$, показать перемещения точек приложения сил δS_B и δS_C , выразив их через $\delta \alpha$. Затем вычислить элементарные работы сил \vec{P} и \vec{Q} и подставить их в (22.4).

Пример 22.2. Балка, состоящая из двух частей, соединенных шарниром C , нагружена силой \vec{P} (рис. 22.20,а). Размеры балки показаны на рисунке. Определить реакцию шарнирно-подвижной опоры B .

Решение. Для определения реакции \vec{R}_B отбросим связь в точке B и заменим ее действие силой \vec{R}_B , переводя ее в разряд активных сил (рис. 22.20,б).

Составная балка ACD нагружена силами \vec{P} , \vec{R}_B , статически эквивалентна исходной балке (находится в равновесии) и имеет одну степень свободы. Сообщим системе возможное перемещение и вычислим работу активных сил:

$$\sum_s \vec{F}_s \delta \vec{r}_s = 0.$$

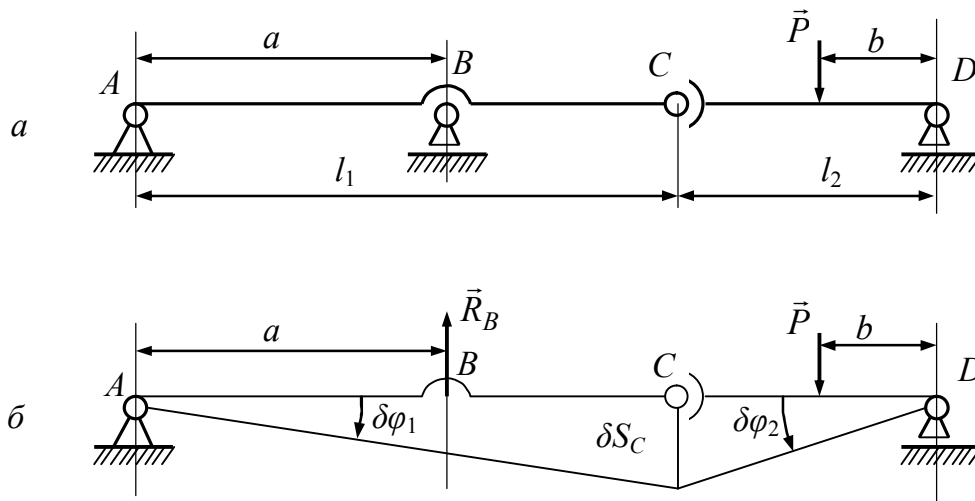


Рис. 22.20

Возможное перемещение балки AC – поворот на угол $\delta\varphi_1$ вокруг неподвижной точки A , причем возможное перемещение точки C – $\delta S_C = AC\delta\varphi_1 = l_1\delta\varphi_1$. Для балки CD связь в точке D допускает горизонтальное перемещение и поворот. Возможное перемещение и поворот балки CD – плоскопараллельное. Восстанавливая перпендикуляры к перемещениям в точках C и D , получаем положение мгновенного центра перемещений для балки CD – точку D . Перемещение балки CD представляет собой поворот на угол $\delta\varphi_2$ вокруг мгновенного центра перемещений и $\delta S_C = CD\delta\varphi_2 = l_2\delta\varphi_2$.

$$\delta S_C = l_1\delta\varphi_1 = l_2\delta\varphi_2; \quad \delta\varphi_2 = \frac{l_1}{l_2}\delta\varphi_1.$$

Сумма работ активных сил

$$-R_B a \delta\varphi_1 + P b \delta\varphi_2 = 0$$

или

$$-R_B a \delta\varphi_1 + P b \frac{l_1}{l_2} \delta\varphi_1 = 0,$$

$$R_B = P \frac{b}{a} \frac{l_1}{l_2}.$$

Пример 22.3. Мост состоит из двух частей, соединенных между собой шарниром C , в точках A и B – шарнирно неподвижные опоры (рис. 22.21,а).

Мост нагружен силами \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , размеры указаны на рисунке. Определить реакцию в точке A .

Решение. Шарнирно-неподвижная опора в точке A имеет две составляющие реакции \vec{A}_1 и \vec{A}_2 . Для определения горизонтальной составляющей \vec{A}_1 заменим опору в точке A на шарнирно-подвижную, заменив действие отброшенной части связи реакцией \vec{A}_1 , переводя ее в разряд активных сил (рис. 22.21,б). Сообщим системе возможное перемещение. Для правой части моста возможное перемещение – поворот на угол $\delta\varphi_2$ вокруг точки B , причем $\delta S_C = BC \delta\varphi_2$.

Возможное перемещение точки A – горизонтальное перемещение.

Тогда при плоскопараллельном перемещении левой части моста мгновенный центр перемещений находится в точке P и левая часть поворачивается на угол $\delta\varphi_1$ вокруг этой точки. В этом случае $\delta S_C = CP\delta\varphi_1$. Учитывая, что $AP = 2h$, $BC = CP$, имеем $\delta S_C = BC \delta\varphi_2 = CP\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$. Приравнявая нулю работу активных сил, имеем (работы вычислены по формуле $\delta A = M_0(\vec{F})\delta\varphi$):

$$P_1 h_1 \delta\varphi_1 - A_1 2h \delta\varphi_1 + P_2 h_2 \delta\varphi_2 = 0.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{P_1 h_1 + P_2 h_2}{2h}.$$

Для определения вертикальной составляющей \vec{A}_2 вновь изменим опору A , как показано на рис. 22.21,в, переводя \vec{A}_2 в разряд активных сил.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что мгновенный центр перемещений левой части моста находится в точке B . Из условия $\delta S_C = BC \delta\varphi_1 = BC \delta\varphi_2$ имеем $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$.

Равенство нулю суммы работ активных сил имеет вид

$$P_1(2l - h_1) \delta\varphi_1 - A_2 2l \delta\varphi_1 + P_2 h_2 \delta\varphi_2 = 0.$$

Отсюда

$$A_2 = \frac{P_1(2l - h_1) + P_2 h_2}{2l}.$$

Предлагается оценить преимущества этого метода по сравнению с методами геометрической статики, с помощью которых может быть решена задача.

В заключение отметим: принцип возможных перемещений можно применять не только для решения задач статики, им можно пользоваться для решения задач динамики. Для этого его нужно объединить с принципом Даламбера.

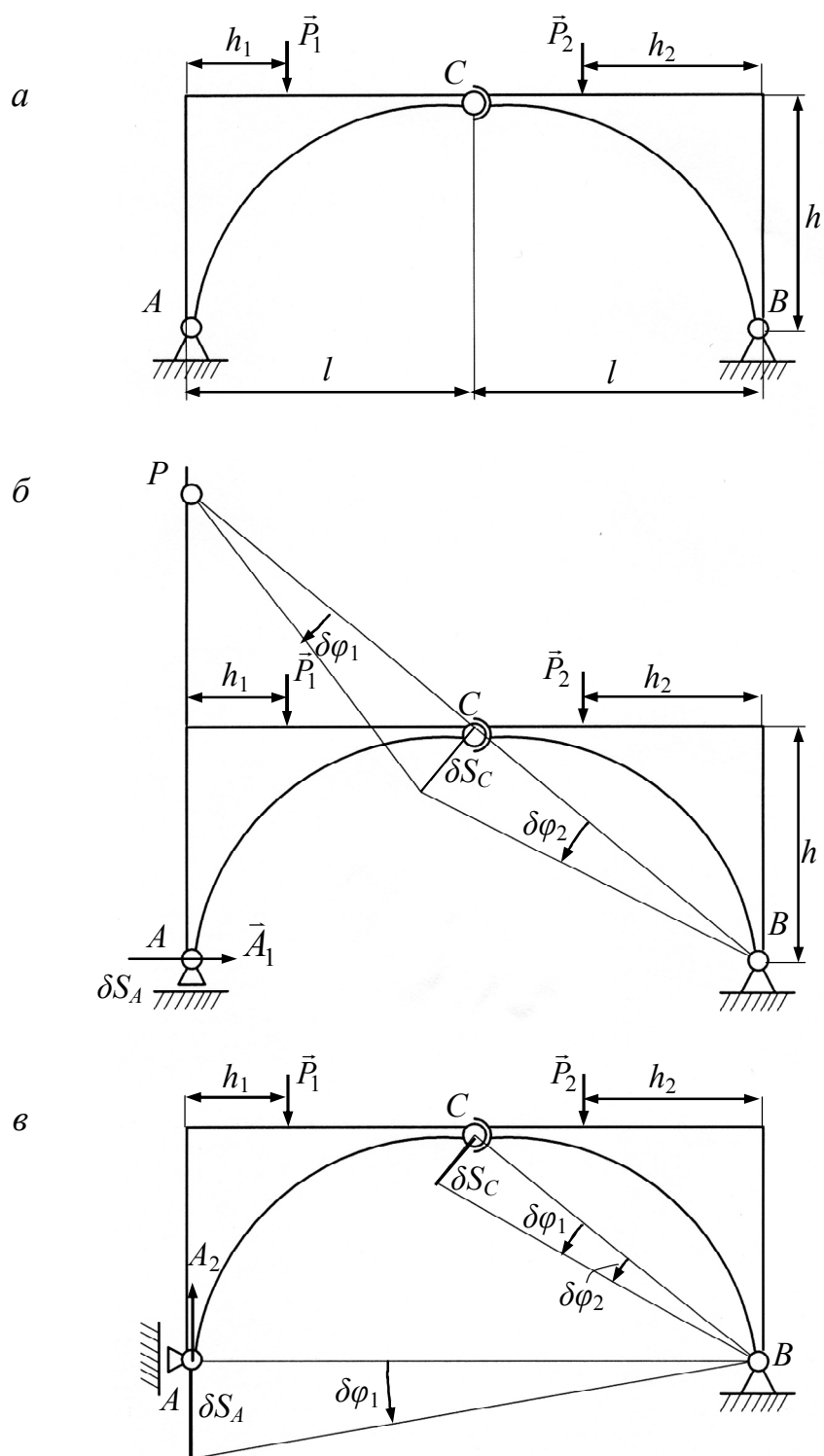


Рис. 22.21

Вопросы для самопроверки

1. Какие связи называются: а) голономными, б) стационарными?
Человек поднимается в лифте. Пол для него является связью. Какая это связь: голономная или нет, стационарная или нет?
2. Дайте определение понятия возможного перемещения системы.
3. Зависят ли возможные перемещения системы от сил, приложенных к ней?
4. Укажите, какая связь имеется между возможными перемещениями двух точек твердого тела?
5. Для груза, лежащего на полу поднимающегося лифта, укажите возможные перемещения его.
6. Условия какого состояния системы определяет принцип возможных перемещений? Сформулируйте его.
7. Можно ли применить принцип возможных перемещений для определения реакции идеальной связи?

Глава 23. Общее уравнение динамики системы (принцип Даламбера–Лагранжа)

Рассмотрим движущуюся механическую систему, состоящую из n материальных точек (рис. 23.1). На систему наложены идеальные связи.

Выделим точку системы и покажем силы, действующие на нее.

Пусть \vec{F}_S – равнодействующая активных сил; \vec{N}_S – равнодействующая реакций идеальных связей. Добавим к точке силу инерции $\vec{\Phi}_S = -m_S \vec{a}_S$.

По принципу Даламбера полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять принцип возможных перемещений. Для рассматриваемой точки

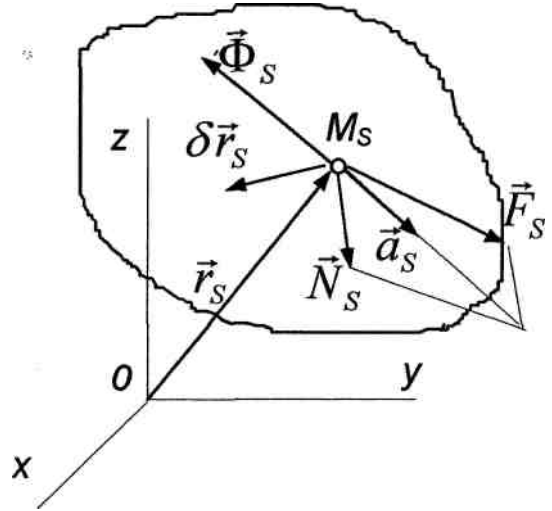


Рис. 23.1

$$\vec{F}_S \delta \vec{r}_S + \vec{N}_S \delta \vec{r}_S + \vec{\Phi}_S \delta \vec{r}_S = 0.$$

Суммируя полученные выражения для всех точек системы и учитывая, что для идеальных связей $\sum \vec{N}_S \delta \vec{r}_S = 0$, получим

$$\sum \vec{F}_S \delta \vec{r}_S + \sum \vec{\Phi}_S \delta \vec{r}_S = 0. \quad (23.1)$$

Это уравнение и называют *общим уравнением динамики системы*.

Формулировка: *При движении несвободной механической системы, на которую наложены идеальные связи, в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении из рассматриваемого положения равна нулю – это и есть принцип Даламбера–Лагранжа.*

Отметим, что в уравнение (23.1) не входят реакции идеальных связей. Уравнение (23.1) называют общим потому, что из него как следствие можно получить все общие теоремы динамики, а также дифференциальные уравнения движения точки и точек механической системы.

Общее уравнение динамики может быть записано в различных формах:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_F + \sum \delta A_\Phi &= 0; \\ \sum_S (\vec{F}_S + \vec{\Phi}_S) \delta \vec{r}_S &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя выражение силы инерции $\vec{\Phi}_S = -m_S \vec{a}_S$, получим

$$\sum_S (\vec{F}_S - m_S \vec{a}_S) \delta \vec{r}_S = 0.$$

Используя аналитическое выражение элементарной работы, запишем общее уравнение динамики в виде

$$\sum_S [(X_S - m_S \ddot{x}_S) \delta x_S + (Y_S - m_S \ddot{y}_S) \delta y_S + (Z_S - m_S \ddot{z}_S) \delta z_S] = 0.$$

Здесь X_S, Y_S, Z_S – проекции активных сил на оси координат;

x_S, y_S, z_S – координаты точек;

$\delta x_S, \delta y_S, \delta z_S$ – проекции возможного перемещения на оси координат (вариации координат точек приложения сил).

Рассмотрим примеры на составление общего уравнения динамики.

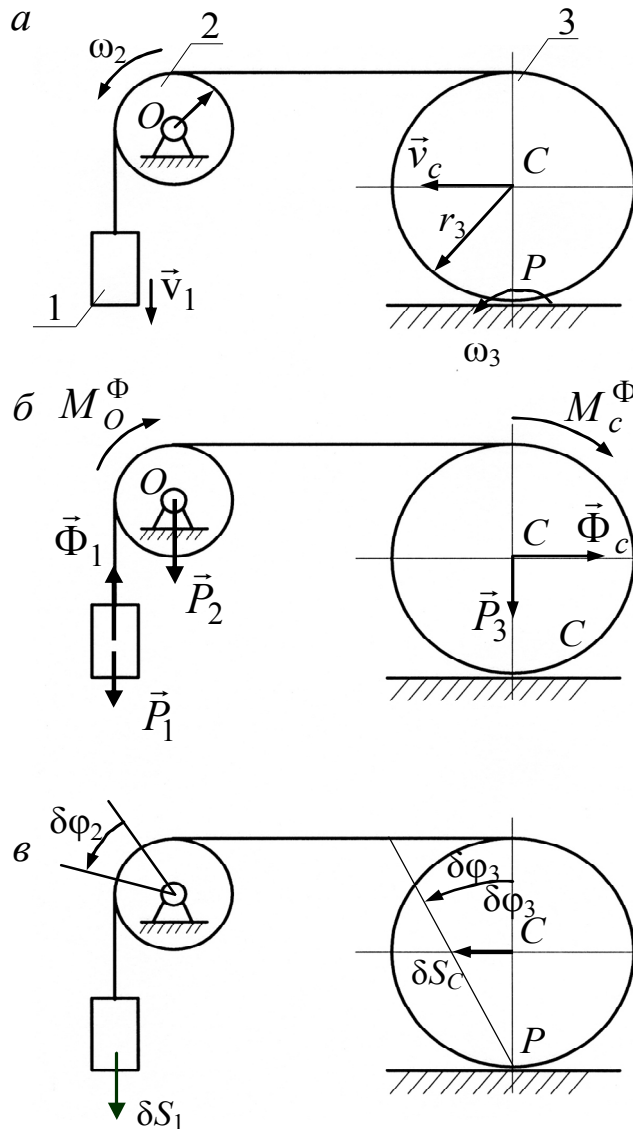


Рис. 23.2

(рис. 23.2,б), приводя их для тел 2 и 3 к простейшему виду (силе и паре сил) и учитывая связь между ускорениями, которая имеет такой же вид, как между скоростями:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \quad a_C = \frac{a_1}{2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r_3};$$

Пример 23.1. Груз массой m_1 приводит в движение цилиндрический каток массой m_3 при помощи нити, перекинутой через неподвижный блок массой m_2 и намотанной на каток (рис. 23.2,а). Определить ускорение груза, считая что блок и каток – однородные круглые диски, каток катится без скольжения, массой нити можно пренебречь.

Дано: m_1, m_2, m_3 .

Найти: a_1 .

Отметим, что груз 1 движется прямолинейно, неподвижный блок 2 совершает вращательное движение, каток 3 – плоскопараллельное и точка P является мгновенным центром скоростей.

Связь между скоростями имеет вид

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}; \quad v_C = \frac{v_1}{2}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{2r_3}.$$

Решение

1. Система: груз, блок, каток, нить.

2. Активные силы: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, связи идеальные. От связей не освобождаемся.

3. Добавим к системе силы инерции

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= m_1 a_1; & M_0^\Phi &= I_{0Z} \varepsilon_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{a_1}{r_2} = \frac{m_2 r_2 a_1}{2}; \\ \Phi_C &= m_3 a_C = m_3 \frac{a_1}{2}; & M_C^\Phi &= I_{CZ} \varepsilon_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a_1}{2r_3} = \frac{m_3 r_3 a_1}{4}.\end{aligned}$$

Для блока 2 в качестве центра приведения выбрана точка 0 и силы инерции приведены к паре сил с моментом M_0^Φ ; для катка 3 в качестве центра приведения выбрана точка C и силы инерции приведены к силе $\vec{\Phi}_C$ и паре сил с моментом M_C^Φ .

Сообщим системе возможное перемещение (рис. 23.2, в) и вычислим работу активных сил и сил инерции на этом перемещении:

$$P_1 \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - M_0^\Phi \delta \varphi_2 - \Phi_C \delta S_C - M_C^\Phi \delta \varphi_3 = 0.$$

Отметим, что связь между перемещениями имеет такой же вид, как между скоростями:

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta S_1}{r_2}; \quad \delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}; \quad \delta \varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2r_3}$$

Подставляя значения сил инерции и учитывая связь между возможными перемещениями, получим

$$m_1 g \delta S_1 - m_1 a_1 \delta S_1 - \frac{m_2 r_2 a_1}{2} \frac{\delta S_1}{r_2} - m_3 \frac{a_1}{2} \frac{\delta S_1}{2} - \frac{m_3 r_3 a_1}{4} \frac{\delta S_1}{2r_3} = 0.$$

Вынося общий множитель $\delta S_1 \neq 0$ за скобки и приравнивая выражение в скобках к нулю, получим значение интересующего нас ускорения:

$$a_1 = g \frac{8m_1}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}.$$

Пример 23.2. Найти связь между угловой скоростью и углом φ в равновесном положении, если длины плеч регулятора равны l , вес каждого шара P , вес муфты Q , жесткость пружины c и при $\varphi = 0$ пружина недеформирована; пружина прикреплена в точках A и B (рис. 23.3). Оси привеса плеч регулятора отстоят от оси вращения на расстоянии a . Шары считать материальными точками.

Решение

1. Система: регулятор.
2. Активные силы: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$. $F_1 = F_2 = cl \sin \varphi$.
3. Силы инерции:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{P}{g} (a + l \sin \varphi) \omega^2.$$

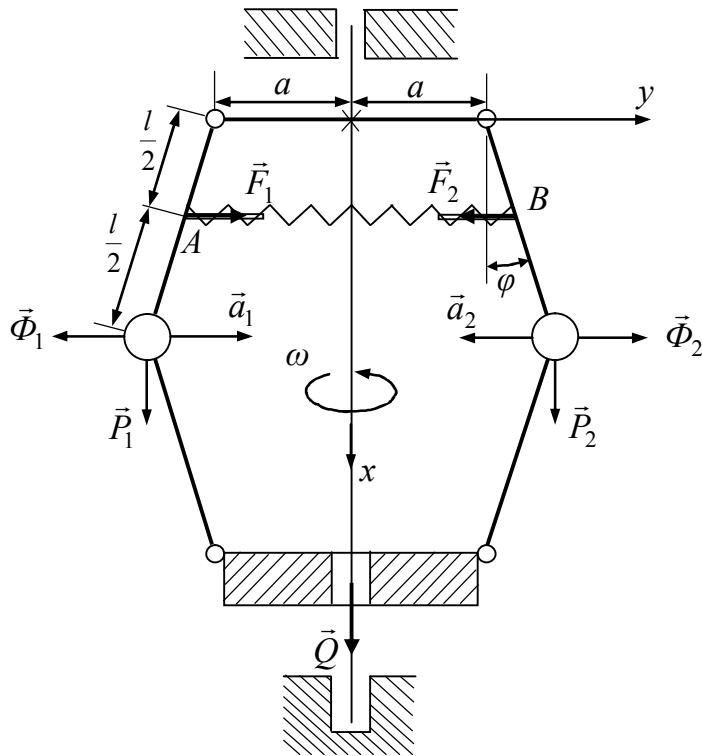


Рис. 23.3

4. Общее уравнение динамики в аналитической форме:

$$\sum [(X_s + \Phi_{sx})\delta x_s + (Y_s + \Phi_{sy})\delta y_s] = 0.$$

Входящие в уравнение величины введем в таблицу.

Силы	X_s	Y_s	x_s	y_s	δx_s	δy_s
\vec{P}_1	P	0	$l \cos \varphi$	—	$-l \sin \varphi \delta \varphi$	—
\vec{P}_2	P	0	$l \cos \varphi$	—	$-l \sin \varphi \delta \varphi$	—
\vec{Q}	Q	0	$2l \cos \varphi$	—	$-2l \sin \varphi \delta \varphi$	—
\vec{F}_1	0	$c l \sin \varphi$	—	$-\left(a + \frac{l}{2} \sin \varphi\right)$	—	$-\frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi$
\vec{F}_2	0	$-c l \sin \varphi$	—	$+\left(a + \frac{l}{2} \sin \varphi\right)$	—	$+\frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi$
$\vec{\Phi}_1$	0	$-\frac{P}{g}(a + l \sin \varphi)\omega^2$	—	$-(a + l \sin \varphi)$	—	$-l \cos \varphi \delta \varphi$
$\vec{\Phi}_2$	0	$+\frac{P}{g}(a + l \sin \varphi)\omega^2$	—	$+(a + l \sin \varphi)$	—	$+l \cos \varphi \delta \varphi$

В таблице не заполняются клетки, для которых произведение соответствующих множителей обращается в нуль.

Подставляя проекции сил и вариации координат в общее уравнение динамики, получаем

$$-2Pl \sin \varphi \delta \varphi - 2Ql \sin \varphi \delta \varphi - 2 \frac{cl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi \delta \varphi + 2 \frac{P}{g} (a + l \sin \varphi) \omega^2 l \cos \varphi \delta \varphi = 0;$$

$$\omega^2 = g \frac{\left(P + Q + \frac{1}{2} cl \cos \varphi \right) \operatorname{tg} \varphi}{P(a + l \sin \varphi)}.$$

В рассмотренных примерах системы имели одну степень свободы, и мы составляли одно уравнение движения. В следующем примере рассмотрим систему с двумя степенями свободы.

Пример 23.3. Призма 2 массой m_2 скользит по гладкой боковой грани призмы 1 массой m_1 , при этом α – угол боковой грани с горизонтом (рис. 23.4,а).

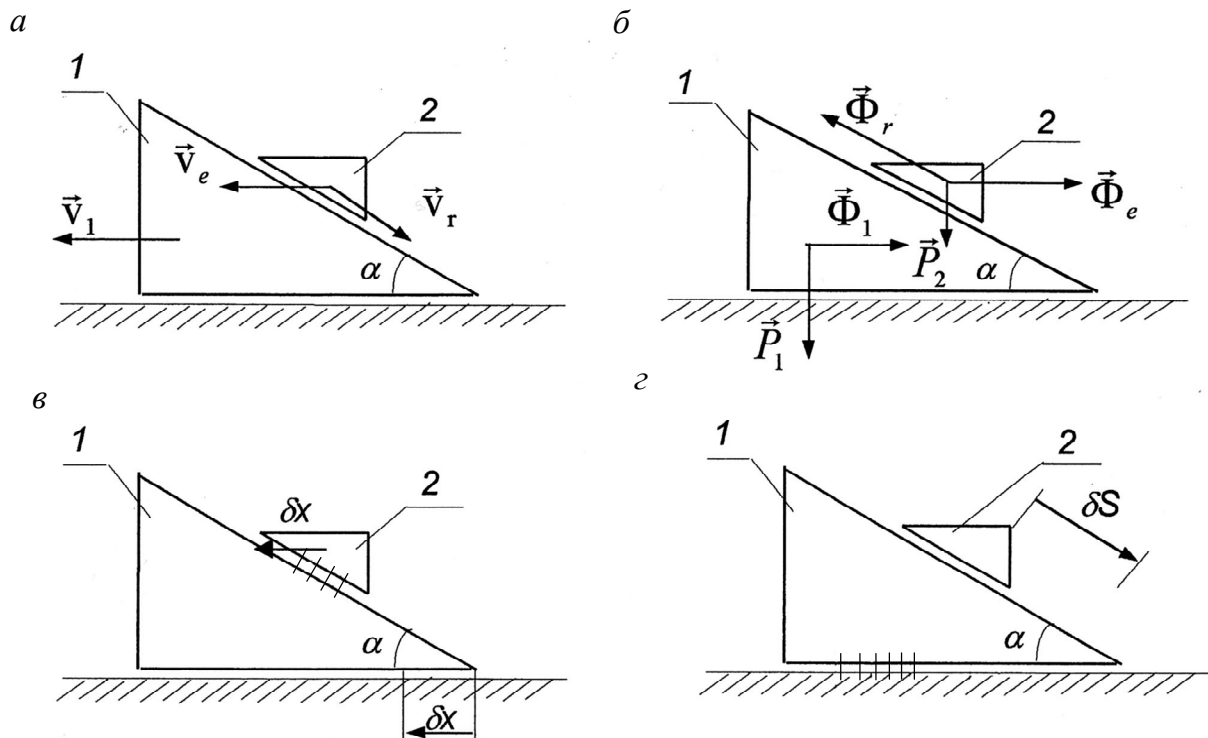


Рис. 23.4

Определить ускорение призмы 1, считая, что горизонтальная поверхность является гладкой.

Отметим, что призма 1 движется поступательно, v_1 – ее скорость в данный момент времени. Движение призмы 2 является сложным, состоящим из относительного поступательного движения по отношению к призме 1 со скоростью v_r и переносного поступательного движения со скоро-

стью \vec{v}_e , причем $\vec{v}_e = \vec{v}_1$. Абсолютное движение призмы 2 будет поступательным, ее абсолютная скорость и абсолютное ускорение равны:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

Решение

1. Система: две призмы.

2. Активные силы: \vec{P}_1, \vec{P}_2 , связи идеальные (рис. 23.4,б).

3. Силы инерции: $\Phi_1 = m_1 a_1$ – для призмы 1; для призмы 2 силу инерции в действительном движении разложим на две составляющие:

$$\Phi_e = m_2 a_e = m_2 a_1, \quad \Phi_r = m_2 a_r.$$

4. В данном случае системе можно сообщить два независимых возможных перемещения $\delta x, \delta S$:

а) сообщим системе возможное перемещение $\delta x \neq 0$ (как твердому телу), полагая $\delta S = 0$ (рис. 23.4,в) и составим общее уравнение динамики:

$$-\Phi_1 \delta x - \Phi_e \delta x + \Phi_r \delta x \cos \alpha = 0$$

или

$$-m_1 a_1 - m_2 a_1 + m_2 a_r \cos \alpha = 0;$$

б) сообщим призме 2 возможное перемещение $\delta S \neq 0$, мысленно считая призму 1 неподвижной $\delta x = 0$ (рис. 23.4,г). Общее уравнение динамики будет иметь следующий вид:

$$m_2 g \sin \alpha \delta S + \Phi_e \delta S \cos \alpha - \Phi_r \delta S = 0$$

или

$$m_2 g \sin \alpha + m_2 a_1 \cos \alpha - m_2 a_r = 0.$$

Из системы двух уравнений находим a_1 :

$$-m_1 a_1 - m_2 a_1 + m_2 a_r \cos \alpha = 0;$$

$$+m_2 g \sin \alpha + m_2 a_1 \cos \alpha - m_2 a_r = 0;$$

$$a_1 = \frac{1}{2} g \frac{m_2 \sin 2\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}.$$

Ниже будет рассмотрен другой метод составления уравнений движения этой системы.

Вопросы для самопроверки

1. Как сформулировать принцип Даламбера-Лагранжа и в каких формах можно записать общее уравнение динамики?
2. Можно ли применять общее уравнение динамики к системам с несколькими степенями свободы?
3. Учитываются ли внутренние силы механической системы в общем уравнении динамики системы?
4. Можно ли использовать общее уравнение динамики системы, если среди связей, ограничивающих ее движение, есть неидеальные связи?
5. Какое количество независимых уравнений движения можно составлять, используя принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики системы)?

Глава 24. Условия равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах

Во многих задачах статики и динамики положение исследуемого объекта (точки, тела или системы) удобно определять не декартовыми координатами точек, а так называемыми обобщенными координатами. При изучении несвободных систем декартовы координаты удовлетворяют уравнениям связей и не являются независимыми. Удобно определять положение такой системы совокупностью независимых величин (координат), которые называют обобщенными координатами.

Положение точек A и B кривошипно-ползунного механизма (рис. 24.1) определяется координатами этих точек. Причем независимой координатой является одна, так как можно записать три уравнения связей.

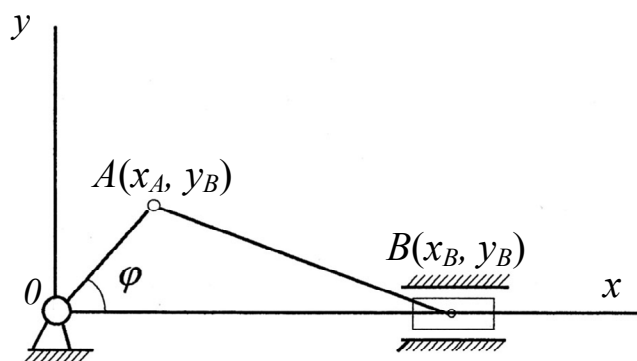


Рис. 24.1

Если $AO = r$, $AB = l$, то $x_A^2 + y_A^2 = r^2$;

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2, y_B = 0.$$

В данном случае положение всех точек механизма можно определить, например, одной угловой величиной φ и декартовы координаты выразить через эту величину:

$$x_A = r \cos \varphi, \quad x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi},$$

$$y_A = r \sin \varphi, \quad y_B = 0.$$

24.1. Обобщенные координаты и число степеней свободы

Введем определение: *Независимые между собой величины, однозначно определяющие положение системы в любой момент времени, называются обобщенными координатами системы.*

За обобщенные координаты можно брать величины любой размерности, чаще всего в механике пользуются линейными и угловыми величинами. Будем обозначать обобщенные координаты через q . Для системы с голономными связями число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Рассмотрим примеры таких координат. Положение маятника (рис. 24.2) определяется заданием одной угловой координаты φ , поэтому $q = \varphi$ и число степеней свободы N равно единице ($N = 1$).

Изображенный на рис. 24.1 кривошипно-ползунный механизм также имеет одну степень свободы, $N = 1$, $q = \varphi$.

Положение двойного маятника (рис. 24.3) можно определить двумя независимыми угловыми величинами α_1 и α_2 . Маятник имеет две степени свободы.

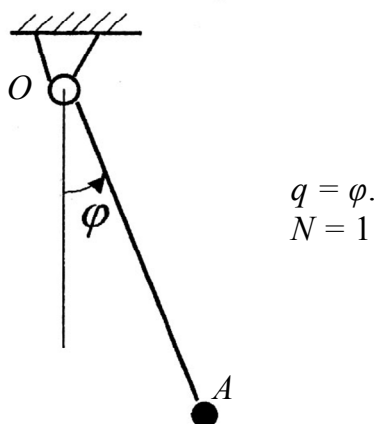


Рис. 24.2

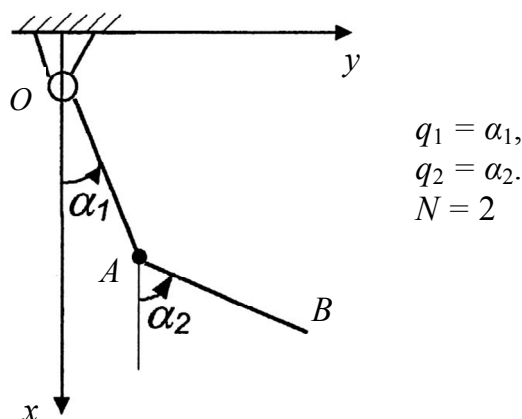


Рис. 24.3

Центробежный регулятор (рис. 24.4) при изменении угла α имеет две степени свободы и в качестве обобщенных координат можно выбрать углы φ и α .

Положение свободной материальной точки (рис. 24.5) определяется заданием трех координат x , y , z , и точка имеет три степени свободы.

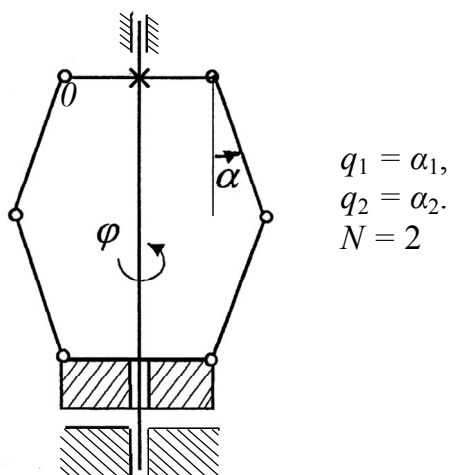


Рис. 24.4

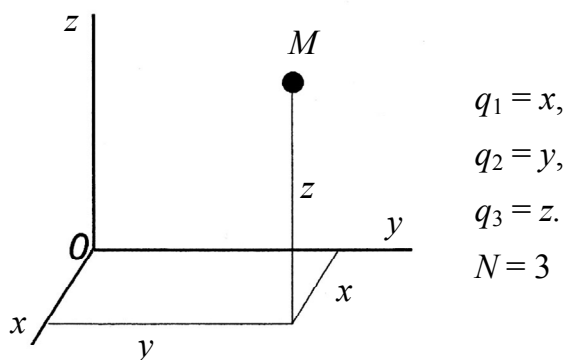


Рис. 24.5

Положение свободного твердого тела определяется (как известно из кинематики) шестью независимыми величинами, и число степеней свободы равно шести.

Итак, для системы, имеющей N степеней свободы, число обобщенных координат также равно N :

$$q_1, q_2, \dots, q_N. \quad (24.1)$$

При движении обобщенные координаты изменяются с течением времени: $q_j = q_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$).

Производные обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N. \quad (24.2)$$

В частности, это могут быть линейные или угловые скорости.

Декартовы координаты точек системы могут быть выражены через обобщенные координаты. Так, для двойного маятника:

$$\begin{aligned} x_A &= OA \cos \alpha_1, & x_B &= OA \cos \alpha_1 + AB \cos \alpha_2; \\ y_A &= OA \sin \alpha_1, & y_B &= OA \sin \alpha_1 + AB \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

В общем случае для радиуса-вектора точки можно записать:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_s(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (24.3)$$

где n — число точек несвободной механической системы;

N — число степеней свободы.

Скорость любой точки системы в действительном движении определяется как производная сложной функции:

$$\vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (24.4)$$

Возможные перемещения точек несвободной механической системы могут быть выражены через вариации (приращения) обобщенных координат по аналогии с полным дифференциалом функции нескольких переменных:

$$\delta \vec{r}_s = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_j} \delta q_j \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (24.5)$$

причем вариации обобщенных координат δq_j также независимы между собой.

24.2. Обобщенные силы и способы их вычисления

Это понятие было введено Лагранжем. Каждой обобщенной координате соответствует своя обобщенная сила. Таким образом, число обобщенных сил равно числу степеней свободы системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек.

На систему действуют активные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Система имеет N степеней свободы, и положение точек системы определяется обобщенными координатами q_j ($j = 1, 2, \dots, N$).

Вычислим элементарную работу активных сил на возможном перемещении системы: $\sum \delta A_F = \sum_S \vec{F}_S \delta \vec{r}_S$. Используя (24.5) для возможных перемещений, получим следующее выражение элементарной работы:

$$\sum \delta A_F = \sum_S \vec{F}_S \delta \vec{r}_S = \sum_{S=1}^n \vec{F}_S \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \delta q_j.$$

В последнем выражении можно изменить порядок суммирования, при этом индексы s и j не должны выходить за знак соответствующей суммы. Тогда элементарная работа активных сил:

$$\sum \delta A_F = \sum_{S=1}^n \vec{F}_S \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{S=1}^n \vec{F}_S \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Внутренняя сумма, в чем нетрудно убедиться, не зависит от индекса S и ее можно обозначить Q_j . Тогда

$$Q_j = \sum_{S=1}^n \vec{F}_S \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (24.6)$$

Поэтому выражение полной элементарной работы активных сил на любом возможном перемещении запишется в виде

$$\sum \delta A_F = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N. \quad (24.7)$$

Величину Q_j , стоящую перед вариацией обобщенной координаты, и называют обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате q_j того же индекса.

Дадим определение: *Обобщенные силы – величины, стоящие коэффициентами перед вариациями обобщенных координат в выражении элементарной работы активных сил, действующих на систему, на любом возможном перемещении.*

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты $[Q] = \frac{[A]}{[q]}$. Если обобщенная координата q имеет размерность длины, то обобщенная сила Q измеряется в ньютонах, если обобщенная координата q представляет угловую величину, то обобщенная сила Q измеряется в ньютон-метрах (имеет размерность момента).

Рассмотрим способы вычисления обобщенных сил – их три.

1. Вычисление обобщенной силы непосредственно по определению (аналитический способ):

$$Q_j = \sum_s \vec{F}_s \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_j}.$$

Записывая скалярное произведение векторов через их проекции на оси координат, получим выражение обобщенной силы в виде

$$Q_j = \sum_s \left(X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_j} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_j} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_j} \right), \quad (24.8)$$

где X_s, Y_s, Z_s – проекции активных сил на оси координат;

x_s, y_s, z_s – координаты точек приложения сил, выраженные через обобщенные координаты.

2. Практический способ вычисления обобщенных сил. Поскольку обобщенные координаты, а также их вариации независимы, то можно сообщить системе такое возможное перемещение, когда приращение получает только первая обобщенная координата, а все остальные обобщенные координаты остаются неизменными, т.е.

$$\delta q_1 > 0, \quad \delta q_2 = 0, \quad \dots, \quad \delta q_N = 0.$$

Работа всех активных сил на этом возможном перемещении определяется как

$$(\sum \delta A_F)_1 = Q_1 \delta q_1.$$

Тогда обобщенная сила Q_1 будет равна

$$Q_1 = \frac{(\sum \delta A_F)_1}{\delta q_1}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим выражение для обобщенной силы Q_j :

$$Q_j = \frac{(\sum \delta A_F)_j}{\delta q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (24.9)$$

В выражении (24.9) $(\sum \delta A_F)_j$ обозначает работу всех активных сил на возможном перемещении, при котором $\delta q_j > 0$, а все остальные вариации обобщенных координат равны нулю.

3. Вычисление обобщенных сил через потенциальную энергию Π системы.

Вспомним, что для потенциальных сил элементарная работа сил на действительном перемещении определялась следующим образом:

$$dA = -d\Pi(x, y, z).$$

Если положение точек системы задается обобщенными координатами q_j , то потенциальная энергия будет функцией обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_N).$$

Сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении для потенциальных сил может быть записана через потенциальную энергию в виде

$$\sum \delta A_F = -\delta \Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_N} \delta q_N \right).$$

При этом вариация функции нескольких переменных вычисляется по правилу полного дифференциала.

С другой стороны: $\sum \delta A_F = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N$. Используя независимость обобщенных координат q_j , можно задать вариации: $\delta q_1 > 0$, $\delta q_2 = 0, \dots, \delta q_N = 0$.

$$\text{В данном случае } (\sum \delta A_F)_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 = Q_1 \delta q_1 \text{ и } Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}.$$

Для обобщенной силы Q_j имеем :

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (24.10)$$

Для потенциальных сил обобщенные силы равны взятым со знаком "минус" частным производным от потенциальной энергии по соответствующим обобщенным координатам.

Рассмотрим примеры вычисления обобщенных сил.

Пример 24.1. Однородный стержень AB длиной l и весом P_1 может вращаться вокруг оси A в вертикальной плоскости (рис. 24.6,а). Нанизанный на него груз M имеет вес P_2 . Длина пружины в недеформированном состоянии $AO = l_H$ и ее жесткость c .

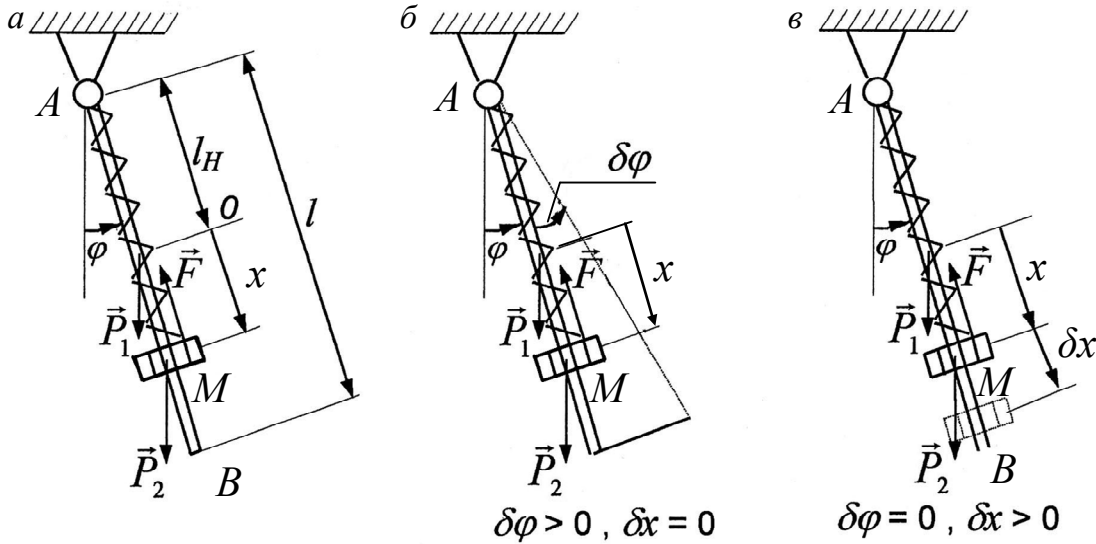


Рис. 24.6

Вычислить обобщенные силы.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем величины φ и x , $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$, $N = 2$. Активными силами, действующими на систему, являются силы тяжести \vec{P}_1, \vec{P}_2 и сила упругости \vec{F} , причем $F = cx$.

Сообщим системе возможное перемещение $\delta\varphi > 0$, $\delta x = 0$ ($x = \text{const}$) (рис. 24.6,б) и вычислим работу активных сил на этом перемещении:

$$(\sum \delta A_F)_\varphi = -P_1 \frac{l}{2} \sin \varphi \delta\varphi - P_2 AM \sin \varphi \delta\varphi = -\left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (l_H + x) \right] \sin \varphi \delta\varphi;$$

$$Q_\varphi = \frac{(\sum \delta A_F)_\varphi}{\delta\varphi} = -\left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (l_H + x) \right] \sin \varphi.$$

Затем сообщим системе возможное перемещение $\delta\varphi = 0$ ($\varphi = \text{const}$), $\delta x > 0$ (рис. 24.6,в) и вычислим работу активных сил на этом перемещении:

$$(\sum \delta A_F)_x = P_2 \cos \varphi \delta x - cx \delta x = (P_2 \cos \varphi - cx) \delta x;$$

$$Q_x = \frac{(\sum \delta A_F)_x}{\delta x} = P_2 \cos \varphi - cx.$$

Итак, обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам φ и x , равны:

$$Q_\varphi = - \left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (l_H + x) \right] \sin \varphi ;$$

$$Q_x = P_2 \cos \varphi - cx. \quad (24.11)$$

Обобщенные силы могут быть вычислены также через потенциальную энергию с использованием формулы (24.10).

Потенциальная энергия системы, определяемая как работа сил при перемещении системы из рассматриваемого положения в нулевое (рис. 24.6,а):

$$\Pi = P_1 \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) + P_2 l_H (1 - \cos \varphi) - P_2 x \cos \varphi + \frac{cx^2}{2}.$$

Тогда обобщенные силы Q_φ и Q_x :

$$Q_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = - P_1 \frac{l}{2} \sin \varphi - P_2 l_H \sin \varphi - P_2 x \sin \varphi = - \left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (l_H + x) \right] \sin \varphi ,$$

$$Q_x = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} = + P_2 \cos \varphi - cx.$$

Пример 24.2. Вычислить обобщенные силы для системы однородных стержней, указанной на рис. 24.7, если $P_1 = P_2 = P$, $F = 1/2P$, $OA = AB = 2l$.

Система имеет две степени свободы, и в качестве обобщенных координат выберем угловые величины

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2, \quad N = 2.$$

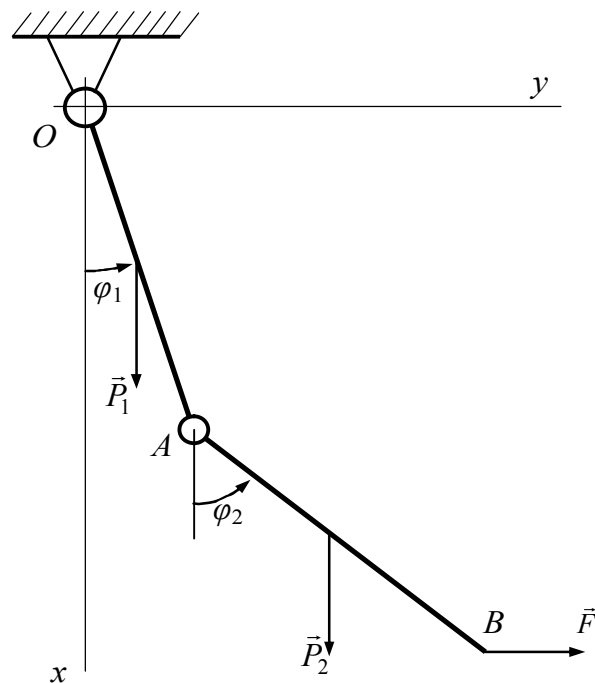


Рис. 24.7

Вычислим обобщенные силы Q_1 и Q_2 двумя способами.

1. Вначале рассмотрим аналитический способ, воспользовавшись формулой (24.8).

$$Q_1 = \sum_s \left(X_s \frac{\partial x_s}{\partial \varphi_1} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial \varphi_1} \right);$$

$$Q_2 = \sum_s \left(X_s \frac{\partial x_s}{\partial \varphi_2} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial \varphi_2} \right).$$

Для удобства вычислений составим таблицу.

\vec{F}_s	X_s	Y_s	x_s	y_s
\vec{P}_1	P	0	$l \cos \varphi_1$	—
\vec{P}_2	P	0	$2l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2$	
\vec{F}	0	F	—	$2l \sin \varphi_1 + 2l \sin \varphi_2$

\vec{F}_s	$\frac{\partial x_s}{\partial \varphi_1}$	$\frac{\partial y_s}{\partial \varphi_1}$	$\frac{\partial x_s}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial y_s}{\partial \varphi_2}$
\vec{P}_1	$-l \sin \varphi_1$	—	0	—
\vec{P}_2	$-2l \sin \varphi_1$	—	$-l \sin \varphi_2$	—
\vec{F}	—	$2l \cos \varphi_1$	—	$2l \cos \varphi_2$

С использованием формулы (24.8) и данных таблицы получаем ($F = \frac{1}{2}P$):

$$Q_1 = -Pl \sin \varphi_1 - P2l \sin \varphi_1 + F2l \cos \varphi_1 = Pl (\cos \varphi_1 - 3 \sin \varphi_1);$$

$$Q_2 = -Pl \sin \varphi_2 + F2l \cos \varphi_2 = Pl (\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2).$$

2. Для вычисления обобщенных сил Q_1 и Q_2 можно использовать практический способ.

Сообщим системе возможное перемещение $\delta \varphi_1 > 0$, $\delta \varphi_2 = 0$ (рис. 24.8,а). При таком перемещении стержень OA повернется на угол $\delta \varphi_1$ вокруг точки O , а стержень AB переместится параллельно самому себе, совершая поступательное перемещение. Тогда перемещения точек A и B будут одинаковыми и равными: $\delta S_A = \delta S_B = 2l \delta \varphi_1$.

Работа сил на таком перемещении:

$$\begin{aligned} (\sum \delta A_F)_1 &= -P_1 l \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - P_2 2l \delta \varphi_1 \cos(90^\circ - \varphi_1) + F 2l \delta \varphi_1 \cos \varphi_1 = \\ &= -3Pl \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 + Pl \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 = Pl (\cos \varphi_1 - 3 \sin \varphi_1) \delta \varphi_1. \end{aligned}$$

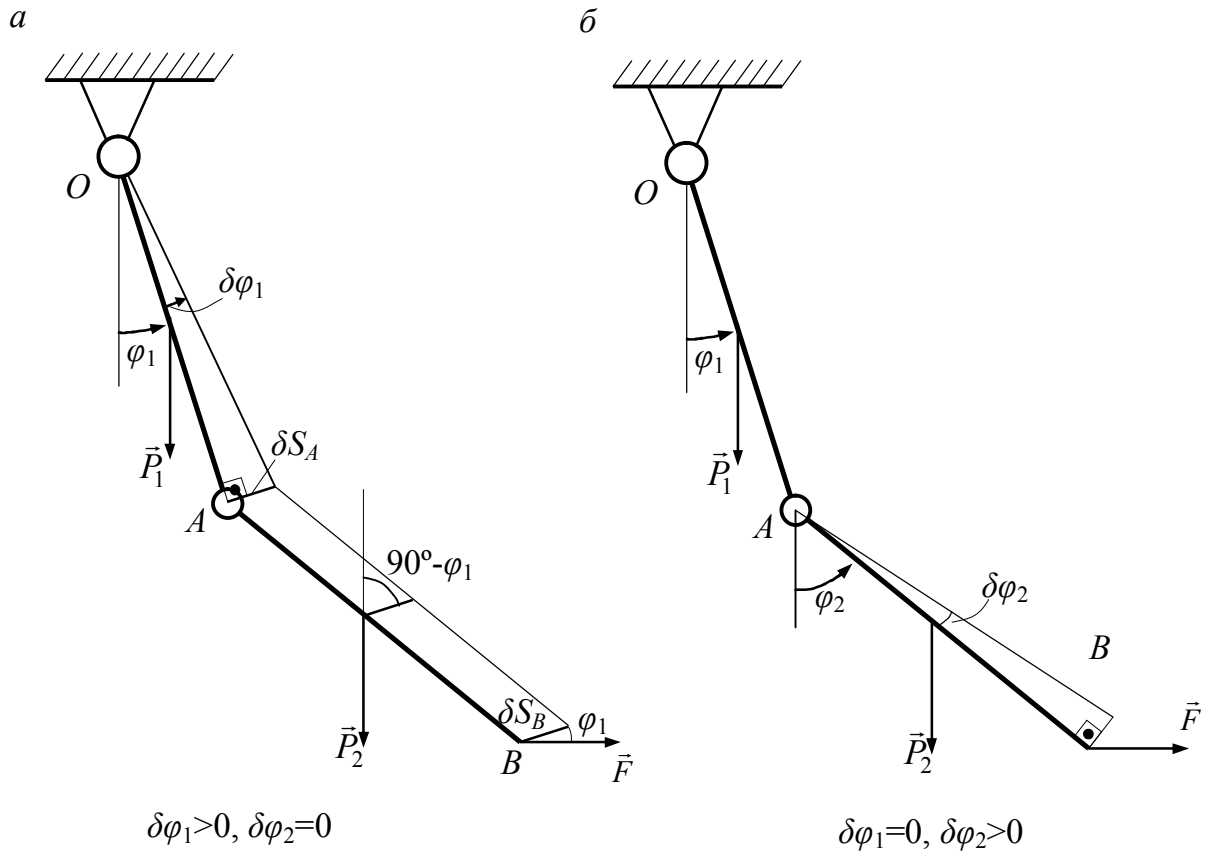


Рис. 24.8

Обобщенная сила Q_1 :

$$Q_1 = \frac{(\sum \delta A_F)_1}{\delta \varphi_1} = Pl(\cos \varphi_1 - 3 \sin \varphi_1).$$

Сообщим системе возможное перемещение $\delta \varphi_1 = 0$, $\delta \varphi_2 > 0$. При таком перемещении стержень OA останется неподвижным, а стержень AB повернется на угол $\delta \varphi_2$ вокруг точки A (рис. 24.8, б).

Вновь вычислим работу сил на таком перемещении:

$$(\sum \delta A_F)_1 = -P_2 l \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 + F 2l \cos \varphi_2 \delta \varphi_2 = Pl(\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2) \delta \varphi_2.$$

Обобщенная сила Q_2 :

$$Q_2 = \frac{(\sum \delta A_F)_2}{\delta \varphi_2} = Pl(\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2).$$

Итак, обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам φ_1 и φ_2 , имеют вид

$$Q_1 = Pl(\cos \varphi_1 - 3 \sin \varphi_1);$$

$$Q_2 = Pl(\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2).$$

24.3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах

В соответствии с принципом возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из равновесного положения, т.е.

$$\sum_S \delta A_F = \sum_S \vec{F}_S \delta \vec{r}_S = 0$$

или в обобщенных координатах

$$\sum \delta A_F = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j = 0. \quad (24.12)$$

Выше было отмечено, что обобщенные координаты (и их вариации) независимы, поэтому все коэффициенты Q_j в равенстве (24.12) равны нулю:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \dots, \quad Q_N = 0. \quad (24.13)$$

Действительно, сообщив системе перемещение $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_N = 0$, получим из (24.12) $Q_1 \delta q_1 = 0$ и, следовательно, $Q_1 = 0$.

Аналогично устанавливается необходимость остальных равенств для равновесия системы. Достаточность равенств $Q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$) для равновесия системы получается подстановкой их в формулу (24.12). Тогда $\sum \delta A_F = 0$, а это в силу принципа возможных перемещений достаточно для равновесия системы. Таким образом, для равновесия несвободной механической системы, на которую наложены голономные, идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы каждая обобщенная сила равнялась нулю:

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Равенства (24.13) являются условиями равновесия системы в обобщенных (независимых) координатах. Число условий, как видно, равно числу степеней свободы.

Для двойного физического маятника, рассмотренного в примере 24.2 (рис. 24.8), при равновесии $Q_1 = 0, Q_2 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 - 3 \sin \varphi_1 &= 0; & \operatorname{tg} \varphi_1 &= 1/3; \\ \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 &= 0; & \operatorname{tg} \varphi_2 &= 1. \end{aligned}$$

24.4. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, или уравнения Лагранжа II рода

Уравнения Лагранжа II рода (или просто уравнения Лагранжа) дают общий, единый метод составления уравнений движения несвободных механических систем и представляют преобразованное к обобщенным координатам общее уравнение динамики (принцип Даламбера–Лагранжа).

Рассмотрим движущуюся механическую систему, состоящую из n материальных точек и имеющую N степеней свободы. На систему наложены голономные, идеальные, стационарные связи.

Положение точек системы определяется обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_N , причем для координат точки, ее скорости и возможного перемещения справедливы формулы (24.3)–(24.5).

Прежде чем выводить уравнения Лагранжа, получим два вспомогательных тождества.

1. Производная скорости точки по обобщенной скорости равна производной радиуса-вектора точки по обобщенной координате:

$$\frac{\partial \vec{v}_S}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_S}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \quad (S = 1, 2, \dots, N). \quad (24.14)$$

Доказательство этого тождества не вызывает затруднения, если учесть, что скорость точки связана линейным соотношением с обобщенными скоростями, т.е.

$$\vec{v}_S = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_N} \dot{q}_N.$$

2. Производная скорости точки по обобщенной координате равна производной по времени от частной производной радиуса-вектора по обобщенной координате:

$$\frac{\partial \vec{v}_S}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_S}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right). \quad (24.15)$$

Справедливость этого тождества следует из переместительности операций полного дифференцирования по времени и частного – по обобщенной координате:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_S}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}_S}{\partial q_j}.$$

Перейдем к выводу уравнений Лагранжа. Для движущейся механической системы запишем общее уравнение динамики

$$\sum \delta A_F + \sum \delta A_\Phi = 0$$

или

$$\sum_{S=1}^n \left(\vec{F}_S - m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \right) \delta \vec{r}_S = 0.$$

Первая сумма $\sum_{S=1}^n \vec{F}_S \delta \vec{r}_S = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j$ – работа активных сил на любом возможном перемещении выражена через обобщенные силы в (24.7).

Преобразуем вторую сумму, используя формулу (24.5) для возможного перемещения:

$$\sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \delta \vec{r}_S = \sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой взятую со знаком "минус" обобщенную силу инерции:

$$-Q_j^\Phi = \sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j}.$$

Тогда вторая сумма в общем уравнении динамики, представляющая работу сил инерции на любом возможном перемещении, может быть выражена через обобщенные силы инерции:

$$\sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \delta \vec{r}_S = \sum_{j=1}^N (-Q_j^\Phi) \delta q_j.$$

Покажем, что

$$-Q_j^\Phi = \sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (24.16)$$

где T – кинетическая энергия системы, $T = \sum \frac{m_S v_S^2}{2}$.

Действительно,

$$\sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_S m_S \vec{v}_S \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right) - \sum_S m_S \vec{v}_S \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right).$$

Используя тождества (24.14) и (24.15), запишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} \sum_{S=1}^n m_S \frac{d\vec{v}_S}{dt} \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_S m_S \vec{v}_S \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_j} \right) - \sum_S m_S \vec{v}_S \frac{\partial \vec{v}_S}{\partial \dot{q}_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_S \frac{m_S v_S^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_S \frac{m_S v_S^2}{2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Общее уравнение динамики с использованием обобщенных сил и обобщенных координат может быть переписано в виде

$$\sum_{s=1}^n \left(\vec{F}_s - m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} \right) \delta \vec{r}_s = \sum_{j=1}^N (Q_j + Q_j^\Phi) \delta q_j = 0.$$

Подставляя обобщенную силу инерции из (24.16), получим

$$\sum_s \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

В силу независимости вариаций обобщенных координат все коэффициенты при δq_j (выражения в скобках) должны быть равны нулю. Тогда получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (24.17)$$

Эти уравнения и называются уравнениями Лагранжа II рода, или уравнениями движения системы в обобщенных координатах. Число уравнений равно числу степеней свободы. Следует отметить, что в уравнения не входят реакции идеальных связей.

Уравнения Лагранжа представляют собой систему N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Интегрируя эти дифференциальные уравнения и определяя по начальным условиям произвольные постоянные, получаем N уравнений движения системы в обобщенных координатах:

$$q_j = q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (24.18)$$

Уравнения Лагранжа широко используются при решении задач о движении несвободных систем с одной или несколькими степенями свободы. Особенно удобны они при составлении уравнений движения с несколькими степенями свободы. Уравнения Лагранжа можно использовать независимо от того, сколько тел входит в систему, как движутся эти тела и какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается. Для составления уравнений Лагранжа нужно уметь вычислять кинетическую энергию системы и обобщенные силы.

При решении задач с помощью уравнений Лагранжа рекомендуется следующая методика (план решения).

1. Выбрать объект – механическую систему и изобразить ее в произвольный момент времени.

2. Определить число степеней свободы, выбрать и изобразить обобщенные координаты, указав начало их отсчета и положительное направление.

3. Показать все активные силы, действующие на систему (реакции идеальных связей не показывать, так как связи не отбрасываются).

4. Записать в общем виде уравнения Лагранжа для выбранных обобщенных координат.

5. Вычислить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам.

6. Определить кинетическую энергию системы в абсолютном движении и выразить ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

7. Вычислить частные производные от кинетической энергии, входящие в уравнения Лагранжа.

8. Подставить эти производные и обобщенные силы в уравнения Лагранжа.

9. Проинтегрировать, если это требуется, полученную систему уравнений и по начальным условиям определить произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотрим примеры на составление уравнений Лагранжа.

Пример 24.3. Однородный круглый цилиндр обмотан посередине тонкой нитью, другой конец которой закреплен неподвижно (рис. 24.9).

Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Составить уравнение движения центра масс (точки C).

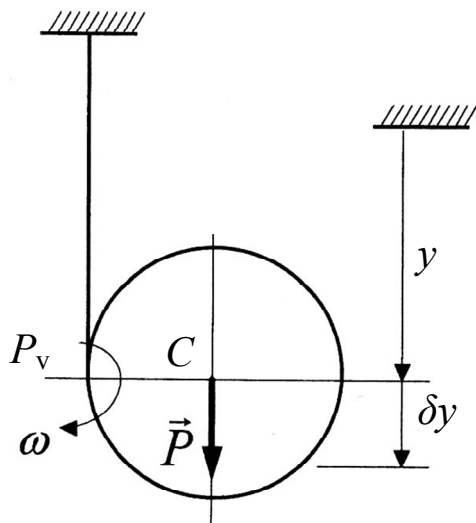


Рис. 24.9

Решение

1. Система – цилиндр.

2. $N = 1$, $q = y$ – обобщенной координатой является декартова координата, определяющая положение точки C .

3. Активные силы – P , связи идеальные (нерастяжимая нить).

4. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q.$$

5. Сообщим координате y приращение $\delta y > 0$ и вычислим элементарную работу: $(\sum \delta A_F)_y = P \delta y$,

$$Q_y = \frac{(\sum \delta A_F)_y}{\delta y} = \frac{P \delta y}{\delta y} = P = mg.$$

6. Цилиндр совершает плоскопараллельное движение, и кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{CZ} \omega^2 = \frac{3}{4} m v_C^2 = \frac{3}{4} m \dot{y}^2.$$

7. Производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2} m \dot{y}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

8. Уравнение Лагранжа

$$\frac{3}{2} m \ddot{y} = mg, \quad \ddot{y} = \frac{2}{3} g,$$

$$\dot{y} = \frac{2}{3} g t + C_1, \quad y = \frac{1}{3} g t^2 + C_1 t + C_2.$$

При $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = 0$, следовательно, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$,

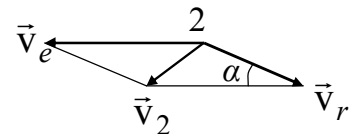
$y = \frac{1}{3} g t^2$ – уравнение движения точки C .

Пример 24.4. Призма 2 массой m_2 скользит по гладкой боковой грани призмы 1 массой m_1 , образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы 1, считая что горизонтальная поверхность является гладкой (рис. 24.10,а). Призма 1 движется поступательно, а движение призмы 2 является сложным (пример 22.3).

Абсолютная скорость призмы 2:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

$$v_2^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2 v_e v_r \cos \alpha$$



или, учитывая, что $v_e = v_1$, где v_1 – скорость призмы 1,

$$v_2^2 = v_1^2 + v_r^2 - 2 v_1 v_r \cos \alpha.$$

Решение

1. Система – две призмы.

2. $N = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = S$, причем x – абсолютная координата, S – относительная координата (рис. 24.10,б).

3. Активные силы – \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , связи идеальные.

4. Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S.$$

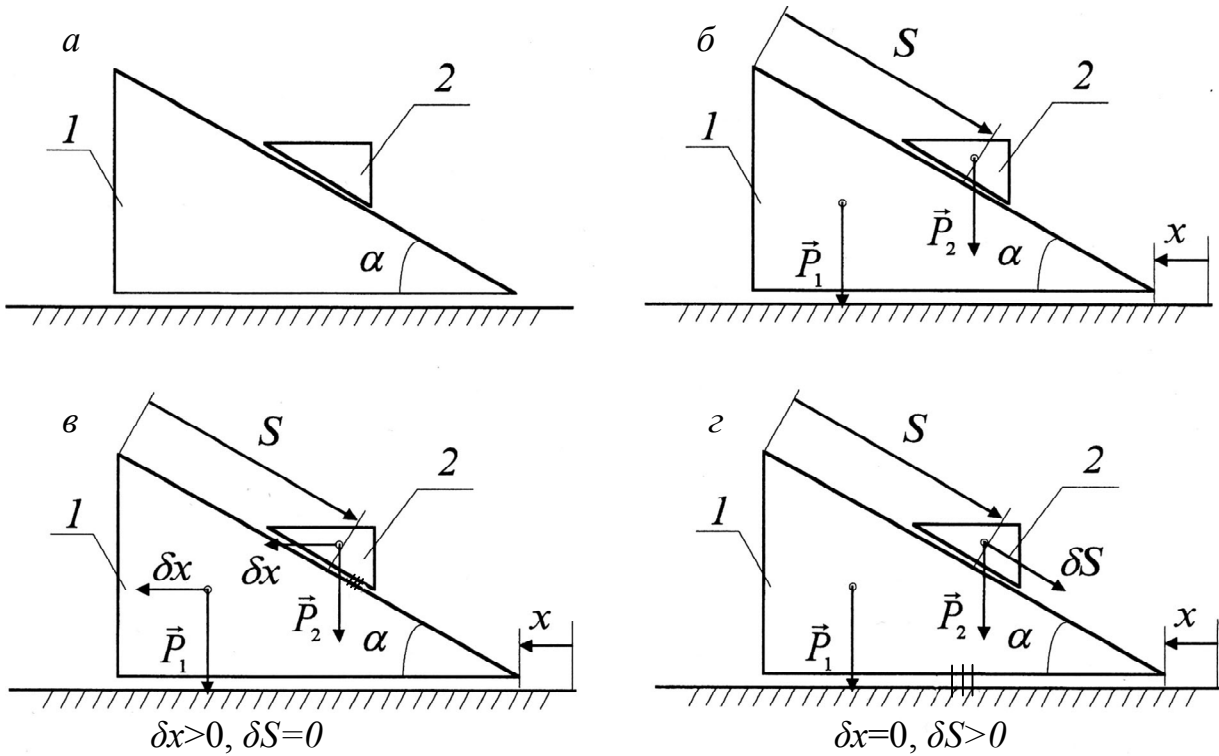


Рис. 24.10

5. Вычислим обобщенную силу Q_x . Сообщим системе возможное перемещение, когда координата x получает приращение $\delta x > 0$, а координата S при этом не меняется, т.е. $\delta S = 0$, и вычислим работу активных сил на этом перемещении (рис. 24.10, в).

$$(\sum \delta A_F)_x = P_1 \delta x \cos 90^\circ + P_2 \delta x \cos 90^\circ = 0;$$

$$Q_x = \frac{(\sum \delta A_F)_x}{\delta x} = 0.$$

Найдем обобщенную силу Q_S . Сообщим системе возможное перемещение $\delta x = 0$, $\delta S > 0$, когда только координата S получает приращение (рис. 24.10, г), и вычислим работу всех активных сил на этом перемещении:

$$(\sum \delta A_F)_S = P_2 \delta S \sin \alpha = m_2 g \sin \alpha \delta S;$$

$$Q_S = \frac{(\sum \delta A_F)_S}{\delta S} = m_2 g \sin \alpha.$$

6. Кинетическая энергия в действительном движении

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

где v_1 и v_2 — абсолютные скорости.

При этом

$$v_1 = \dot{x}, \quad v_r = \dot{S} \quad \text{и} \quad v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{S}^2 - 2\dot{x}\dot{S}\cos\alpha;$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + \dot{S}^2 - 2\dot{x}\dot{S}\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - m_2\dot{x}\dot{S}\cos\alpha + \frac{1}{2}m_2\dot{S}^2.$$

7. Производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2\dot{S}\cos\alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ddot{S}\cos\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = -m_2\dot{x}\cos\alpha + m_2\dot{S}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) = -m_2\ddot{x}\cos\alpha + m_2\ddot{S}.$$

8. Уравнения Лагранжа II рода:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ddot{S}\cos\alpha = 0.$$

$$-m_2\ddot{x}\cos\alpha + m_2\ddot{S} = m_2g\sin\alpha.$$

Ускорение призмы 1:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g \frac{m_2 \sin 2\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}.$$

Рекомендуется еще раз рассмотреть пример 23.3 и сравнить полученные решения.

24.5. Уравнения Лагранжа II рода для консервативной системы

Консервативной называют систему, на которую действуют потенциальные силы и для которой справедлив закон сохранения механической энергии.

Пусть $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$ – потенциальная энергия системы. Она, как известно, равна работе потенциальных сил при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое. Например, потенциальная энергия поднятого на высоту z тела равна mgz , потенциальная

энергия растянутой (сжатой) пружины равна $\frac{cx^2}{2}$. Если положение системы задается обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_N , то потенциальная энергия будет функцией обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (24.19)$$

Полезно вспомнить, что кинетическая энергия системы зависит в общем случае от обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$T = T\left(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N\right). \quad (24.20)$$

Введем в рассмотрение функцию L , равную разности кинетической и потенциальной энергий системы:

$$L = T - \Pi. \quad (24.21)$$

Эту функцию называют кинетическим потенциалом или функцией Лагранжа. Функция Лагранжа, как нетрудно видеть, зависит от обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$L = L\left(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N\right). \quad (24.22)$$

Рассмотрим структуру уравнений Лагранжа для консервативной системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Вычислим производные от кинетической энергии, учитывая, что $T = L + \Pi$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \cancel{\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j}}^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

так как потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей.

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

так как и потенциальная энергия, и функция Лагранжа зависят от обобщенных координат.

Учтем также, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Обобщенные силы для консервативной системы определяются выражением

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Подставляя производные от кинетической энергии и обобщенные силы в уравнения Лагранжа, получаем для консервативной системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

или окончательно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (24.23)$$

Уравнения (24.23) называют уравнениями Лагранжа II рода для консервативной системы. Для составления этих уравнений требуется знание одной лишь функции $L(q, \dot{q})$ – функции Лагранжа.

Замечание. Если на механическую систему помимо потенциальных сил действуют и непотенциальные, например силы сопротивления, то уравнения Лагранжа II рода можно представить в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

где по-прежнему $L = T - \Pi$, а в правой части стоят обобщенные силы, вычисленные, как обычно, только для непотенциальных сил.

24.6. Циклические координаты, циклические интегралы

Обобщенные координаты, которые не входят явно в выражение кинетического потенциала L , называют циклическими координатами.

Пусть, например, q_1 – циклическая координата, т.е. L не зависит явно от q_1 . Тогда $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$, и уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0,$$

откуда
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = C_1 (\text{const}).$$

Это равенство называют циклическим интегралом.

В общем случае, когда среди N обобщенных координат системы есть несколько циклических, например k ($k < N$), то для этих координат

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

В этом случае будет существовать k циклических интегралов

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = C_\alpha (\text{const}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Приведем пример циклических координат и циклических интегралов

Пусть изучается движение свободной материальной точки под действием силы тяжести (рис. 24.11).

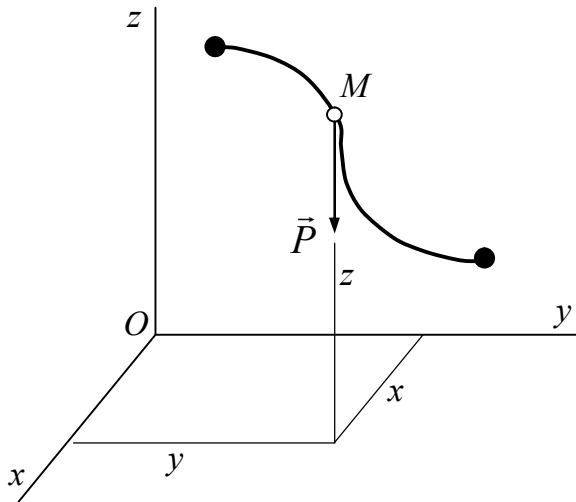


Рис. 24.11

Примем декартовы координаты за обобщенные:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Кинетическая энергия точки

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right).$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgz.$$

Кинетический потенциал

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz = L(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Кинетический потенциал L не зависит явно от координат x, y . Следовательно, координаты x, y – циклические. Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = C_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} = C_2,$$

т.е. проекции скорости точки на горизонтальные оси координат не изменяются во время движения (закон сохранения проекций количества движения).

Пример 24.5 (движение консервативной системы)

Определить движение системы, состоящей из двух грузов, находящихся на гладкой горизонтальной плоскости и соединенных пружиной жесткости c (рис. 24.12,а). Массы грузов m_1 и m_2 , длина недеформированной пружины l_H . В начальный момент времени $t_0 = 0$ грузу 1 сообщена начальная скорость v_0 , направленная вправо, груз 2 был неподвижен, пружина недеформирована. Массой пружины пренебречь.

Решение

1. Рассмотрим систему двух грузов, связанных пружиной, изобразим ее в произвольный момент $t > 0$.

2. Положение грузов будем определять обобщенными координатами $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, отсчитывая их от неподвижных точек O_1 и O_2 , причем $O_1O_2 = l_H$ (рис. 24.12,б). Допустим, что пружина растянута, т.е. $x_1 < x_2$.

3. На систему действуют активные внешние силы тяжести P_1 и P_2 и внутренние активные силы упругости $F_1 = F_2 = c\lambda$, где $\lambda = x_2 - x_1$.

4. Система является консервативной, связи идеальные (гладкая поверхность), и уравнения движения будем составлять в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

где $L = T - \Pi$.

5. Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2.$$

Потенциальная энергия растянутой пружины

$$\Pi = \frac{1}{2} c \lambda^2 = \frac{1}{2} c (x_2 - x_1)^2.$$

Функция Лагранжа $L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} c (x_2 - x_1)^2$,

здесь $L = L(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2)$ зависит от всех обобщенных координат, т.е. циклических координат нет.

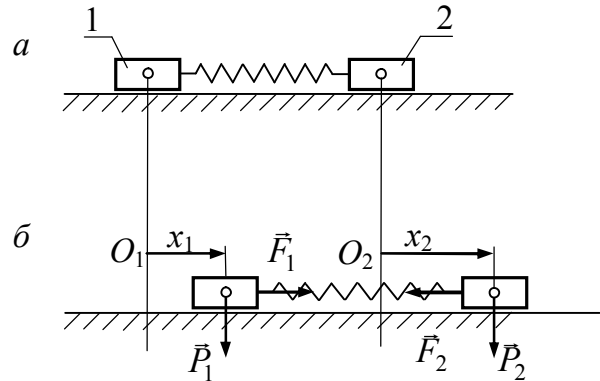


Рис. 24.12

6. Вычисляем частные производные от функции $L = L(x, \dot{x})$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1, & \frac{\partial L}{\partial x_1} &= c(x_2 - x_1), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2, & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -c(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

и подставляем их в уравнения Лагранжа.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 - c(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

7. Проинтегрируем систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Складывая уравнения, получим

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = C_1, \quad (24.24)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = C_1 t + C_2. \quad (24.25)$$

Соотношение (24.24) выражает закон сохранения проекций количества движения системы на ось x .

Перепишем уравнения из пункта 6 в виде

$$\ddot{x}_1 = \frac{c}{m_1}(x_2 - x_1),$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-c}{m_2}(x_2 - x_1).$$

Введем обозначение $y = x_2 - x_1$ и, вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\ddot{y} + k^2 y = 0,$$

$$\text{где } k^2 = c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Это дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, решение которого:

$$y = x_2 - x_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt, \quad (24.26)$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \quad (24.27)$$

С помощью начальных условий, заданных в формулировке задачи (при $t = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = v_0$, $\dot{x}_2 = 0$), найдем произвольные постоянные интегрирования:

$$m_1 v_0 = C_1, \quad 0 = C_2, \quad 0 = C_3, \quad -v_0 = C_4 k.$$

Тогда

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 v_0 t, \\ x_2 - x_1 = -\frac{v_0}{k} \sin kt \end{cases}$$

и закон движения системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{v_0}{m_1 + m_2} \left(m_1 t + \frac{m_2}{k} \sin kt \right), \\ x_2 &= \frac{v_0}{m_1 + m_2} \left(m_1 t - \frac{m_1}{k} \sin kt \right). \end{aligned}$$

Замечание. Если в рассмотренном примере (рис. 24.13) за обобщенные координаты выбрать $q_1 = x_1$ и $q_2 = y$, где y – деформация (удлинение) пружины – является координатой груза 2 в относительном движении, то скорости грузов в абсолютном движении будут $v_1 = \dot{x}_1$ и $v_2 = \dot{x}_1 + \dot{y}$. Тогда кинетическая энергия примет вид

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{y} + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2.$$

Потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2} c y^2$ и кинетический потенциал

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{y} + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 - \frac{1}{2} c y^2.$$

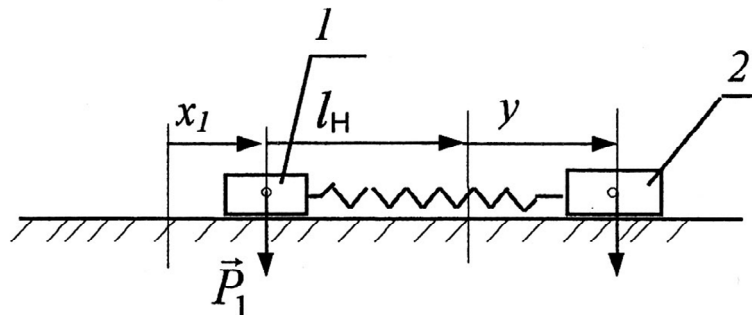


Рис. 24.13

В этом случае $L = L\left(\dot{x}, \dot{y}, y\right)$, т.е. координата $q_1 = x_1$ будет циклической и, следовательно, существует циклический интеграл уравнений Лагранжа, который выражает закон сохранения количества движения системы. Для новых обобщенных координат начальные условия будут следующими: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x}_1 = v_0$, $y = 0$, $\dot{y} = -v_0$, что позволяет найти постоянные интегрирования.

Уравнения Лагранжа II рода сыграли решающую роль в развитии динамики системы и широко используются для решения многих задач механики. В частности, уравнения Лагранжа II рода используются для составления общего уравнения движения машины, представляющей собой совокупность твердых тел, соединенных между собой.

Вопросы для самопроверки

1. Какие координаты механической системы называют обобщенными и чем определяется их количество в решаемых задачах? Как проверить являются ли выбранные координаты обобщенными?
2. От чего зависит размерность обобщенных скоростей и обобщенных сил?
3. Чем определяется количество обобщенных сил в задачах и каковы способы нахождения этих сил?
4. Как записывается принцип возможных перемещений в обобщенных координатах (условие равновесия системы)?
5. Исключение каких сил из уравнений Лагранжа делает их удобными для решения задач о движении несвободных механических систем?
6. Входят ли в уравнения Лагранжа внутренние силы?
7. Как записываются уравнения Лагранжа для консервативных систем?
8. Как определяется функция Лагранжа?

Глава 25. Колебания механических систем с одной или двумя степенями свободы

В пятнадцатой главе были рассмотрены свободные и вынужденные колебания материальной точки. Напомним: если на точку действуют восстанавливающая сила и сила сопротивления, то точка совершает свободные колебания, дифференциальное уравнение которых имеет вид

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0.$$

Если на точку действует дополнительно возмущающая сила, изменяющаяся по периодическому закону, то точка совершает вынужденные колебания, которые описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

В данной главе рассматриваются свободные и вынужденные колебания механической системы. Во многих областях техники приходится рассматривать задачи, связанные с колебаниями (например, вибрации машин и их звеньев, вибрации инженерных сооружений, автомобилей, судов, самолетов и т. д.). Как будет далее показано, в случае малых колебаний систем с одной степенью свободы ($N = 1$) математический аппарат исследования полностью совпадает с задачей прямолинейных колебаний материальной точки. Свободные и вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы ($N = 2$) описываются совокупностью двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_1, q_2 . Эти уравнения будут получены в настоящей главе.

Основные свойства *малых колебаний* механических систем с одной или двумя степенями свободы рассматриваются на основе применений уравнений Лагранжа II рода. Возможно также использование других методов – общих теорем динамики, принципа Даламбера–Лагранжа. Механическая система может совершать малые колебания только *вблизи устойчивого положения равновесия*. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимаются равными нулю, т. е. отсчитываются от этого положения.

Для рассмотрения малых колебаний следует дать определение устойчивости положения равновесия системы и установить условия, при выполнении которых положение равновесия является устойчивым.

25.1. Определение устойчивости положения равновесия.

Теорема Лагранжа–Дирихле

Для наглядности рассмотрим положение равновесия на примере одного твердого тела. Пусть таким телом является стержень с горизонталь-

ной осью вращения, проходящей через точку O , или шарик на криволинейной поверхности (рис. 25.1, а, б, в).

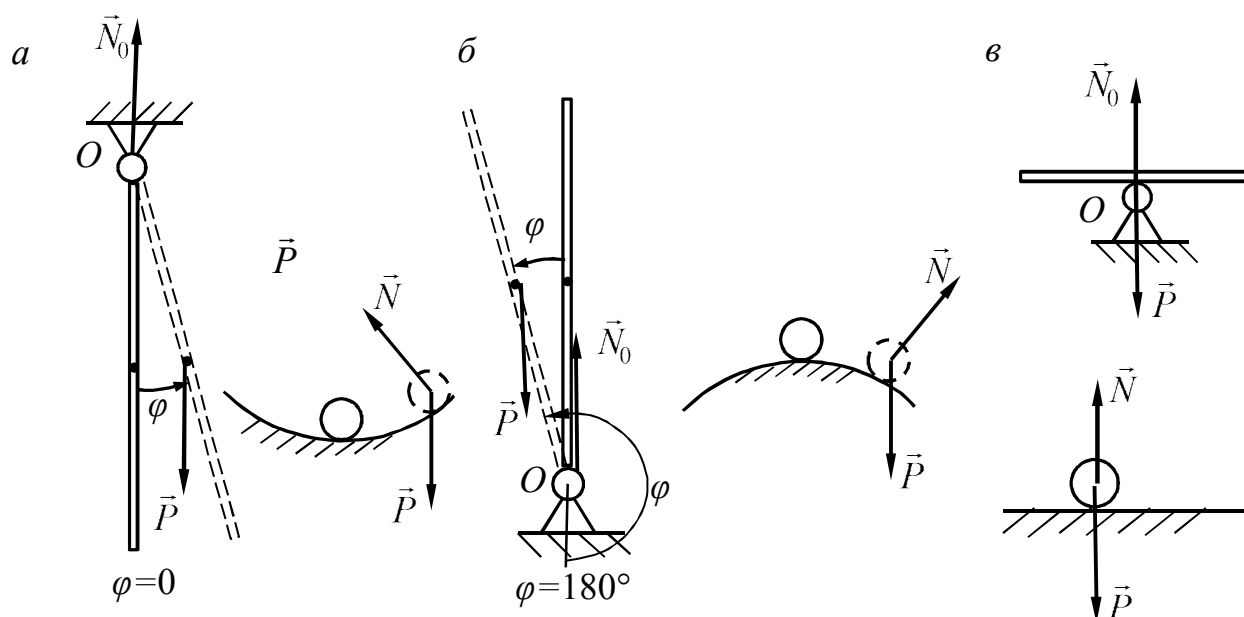


Рис. 25.1

Стержень имеет два положения равновесия: $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$. В положении равновесия силы, действующие на стержень, образуют уравновешенную систему сил.

Для того чтобы установить, будет ли рассматриваемое положение равновесия устойчивым, следует дать стержню достаточно малое начальное отклонение от положения равновесия, а в общем случае сообщить ему достаточно малую начальную угловую скорость и рассмотреть его последующее движение. Для простоты ограничимся только малым начальным отклонением. В отклоненном положении силы, действующие на стержень (сила тяжести и реакция в точке O), уже не являются уравновешенными.

Если силы стремятся вернуть стержень в положение равновесия, то такое положение равновесия считается *устойчивым*.

В случае, когда силы еще дальше удаляют стержень от положения равновесия, оно является *неустойчивым*.

Если стержень, получив любое малое начальное отклонение от положения равновесия, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется *безразличным*.

Положение равновесия стержня при $\varphi = 0$ (см. рис. 25.1, а) является устойчивым, так как при начальном его отклонении на малый угол тан-

генциальная составляющая силы тяжести стремится вернуть его в положение равновесия.

Положение равновесия стержня при $\varphi = 180^\circ$ может служить примером неустойчивого положения равновесия (рис. 25.1,б). Тангенциальная составляющая силы тяжести в отклоненном положении стремится отклонить его еще дальше от положения равновесия.

На рис. 25.1,в показано безразличное положение равновесия стержня, у которого точка закрепления O совпадает с центром тяжести. В этом случае силы, приложенные к стержню, образуют уравновешенную систему сил при любом начальном его отклонении от первоначального положения равновесия.

В общем случае, кроме начального отклонения, стержню можно сообщить еще и некоторую достаточно малую начальную угловую скорость. Естественно, что тогда случай безразличного положения равновесия стержня следует отнести к неустойчивому положению равновесия.

Все изложенное о положении равновесия стержня характерно не только для любого твердого тела (для шарика рекомендуется повторить рассуждения самостоятельно), но и для любой механической системы. Наибольший интерес представляет устойчивое положение равновесия. Система, выведенная из положения равновесия достаточно малыми возмущениями в виде начальных отклонений и скоростей, которые сообщаются точкам системы, совершает колебания около положения равновесия или приближается к нему без колебаний. При неустойчивом положении равновесия начальные возмущения приводят к тому, что система при дальнейшем движении все дальше и дальше удаляется от положения равновесия.

Таким образом, прежде всего необходимо установить характер положения равновесия системы. Для этого потребуется ввести точное понятие устойчивости положения равновесия системы. Строгое определение понятия устойчивости движения и, в частности, положения равновесия было дано в работе русского ученого механика А.М. Ляпунова¹. Приведем это определение для системы с двумя степенями свободы.

Начальное возмущение системы (начальные условия) состоит в общем случае из начальных значений обобщенных координат q_1^0, q_2^0 и начальных обобщенных скоростей \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0 .

¹ А.М. Ляпунов (1859–1918), профессор Харьковского университета, академик Петербургской академии наук, создатель общей теории устойчивости движения.

По Ляпунову, *равновесие системы называется устойчивым, если для всякого как угодно малого положительного числа ε можно выбрать два других положительных числа η_1 и η_2 , что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям*

$$|q_j^0| < \eta_1, \quad |q_j^0| < \eta_2,$$

в дальнейшем движении механической системы выполняются условия

$$|q_j(t)| < \varepsilon$$

для каждой обобщенной координаты ($j = 1, 2$).

В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила Q_j равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию выражаются по формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2).$$

Следовательно, в положении равновесия $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ и потенциальная энергия при этом достигает экстремального значения.

Теорема об устойчивости положения равновесия – теорема Лагранжа–Дирихле¹

Теорема Лагранжа–Дирихле устанавливает достаточные условия устойчивости положения равновесия и формулируется следующим образом: *для устойчивости положения равновесия консервативной механической системы достаточно, чтобы потенциальная энергия системы в этом положении имела изолированный минимум.*

Для простоты рассуждений докажем теорему для системы с одной степенью свободы, на которую наложены голономные, идеальные и стационарные связи. Система находится в потенциальном силовом поле. Примем значение потенциальной энергии равным нулю в положении равновесия системы при $q = 0$, т. е. будем считать $\Pi(0) = 0$.

Согласно условию теоремы, в положении равновесия системы потенциальная энергия имеет изолированный минимум. Следовательно, $\Pi_{\min} = \Pi(0) = 0$ и функция $\Pi(q)$ в малой окрестности $q = 0$ принимает только положительные значения (рис. 25.2).

Докажем, что существуют такие малые возмущения системы, при которых координата $|q(t)| < \varepsilon$ в дальнейшем движении системы.

¹ Дирихле Густав Лежён (1805–1859), математик, дал строгое доказательство теоремы Лагранжа.

На рис. 25.2 показана ε – окрестность обобщенной координаты, Π^* – наименьшее значение потенциальной энергии из двух граничных.

В каждой точке интервала $A_2 A'_1$ модуль координаты $|q| < \varepsilon$, а потенциальная энергия $\Pi(q) < \Pi^*$. Если будет доказано, что в любой момент времени при движении системы выполняется условие $\Pi(q) < \Pi^*$, то, следовательно, $|q(t)| < \varepsilon$ и положение равновесия будет устойчивым.

Доказательство. Для рассматриваемой консервативной механической системы справедлив закон сохранения полной механической энергии:

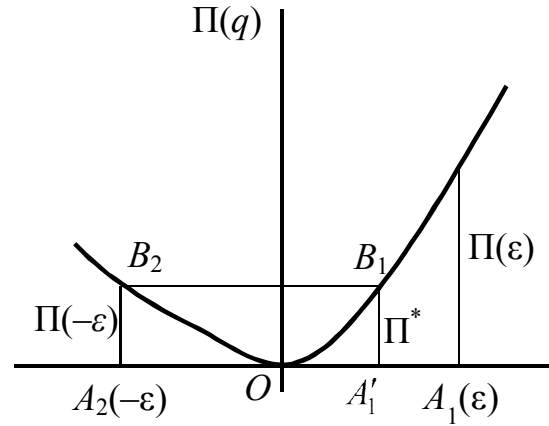


Рис. 25.2

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \quad (25.1)$$

где T_0 , Π_0 – кинетическая и потенциальная энергии в начальный момент времени, выражаемые через начальные величины q^0, \dot{q}^0 . Выберем эти величины так, чтобы выполнялось неравенство

$$T_0 + \Pi_0 < \Pi^*. \quad (25.2)$$

Это неравенство вследствие структур T_0 и Π_0 допускает бесчисленное множество решений q^0, \dot{q}^0 так же, как и одно уравнение с двумя неизвестными.

Перепишем выражение (25.1) в виде

$$\Pi(q) = (T_0 + \Pi_0) - T. \quad (25.3)$$

Поскольку $T > 0$, то, следовательно, $\Pi(q) < T_0 + \Pi_0$, а с учетом (25.2) $\Pi(q) < \Pi^*$, а значит, координата q системы при движении удовлетворяет неравенству $|q(t)| < \varepsilon$ в течение всего времени движения системы.

Теорема Лагранжа-Дирихле для системы с одной степенью свободы доказана. Отметим, что аналогично доказывается теорема для системы с двумя и N степенями свободы.

25.2. Колебания механической системы с одной степенью свободы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек и имеющую одну степень свободы. На систему наложены голономные, стационарные связи. Положения всех точек системы определяются одной обобщенной координатой, а скорости всех точек выражаются через одну обобщенную скорость:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_s(q), \quad \vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q} \dot{q}. \quad (25.4)$$

Колебание механической системы при $N = 1$ описывается одним уравнением Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (25.5)$$

Вычислим кинетическую, потенциальную энергии системы и обобщенную силу.

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы

Определим кинетическую энергию с учетом (25.4):

$$T = \sum_s \frac{m_s v_s^2}{2} = \sum_s \frac{m_s \vec{v}_s^2}{2} = \sum_s \frac{m_s}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q} \right)^2 \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2. \quad (25.6)$$

В выражении (25.6) введена функция $A(q)$, зависящая только от обобщенной координаты:

$$A(q) = \sum m_s \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q} \right)^2. \quad (25.7)$$

Разлагая $A(q)$ в окрестности точки $q = 0$ в ряд Тейлора (Маклорена), имеем

$$A(q) = A(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (25.8)$$

Здесь и далее индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислить при $q = 0$. Для получения в разложении кинетической энергии членов не выше второго порядка по отношению к q и \dot{q} достаточно из разложения $A(q)$ взять только постоянное значение $A(0)$, которое

обозначим a . При учете других слагаемых из разложения $A(q)$ в выражении для кинетической энергии появляются члены третьего и более высокого порядка малости.

Приближенно выражение кинетической энергии для системы с одной степенью свободы в случае малых колебаний можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (25.9)$$

Положительная постоянная a называется *коэффициентом инерции*. По размерности коэффициент инерции является или массой, или моментом инерции.

Потенциальная энергия системы с одной степенью свободы

Потенциальная энергия системы Π для стационарного силового поля и стационарных связей является функцией только обобщенной координаты q . Разлагая ее в ряд Тейлора (Маклорена) в окрестности $q = 0$, получим

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (25.10)$$

Потенциальную энергию в положении равновесия при $q = 0$ примем равной нулю, $\Pi(0) = 0$. Производная $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0$ есть значение обобщенной

силы Q в положении равновесия системы, равное нулю, $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 = 0$ – потенциальная энергия имеет экстремум при $q = 0$.

Потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет минимум, что является достаточным условием устойчивости положения равновесия. В этом случае $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 > 0$.

Обозначим $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 = c$, где c – *коэффициент жесткости* или просто *жесткость*, который также называют квазиупругим коэффициентом.

Таким образом, отбрасывая члены третьего и более высокого порядка, имеем

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2. \quad (25.11)$$

Системы, для которых потенциальная и кинетическая энергии выражаются точно по формулам (25.9) и (25.11) без отбрасывания членов более высокого порядка, называются *линейными*. Их движение описывается линейными уравнениями второго порядка. Пренебрегая всеми членами второго и более высокого порядка относительно q, \dot{q}, \ddot{q} , т. е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, произведения и т. д., мы получаем *малые* колебания системы. В случае малых колебаний функции $A(q)$, $\Pi(q)$ принимаются такими, чтобы получилось линейное дифференциальное уравнение относительно обобщенной координаты.

Обобщенная сила для системы с одной степенью свободы

Обобщенную силу Q можно считать состоящей из трех частей:

$$Q = Q^\Pi + Q^R + Q^B.$$

Здесь Q^Π – обобщенная сила потенциальных сил. Она выражается через потенциальную энергию по формуле

$$Q^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}; \quad (25.12)$$

Q^R – обобщенная сила, которая определяется действием сил сопротивления;

Q^B – обобщенная сила, которая определяется действием возмущающих сил, зависящих от времени.

Рассмотрим вычисление величины Q^R при действии вязкого сопротивления, когда силы сопротивления линейно зависят от скоростей точек:

$$\vec{R}_s = -b_s \vec{v}_s = -b_s \dot{\vec{r}}_s \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (25.13)$$

где b_s – постоянный коэффициент сопротивления.

Согласно определению обобщенной силы имеем

$$Q^R = \sum_{s=1}^n \vec{R}_s \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q} = -\sum_{s=1}^n b_s \vec{v}_s \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q}. \quad (25.14)$$

Для дальнейшего преобразования используем тождество Лагранжа (24.14), полученное при выводе уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_s}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q}.$$

С учетом этого выражения для Q^R получаем

$$Q^R = -\sum_{s=1}^n b_s \vec{v}_s \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{s=1}^n \frac{b_s \vec{v}_s^2}{2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \quad (25.15)$$

В выражении (25.15) введено обозначение

$$\Phi = \sum_{s=1}^n \frac{b_s \vec{v}_s^2}{2} = \sum_{s=1}^n \frac{b_s v_s^2}{2}. \quad (25.16)$$

Функцию Φ называют *диссипативной* функцией или функцией Рэлея. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в неё вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Выполняя для функции Φ преобразования, аналогичные преобразованиям для кинетической энергии (рекомендуется проделать самостоятельно), получим выражение диссипативной функции в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \quad (25.17)$$

где положительная постоянная величина b называется *обобщенным коэффициентом сопротивления*.

Замечание. При решении конкретных задач для оценки влияния сопротивления на колебания при вычислении величины Q^R можно использовать обычные способы вычисления обобщенных сил без диссипативной функции Рэлея.

Подставляя значение диссипативной функции в выражение (25.15), получаем значение обобщенной силы, соответствующей силам сопротивления:

$$Q^R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}. \quad (25.18)$$

Величину Q^B , соответствующую возмущающим силам, примем в виде

$$Q^B = H \sin pt, \quad (25.19)$$

где H – амплитуда; p – циклическая частота возмущающей силы.

Все величины, входящие в уравнение Лагранжа II рода (25.5), определены. Если на точки системы действуют восстанавливающие силы и силы сопротивления, то система совершает свободные колебания. Вычисляя производные, подставляя их в уравнение (25.5), учитывая, что

$Q = Q^{\Pi} + Q^R = -cq - b\dot{q}$, получаем дифференциальное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q}. \quad (25.20)$$

Разделив левую и правую часть на коэффициент a (25.20), перепишем в виде

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (25.21)$$

Как и для одной материальной точки, здесь

$n = \frac{b}{2a}$ – коэффициент затухания (демпфирования), с^{-1} ;

$k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ – циклическая частота свободных колебаний в среде без сопротивления, с^{-1} .

При действии на точки системы дополнительно возмущающих сил получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} + H \sin pt, \quad (25.22)$$

которое можно записать так:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin pt, \quad (25.23)$$

где $h = \frac{H}{a}$ – отношение амплитуды возмущающей силы к коэффициенту инерции.

Исследование уравнений (25.21) и (25.23) проведено в главе 15.

Пример 25.1. Свободные колебания системы в среде без сопротивления.

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний механической системы, состоящей из груза 1, невесомого неподвижного блока 3 и однородного стержня 2 длиной l (рис. 25.3,а). К стержню в точке B прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой c_1 , $OB = \frac{3}{4}l$. Масса груза m_1 , масса стержня m_2 .

Решение. На рис. 25.3,а показана система в положении равновесия. В этом положении выбираем начало обобщенной координаты x , и пружина имеет статическую деформацию $\lambda_{\text{ст}}$. Для произвольного положения системы $q = x$ (рис. 25.3,б) выполним кинематический анализ.

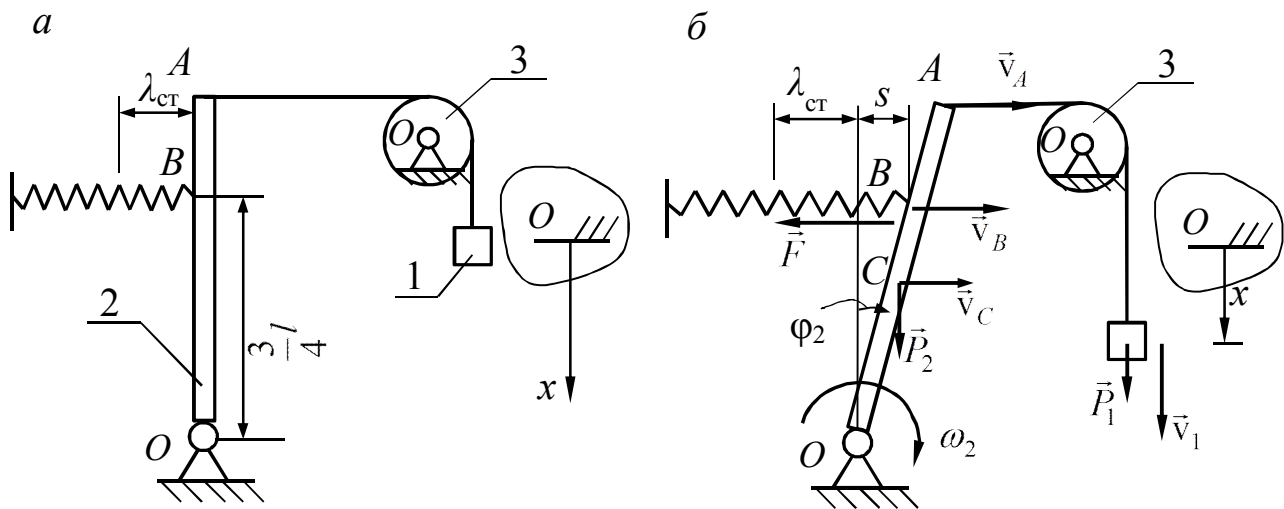


Рис. 25.3

Груз 1 как материальная точка совершает прямолинейное движение, стержень 2 – вращательное движение, связь между скоростями

$$v_1; \quad \omega_2 = \frac{v_1}{l}; \quad v_B = OB\omega_2 = \frac{3}{4}v_1.$$

Связь между перемещениями имеет такой же вид:

$$x; \quad \varphi_2 = \frac{x}{l}; \quad s = OB\varphi_2 = \frac{3}{4}x.$$

Отметим, что координата x и угол φ_2 малы, соответственно скорости точек A, B, C можно заменить горизонтальными составляющими.

На рассматриваемую систему наложены идеальные связи. Показываем активные силы \vec{P}_1, \vec{P}_2 , а действие пружины заменяем силой упругости

$$F = c_1(\lambda_{\text{ст}} + s) = c_1\left(\lambda_{\text{ст}} + \frac{3}{4}x\right).$$

Система имеет одну степень свободы $N = 1$. Уравнение Лагранжа в рассматриваемом случае:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}. \quad (25.24)$$

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$. Кинетическая энергия

$$\text{груза} \quad T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2, \quad \text{кинетическая энергия стержня}$$

$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 l^2}{3} \cdot \frac{v_1^2}{l^2} = \frac{1}{6} m_2 v_1^2 = \frac{1}{6} m_2 \dot{x}^2$. Момент инерции стержня принят $J_{2z} = \frac{m_2 l^2}{3}$.

Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m_2 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + \frac{1}{3} m_2) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} a \dot{x}^2, \quad (25.25)$$

где коэффициент инерции a – приведенная масса,

$$a = m_1 + \frac{1}{3} m_2. \quad (25.26)$$

Потенциальная энергия системы $\Pi = \Pi^I + \Pi^{II}$, где Π^I – потенциальная энергия сил тяжести; Π^{II} – потенциальная энергия силы упругости.

Потенциальная энергия груза 1 (силы тяжести \vec{P}_1) $\Pi_1^I = -m_1 g x$. По-

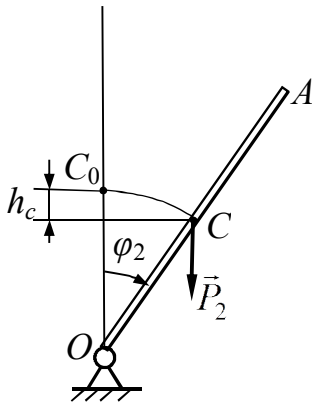


Рис. 25.4

тенциальную энергию стержня (силы тяжести \vec{P}_2) можно вычислить различными способами. Один из них показан на рис. 25.4.

$\Pi_2^I = -m_2 g h_c$, где h_c – вертикальное перемещение точки C , $h_c = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_2)$;

$1 - \cos \varphi_2 = 2 \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$. С учетом малости φ_2 $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$

получаем $\Pi_2^I = -m_2 g l \frac{\varphi_2^2}{4} = -\frac{1}{4} m_2 \frac{g}{l} x^2$.

Окончательно потенциальная энергия сил тяжести Π^I :

$$\Pi^I = -m_1 g x - \frac{1}{4} m_2 \frac{g}{l} x^2.$$

Потенциальная энергия пружины (силы упругости)

$$\Pi^{II} = -\frac{c_1}{2} (\lambda_k^2 - \lambda_n^2).$$

Конечная деформация пружины $\lambda_k = \lambda_{ст}$, начальная деформация

$$\lambda_n = \lambda_{ст} + s = \lambda_{ст} + \frac{3}{4} x.$$

Потенциальная энергия пружины

$$\Pi^{\text{II}} = \frac{3}{4} c_1 \lambda_{\text{ст}} x + \frac{9}{32} c_1 x^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -m_1 g x - \frac{1}{4} m_2 \frac{g}{l} x^2 + \frac{3}{4} c_1 \lambda_{\text{ст}} x + \frac{9}{32} c_1 x^2. \quad (25.27)$$

Определение статической деформации пружины – различные способы

а. Расчленение системы на отдельные тела

Равновесие стержня (рис. 25.5), когда $N = m_1 g$; $F = c_1 \lambda_{\text{ст}}$; $\sum m_0 = 0$;

$$-N \cdot l + F \cdot \frac{3}{4} l = 0; \quad -m_1 g + \frac{3}{4} c_1 \lambda_{\text{ст}} = 0.$$

б. Использование принципа возможных перемещений для системы (рис. 25.6)

$$\sum \delta A_{\text{акт}} = 0; \quad m_1 g \delta x - c_1 \lambda_{\text{ст}} \delta s_B = 0.$$

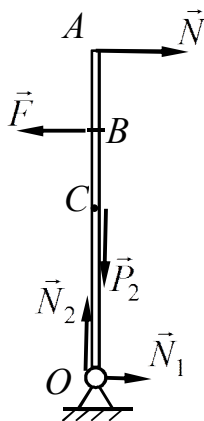


Рис. 25.5

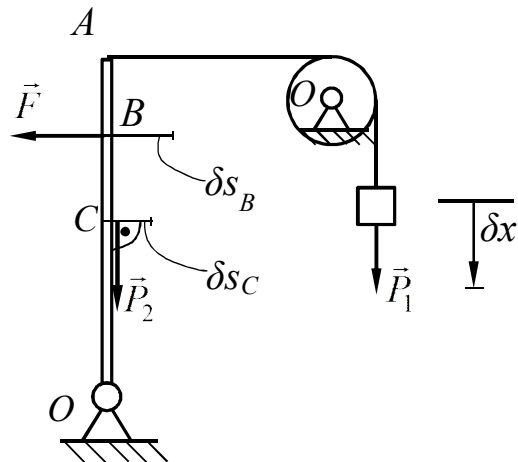


Рис. 25.6

Учитывая, что $\delta S_B = \frac{3}{4} \delta x$, имеем $m_1 g - \frac{3}{4} c_1 \lambda_{\text{ст}} = 0$.

в. Использование равенства нулю обобщенной силы в положении

равновесия $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -m_1 g - \frac{1}{2} m_2 \frac{g}{l} x + \frac{3}{4} c_1 \lambda_{\text{ст}} + \frac{9}{16} c_1 x.$$

Полагая $\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, получаем $-m_1 g + \frac{3}{4} c_1 \lambda_{\text{ст}} = 0$.

Выражение потенциальной энергии с учетом $\lambda_{\text{ст}}$

$$\Pi = \frac{9}{32} c_1 x^2 - \frac{1}{4} m_2 \frac{g}{l} x^2 = \frac{1}{2} c x^2, \quad (25.28)$$

где коэффициент жесткости

$$c = \frac{9}{16} c_1 - \frac{1}{2} m_2 \frac{g}{l}. \quad (25.29)$$

Определив коэффициенты a и c с использованием выражения (25.21), запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний рассматриваемой системы в среде без сопротивления:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Замечание. При устойчивом положении равновесия параметры системы должны удовлетворять условию $c > 0$, т. е. $\frac{9}{16} c_1 - \frac{1}{2} m_2 \frac{g}{l} > 0$.

25.3. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы в среде без сопротивления

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек и имеющую две степени свободы, $N = 2$. На систему наложены голономные, идеальные, стационарные связи и действуют потенциальные силы, вызывающие колебания.

Положения точек системы определяются двумя обобщенными координатами, а скорости точек системы выражаются через две обобщенные скорости:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_s(q_1, q_2), \quad \vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \dot{q}_2. \quad (25.30)$$

При этом допускается, что обобщенные координаты и обобщенные скорости – малые величины.

Дифференциальные уравнения свободных колебаний в среде без сопротивления получим с использованием уравнений Лагранжа II рода для консервативной системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \quad (25.31)$$

А. Кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы

По определению кинетической энергии с учетом (25.30) имеем

$$T = \sum \frac{m_s v_s^2}{2} = \sum \frac{m_s \bar{v}_s^2}{2} = \sum \frac{m_s}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1^2 + \sum m_s \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \sum \frac{m_s}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[A_{11}(q_1, q_2) \dot{q}_1^2 + 2A_{12}(q_1, q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_{22}(q_1, q_2) \dot{q}_2^2 \right]. \quad (25.32)$$

В выражение (25.32) введены следующие обозначения:

$$A_{11}(q_1, q_2) = \sum m_s \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \right)^2; \quad A_{12}(q_1, q_2) = \sum m_s \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_1} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \right);$$

$$A_{22}(q_1, q_2) = \sum m_s \left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_2} \right)^2.$$

Разложим каждую из этих функций в ряд Тейлора (Маклорена) вблизи устойчивого положения равновесия ($q_1 = 0, q_2 = 0$):

$$A_{11}(q_1, q_2) = A_{11}(0) + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots$$

Введя обозначения $A_{11}(0) = a_{11}$, $A_{12}(0) = a_{12}$, $A_{22}(0) = a_{22}$, получим приближенное выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right), \quad (25.33)$$

где постоянные величины a_{11} , a_{12} , a_{22} называются коэффициентами инерции.

Выражение кинетической энергии системы с двумя степенями свободы представляет однородную квадратичную форму, определенно положительную, коэффициенты которой удовлетворяют условиям

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Б. Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы

Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы зависит только от обобщенных координат q_1, q_2 , если связи стационарны. Разлагая потенциальную энергию $\Pi(q_1, q_2)$ в окрестности положения равновесия $q_1 = q_2 = 0$ в ряд Тейлора (Маклорена), имеем

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 \frac{q_1^2}{2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right)_0 \frac{q_2^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (25.34)$$

Потенциальную энергию в положении равновесия $\Pi(0)$ принимаем равной нулю, $\Pi(0) = 0$. Величины $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right)_0 = 0$ как значения обобщенных сил в положении равновесия. Окончательно, удерживая члены второго порядка и пренебрегая членами третьего и более высокого порядка, потенциальную энергию выразим в форме

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2), \quad (25.35)$$

где постоянные величины $c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0$, $c_{12} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0$, $c_{22} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right)_0$ называются коэффициентами жесткости или квазиупругими коэффициентами.

Выражение потенциальной энергии также представляет квадратичную форму, определенно положительную, и коэффициенты жесткости удовлетворяют условиям

$$c_{11} > 0, c_{22} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

В. Дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы

Определив кинетическую и потенциальную энергии механической системы, воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода для получения уравнений движения. Вычислив производные, входящие в (25.31), получаем систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{12} q_2 &= 0, \\ a_{12} \ddot{q}_1 + c_{12} q_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.36)$$

Решение системы уравнений (25.36) следует искать в форме

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha), \quad (25.37)$$

где постоянная k – циклическая частота колебаний; A_1, A_2 – амплитуды свободных колебаний; α – начальная фаза колебаний. Постоянные A_1, A_2, α в дальнейшем будут определены из начальных условий. На этом этапе рассуждений A_1, A_2, k, α – неизвестные величины.

Г. Уравнение частот

Вычислим производные от (25.37):

$$\ddot{q}_1 = -A_1 k^2 \sin(kt + \alpha), \quad \ddot{q}_2 = -A_2 k^2 \sin(kt + \alpha). \quad (25.38)$$

Подставив выражения (25.38), (25.37) в систему уравнений (25.36), получим тождества, в которых постоянные коэффициенты при $\sin(kt + \alpha)$ должны равняться нулю. При этом получается система двух однородных линейных алгебраических уравнений для величин A_1 и A_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) &= 0, \\ A_1(c_{12} - a_{12}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.39)$$

Однородная линейная система уравнений (25.39) имеет решение отличное от нуля, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем *уравнение частот*:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (25.40)$$

Уравнение частот представляет собой биквадратное уравнение. Решив его, получаем две частоты k_1 и k_2 . Меньшую частоту обозначают k_1 , большую – k_2 . Частоты k_1 и k_2 являются частотами свободных колебаний системы. Они не зависят от начальных условий и полностью определяются значениями коэффициентов инерции и жесткости.

Если частоты равны ($k_1 = k_2$), то каждое из уравнений системы (25.39) является тождеством, справедливым при любых значениях A_1, A_2 . Система дифференциальных уравнений (25.36) в этом случае распадается на два независимых уравнения. Их решение имеет вид

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha_2) \quad (25.41)$$

или

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad q_2 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt, \quad (25.42)$$

где произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 или $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются из начальных условий:

$$t = 0 \quad q_1 = q_1^0, \quad q_2 = q_2^0, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_1^0, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_2^0. \quad (25.43)$$

Каждая из обобщенных координат q_1 и q_2 изменяется по синусоидальному закону независимо друг от друга с одинаковыми частотами. В случае разных частот получим два значения обобщенных координат q_1 и q_2 , называемые *главными* колебаниями.

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), & q_2^{(1)} &= A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ q_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), & q_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (25.44)$$

Здесь координаты $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ составляют первое главное колебание частоты k_1 ; $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}$ – второе главное колебание частоты k_2 .

Д. Коэффициенты формы

Из системы уравнений (25.39) можно определить только отношение амплитуд A_1 и A_2 . Для первого и второго главных колебаний соответственно получаем

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2}, \\ \beta_2 &= \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (25.45)$$

Отношения амплитуд в главных колебаниях β_1 и β_2 называют *коэффициентами формы*. Из выражений (25.44) следует, что коэффициенты формы равны отношениям обобщенных координат в главных колебаниях:

$$\beta_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}}, \quad \beta_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}}. \quad (25.46)$$

Коэффициенты формы β_1 и β_2 характеризуют формы главных колебаний. Они могут быть положительными или отрицательными. Если, например, $\beta_1 > 0$, то $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ имеют одинаковые фазы; если $\beta_1 < 0$, то фазы обобщенных координат $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ отличаются на π .

Графическое изображение формы главных колебаний с использованием коэффициентов формы будет показано в примере 25.2.

Е. Общее решение системы дифференциальных уравнений (25.36) и уравнения движения механической системы

Общее решение системы дифференциальных уравнений (25.36) с использованием коэффициентов формы (25.46) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \beta_1 q_1^{(1)} + \beta_2 q_1^{(2)} = \beta_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (25.47)$$

Четыре произвольные постоянные $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1 , α_2 определяются с помощью начальных условий (25.43).

Для удобства определения произвольных постоянных общее решение обычно записывают так:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t + C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t, \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \beta_1 C_1 \cos k_1 t + \beta_1 C_2 \sin k_1 t + \beta_2 C_3 \cos k_2 t + \beta_2 C_4 \sin k_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (25.48)$$

где произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 определяются по начальным условиям, а затем решение можно представить в форме (25.47).

После определения произвольных постоянных получаем частное решение системы (25.36) или уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Свободные линейные колебания системы с двумя степенями свободы в среде без сопротивления состоят из суммы двух главных гармонических колебаний с частотами k_1 и k_2 , которые входят в каждую обобщенную координату q_1 и q_2 .

Замечания

1. Полученные результаты для системы с двумя степенями свободы можно обобщить для системы с любым конечным числом степеней свободы (см. напр. [6, 7]).

2. В этой же литературе [6, 7] изложено влияние линейного сопротивления на свободные колебания системы с любым конечным числом степеней свободы.

3. При исследовании свободных колебаний системы с двумя степенями свободы можно рекомендовать нижеследующую последовательность вычислений.

3.1. Составить расчетную схему – изобразить механическую систему, выбрать обобщенные координаты, показать активные силы (как правило, силы тяжести и силы упругости).

3.2. Определить кинетическую энергию системы и установить коэффициенты инерции a_{11} , a_{12} , a_{22} .

3.3. Вычислить потенциальную энергию системы и установить коэффициенты жесткости c_{11} , c_{12} , c_{22} .

3.4. Составить уравнение частот и определить частоты свободных колебаний k_1 и k_2 ($k_1 < k_2$).

3.5. Вычислить коэффициенты формы β_1 , β_2 и при необходимости изобразить графически формы главных колебаний (пример 25.2).

3.6. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$q_1 = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t + C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t,$$

$$q_2 = \beta_1 C_1 \cos k_1 t + \beta_1 C_2 \sin k_1 t + \beta_2 C_3 \cos k_2 t + \beta_2 C_4 \sin k_2 t.$$

С помощью начальных условий определить произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 и получить частное решение системы уравнений – уравнения свободных колебаний.

Пример 25.2. Два груза массами m_1 и m_2 прикреплены к недеформированным пружинам с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 и отпущены без начальной скорости (рис. 25.7,а). Найти закон движения грузов. Рассмотреть частный случай, когда $m_1 = m_2 = m$, $c_1 = c_2 = c$.

Расчетная схема показана на рис. 25.7,б. В систему включены два

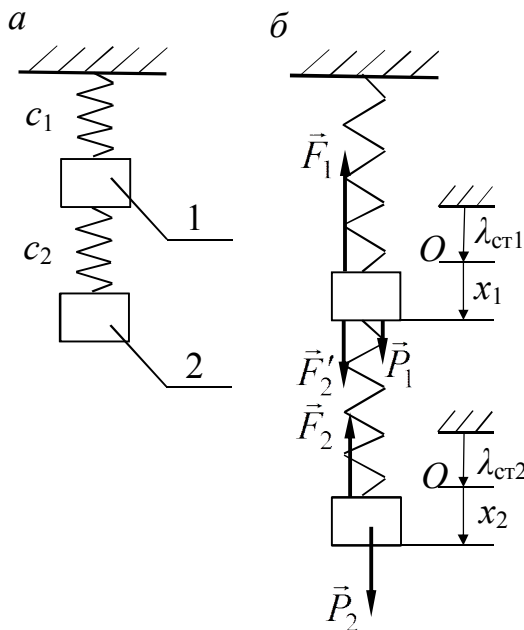


Рис. 25.7

груза 1 и 2, действие пружин заменено силами упругости \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_2' ($F_2 = F_2'$); $\lambda_{ст1}$, $\lambda_{ст2}$ – статические деформации пружин; x_1 , x_2 – координаты, определяющие положение грузов и отсчитываемые от положений равновесия.

Координаты x_1 , x_2 выбраны в неподвижной системе отсчета и представляют собой абсолютные координаты. Деформации пружин в произвольный момент времени $t > 0$:

пружины с жесткостью c_1 :
 $\lambda_1 = \lambda_{ст1} + x_1$;

пружины с жесткостью c_2 :
 $\lambda_2 = \lambda_{ст2} + (x_2 - x_1)$.

Соответственно силы упругости для произвольного положения системы

$$F_1 = c_1(\lambda_{ст1} + x_1); \quad F_2 = F_2' = c_2[\lambda_{ст2} + (x_2 - x_1)].$$

Обобщенные координаты в данном случае $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$ и кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2.$$

Сравнивая выражение кинетической энергии с формулой (25.33), получаем коэффициенты инерции

$$a_{11} = m_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{22} = m_2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi^I + \Pi^{II},$$

где Π^I – потенциальная энергия сил тяжести; Π^{II} – потенциальная энергия сил упругости.

Соответственно имеем

$$\begin{aligned} \Pi^I &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2, \\ \Pi^{II} &= -\frac{c_1}{2} (\lambda_{к1}^2 - \lambda_{н1}^2) - \frac{c_2}{2} (\lambda_{к2}^2 - \lambda_{н2}^2). \end{aligned}$$

Начальные и конечные деформации пружин:

$$\lambda_{к1} = \lambda_{ст1}; \quad \lambda_{к2} = \lambda_{ст2}; \quad \lambda_{н1} = \lambda_{ст1} + x_1; \quad \lambda_{н2} = \lambda_{ст2} + (x_2 - x_1).$$

Подставляя значения деформаций, получим Π^{II} :

$$\Pi^{II} = c_1 \lambda_{ст1} x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + c_2 \lambda_{ст2} (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Окончательное выражение потенциальной энергии системы

$$\Pi = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + c_1 \lambda_{ст1} x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + c_2 \lambda_{ст2} (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Определение статических деформаций $\lambda_{ст1}$, $\lambda_{ст2}$

а. Равновесие всей системы и второго груза

$$-c_1 \lambda_{ст1} + m_1 g + m_2 g = 0;$$

$$-c_2 \lambda_{ст2} + m_2 g = 0.$$

$$\lambda_{ст1} = g \frac{m_1 + m_2}{c_1}; \quad \lambda_{ст2} = \frac{m_2}{c_2} g.$$

б. Использование принципа возможных перемещений

$$\delta x_1 > 0, \quad \delta x_2 = 0.$$

$$-c_1 \lambda_{ст1} \delta x_1 + m_1 g \delta x_1 + c_2 \lambda_{ст2} \delta x_1 = 0;$$

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta x_2 > 0.$$

$$-c_2 \lambda_{ст2} \delta x_2 + m_2 g \delta x_2 = 0.$$

$$\lambda_{\text{ст1}} = \frac{m_1 + m_2}{c_1} g; \quad \lambda_{\text{ст2}} = \frac{m_2}{c_2} g.$$

в. Использование равенства нулю обобщенных сил в положении равновесия

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right)_{x_1=0, x_2=0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \right)_{x_1=0, x_2=0} = 0; \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right)_{x_1=0, x_2=0} &= -m_1 g + c_1 \lambda_{\text{ст1}} - c_2 \lambda_{\text{ст2}} = 0; \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \right)_{x_1=0, x_2=0} &= -m_2 g + c_2 \lambda_{\text{ст2}} = 0. \\ \lambda_{\text{ст1}} &= \frac{m_1 + m_2}{C_1} g; \quad \lambda_{\text{ст2}} = \frac{m_2}{C_2} g. \end{aligned}$$

С учетом статических деформаций выражение потенциальной энергии принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2.$$

Сравнивая полученное значение потенциальной энергии с выражением (25.35), получаем значения коэффициентов жесткости:

$$c_{11} = c_1 + c_2; \quad c_{12} = -c_2; \quad c_{22} = c_2.$$

Уравнение частот, согласно (25.40),

$$[(c_1 + c_2) - m_1 k^2] (c_2 - m_2 k^2) - c_2^2 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем k_1 и k_2 – частоты собственных колебаний. Далее рассмотрим частный случай, когда $m_1 = m_2 = m$ и $c_1 = c_2 = c$. Тогда уравнение частот запишется так:

$$(2c - mk^2)(c - mk^2) - c^2 = 0$$

или

$$m^2 k^4 - 3mck^2 + c^2 = 0.$$

Решая биквадратное уравнение, получаем квадраты частот свободных (главных) колебаний:

$$k_1^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{m} (3 - \sqrt{5}) = 0,38 \frac{c}{m}; \quad k_1 = 0,62 \sqrt{\frac{c}{m}};$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{m} (3 + \sqrt{5}) = 2,62 \frac{c}{m}; \quad k_2 = 1,62 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

По физическому смыслу при определении k_1 и k_2 берем только положительные значения частот.

Коэффициенты формы, согласно (25.45), имеют следующие значения:

$$\beta_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} \approx 1,62;$$

$$\beta_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} \approx -0,62$$

Первое главное колебание с частотой k_1 состоит из $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)} = \beta_1 x_1^{(1)}$. Поскольку $\beta_1 > 0$, то знаки смещений $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ в первом главном колебании одинаковы и колебания грузов совпадают по фазе. Второе главное колебание с частотой k_2 включает в себя смещения $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)} = \beta_2 x_1^{(2)}$. Поскольку $\beta_2 < 0$, то знаки смещений $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ противоположны и колебания грузов отличаются по фазе на π .

Изобразим формы главных колебаний графически (рис. 25.8). На рис. 25.8,а показано положение системы в произвольный момент времени. Для изображения главных колебаний по горизонтали вправо откладываем положительные смещения грузов, влево – отрицательные. На рис. 25.8,б показано первое главное колебание.

Координаты $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ положительны, отложены по горизонтали вправо, причем $x_2^{(1)} = 1,62x_1^{(1)}$. На рис. 25.8,в показано второе главное колебание. Координата $x_1^{(2)}$ положительна и отложена вправо, координата $x_2^{(2)}$ отрицательна и отложена влево, причем $x_2^{(2)} = -0,62x_1^{(2)}$. Следует отметить, что точка D пружины при втором главном колебании остается все время неподвижной. Такие точки называются узлами. Второе главное колебание имеет один узел, первое главное колебание узлов не имеет.

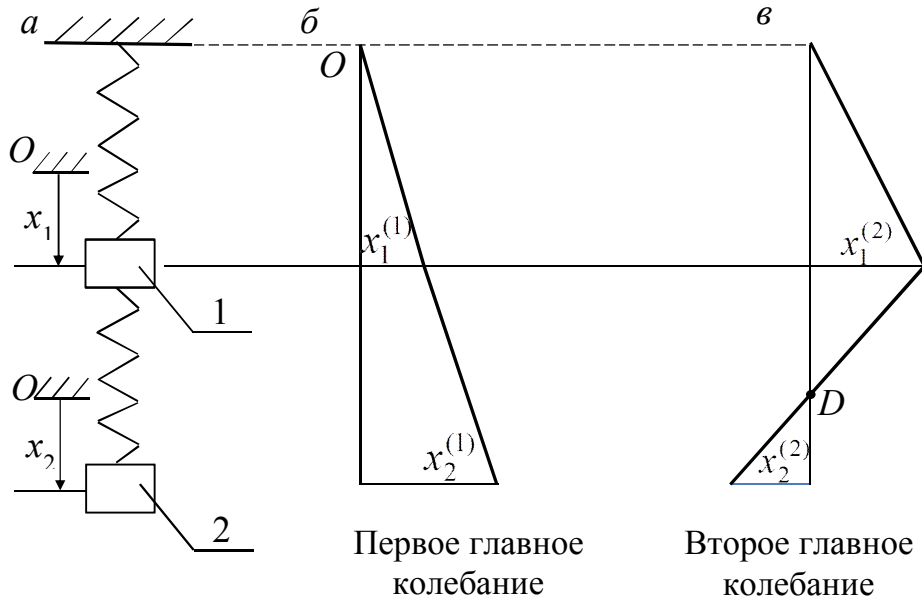


Рис. 25.8

Общее решение системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$x_1 = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t + C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t;$$

$$x_2 = \beta_1 (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \beta_2 (C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t),$$

где произвольные постоянные определяются по начальным условиям: при $t = 0$ $x_1 = -\lambda_{\text{ст}1}$, $x_2 = -\lambda_{\text{ст}2}$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$. Проведем выкладки, получаем закон движения системы:

$$x_1 = C_1 \cos k_1 t + C_3 \cos k_2 t;$$

$$x_2 = 1,62 C_1 \cos k_1 t - 0,62 C_3 \cos k_2 t,$$

где
$$C_1 = \frac{\lambda_{\text{ст}1} \beta_2 - \lambda_{\text{ст}2}}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{-0,62 \lambda_{\text{ст}1} - \lambda_{\text{ст}2}}{2,24};$$

$$C_3 = -\frac{\lambda_{\text{ст}1} \beta_1 - \lambda_{\text{ст}2}}{\beta_1 - \beta_2} = -\frac{1,62 \lambda_{\text{ст}1} - \lambda_{\text{ст}2}}{2,24}.$$

Пример 25.3. Свободные вертикальные колебания кузова автомобиля.

Масса кузова – m ; радиус инерции кузова относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка, – ρ ; c_1 и c_2 – коэффициенты жесткости

задней и передней подвески автомобиля. Центр тяжести расположен на расстояниях l_1 и l_2 от подвесок (рис. 25.9,а). Определить частоты колебаний.

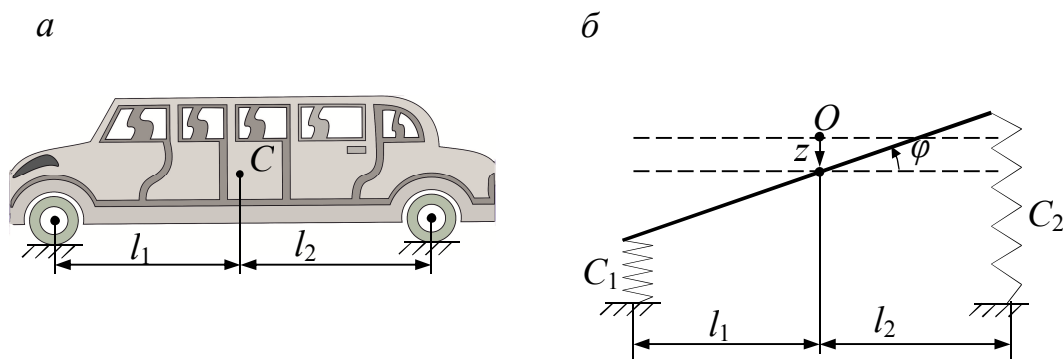


Рис. 25.9

Решение. Кузов совершает плоскопараллельное движение, характеризующееся обобщенными координатами $q_1 = z$ и $q_2 = \varphi$. Будем рассматривать малые колебания системы, имеющей две степени свободы ($N = 2$). Активными силами являются сила тяжести $P = mg$ и силы упругости $F_1 = c_1 \lambda_1$ и $F_2 = c_2 \lambda_2$, где $\lambda_1 = \lambda_{cm1} + z + l_1 \varphi$; $\lambda_2 = \lambda_{cm2} + z - l_2 \varphi$.

Движение кузова описывается уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2).$$

Кинетическая энергия системы в случае плоскопараллельного движения кузова:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\varphi}^2,$$

где коэффициенты инерции $a_{11} = m$; $a_{12} = 0$, $a_{22} = m \rho^2$.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (z + l_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2 (z - l_2 \varphi)^2.$$

Она вычислена только для членов второго порядка малости; слагаемые, содержащие члены первого порядка, в сумме равны нулю вследствие условия $\Pi'(0) = 0$.

Коэффициенты жесткости (квазиупругие коэффициенты) таковы:

$$c_{11} = c_1 + c_2, \quad c_{12} = l_1 c_1 - l_2 c_2, \quad c_{22} = l_1^2 c_1 + l_2^2 c_2.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$m\ddot{z} + (c_1 + c_2)z + (l_1c_1 - l_2c_2)\varphi = 0;$$

$$(l_1c_1 - l_2c_2)z + m\rho^2\ddot{\varphi} + (l_1^2c_1 + l_2^2c_2)\varphi = 0.$$

Принимая частное решение в виде $y = A_1\sin(kt + \alpha)$, $\varphi = A_2\sin(kt + \alpha)$, приходим к однородной системе уравнений для определения постоянных A_1, A_2 :

$$-mk^2A_1 + (c_1 + c_2)A_1 + (l_1c_1 - l_2c_2)A_2 = 0;$$

$$(l_1c_1 - l_2c_2)A_1 - m\rho^2k^2A_2 + (l_1^2c_1 + l_2^2c_2)A_2 = 0.$$

Нетривиальное решение этой системы будет существовать, если

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - mk^2 & l_1c_1 - l_2c_2 \\ l_1c_1 - l_2c_2 & l_1^2c_1 + l_2^2c_2 - m\rho^2k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для определения собственных частот получаем биквадратное уравнение

$$k^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{l_1^2c_1 + l_2^2c_2}{m\rho^2} \right) k^2 + \frac{c_1c_2(l_1 + l_2)^2}{m^2\rho^2} = 0.$$

Как правило, это уравнение имеет различные корни k_1 и k_2 – частоты главных колебаний.

25.4. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы в среде без сопротивления

Рассмотрим вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы без учета сопротивления под действием гармонических возмущающих обобщенных сил определенной частоты.

Обобщенные силы имеют две составляющие:

$$Q_j = Q_j^\Pi + Q_j^B \quad (j = 1, 2), \quad (25.49)$$

где Q_j^Π – обобщенная сила потенциальных сил, $Q_j^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$;

Q_j^B – обобщенная сила, получаемая от возмущающих сил, зависящих от времени, причем в простейшем случае примем

$$Q_1(t) = H_1 \sin pt, \quad Q_2(t) = H_2 \sin pt, \quad (25.50)$$

где H_1, H_2 – амплитуда возмущающих сил;
 p – частота (предполагаем, что $p_1 = p_2$).

Дифференциальные уравнения движения системы, кинетическая и потенциальная энергии которой выражаются формулами (25.33) и (25.35), будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{12} \dot{q}_2 &= H_1 \sin pt, \\ a_{12} \ddot{q}_1 + c_{12} \dot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} \dot{q}_2 &= H_2 \sin pt. \end{aligned} \right\} \quad (25.51)$$

Общее решение этой системы дифференциальных уравнений является суммой общего решения соответствующей системы однородных уравнений, т. е. системы (25.36), и частного решения системы (25.51), не зависящего от начальных условий.

Частное решение системы (25.51), представляющее вынужденные колебания системы, можно искать в виде синусоидальных функций той же частоты и фазы:

$$q_1 = B_1 \sin pt, \quad q_2 = B_2 \sin pt, \quad (25.52)$$

где B_1, B_2 – амплитуды вынужденных колебаний, подлежащие определению.

Рассмотрим процедуру их вычисления. Вычислив производные \dot{q}_1, \dot{q}_2 , подставив (25.52) и вторые производные в систему (25.51) после сокращения на общий множитель $\sin pt$, получим два алгебраических уравнения для определения неизвестных амплитуд B_1 и B_2 :

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}p^2)B_1 + (c_{12} - a_{12}p^2)B_2 &= H_1, \\ (c_{12} - a_{12}p^2)B_1 + (c_{22} - a_{22}p^2)B_2 &= H_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.53)$$

Для нахождения решения системы (25.53) воспользуемся формулами Крамера. Предполагая, что определитель этой системы

$$\Delta(p^2) = (c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2 \quad (25.54)$$

отличен от нуля, находим

$$B_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta(p^2)}, \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta(p^2)}, \quad (25.55)$$

где определители Δ_1 и Δ_2 имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= H_1(c_{22} - a_{22}p^2) - H_2(c_{12} - a_{12}p^2), \\ \Delta_2 &= -H_1(c_{12} - a_{12}p^2) + H_2(c_{11} - a_{11}p^2). \end{aligned} \right\} \quad (25.56)$$

Определив неизвестные B_1 и B_2 , получаем частное решение системы (25.51), т. е. закон вынужденных колебаний (25.52).

Заметим, что правая часть выражения (25.54) имеет ту же форму, что и уравнение (25.40), определяющее частоты главных колебаний. Поэтому знаменатель в формулах (25.55) обращается в нуль при $p = k_1$ или $p = k_2$. Совпадение частоты возмущающей силы с одной из частот свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления характеризуется возрастанием амплитуд колебаний с течением времени – явлением резонанса. Поэтому частное решение системы дифференциальных уравнений (25.51) в условиях резонанса следует искать в форме, отличной от (25.52), или же учитывать силы сопротивления движению.

Отметим, что при наличии сопротивления среды амплитуды вынужденных колебаний при резонансе будут иметь конечное значение. На рис. 25.10 приведен качественный вид амплитудно-частотной характеристики для амплитуды B_1 в среде без сопротивления (рис. 25.10,а) и в среде с сопротивлением (рис. 25.10,б).

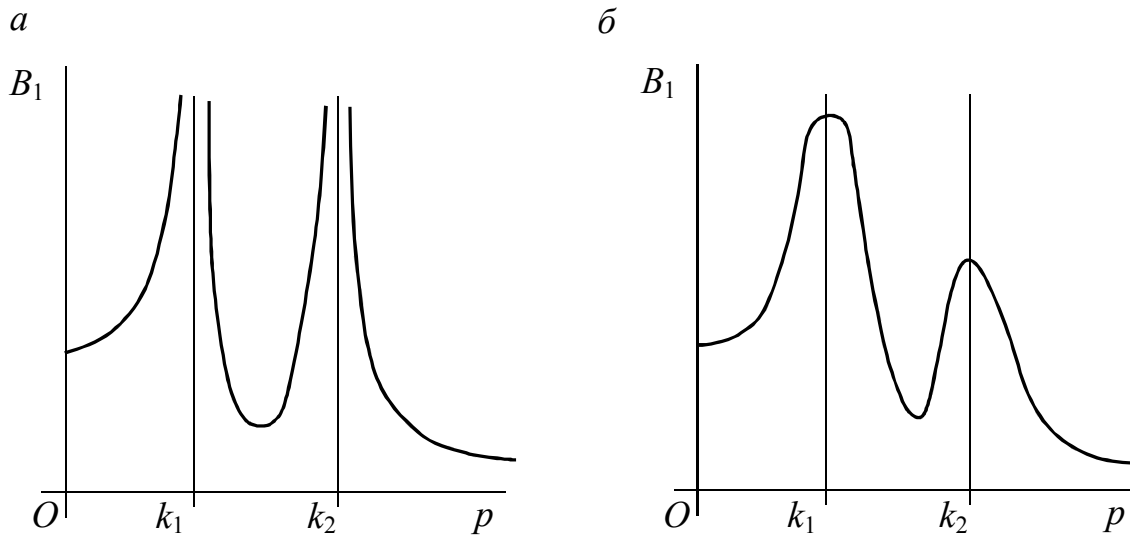


Рис. 25.10

Аналогичный вид имеет амплитудно-частотная характеристика для амплитуды B_2 .

Пример 25.4. Динамический гаситель колебаний (рис. 25.11).

Груз массой m_1 , присоединенный к неподвижному основанию пружиной жесткостью c_1 , находится под действием синусоидальной возмущающей силы $Q = H \sin pt$. К этому грузу присоединен второй груз массой m_2 . Жесткость пружины, соединяющей грузы между собой, равна c_2 . Покажем, что при надлежащем подборе величин m_2 и c_2 вынужденные ко-

лебания первого груза, обусловленные действием на него возмущающей силы, могут быть погашены.

Решение. Схема, приведенная на рис. 25.11, полностью соответствует расчетной схеме, рассмотренной в примере 25.2. Поэтому коэффициенты инерции и жесткости

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1, & a_{12} &= 0, & a_{22} &= m_2; \\ c_{11} &= c_1 + c_2, & c_{12} &= -c_2, & c_{22} &= c_2. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = H \sin pt;$$

$$-c_2x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + c_2x_2 = 0.$$

По формулам (25.55), (25.56) находим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta(p^2)} H(c_2 - m_2 p^2) \sin pt; \quad x_2 = \frac{1}{\Delta(p^2)} H c_2 \sin pt,$$

где $\Delta(p^2) = (c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2$.

Если подобрать c_2 и m_2 так, чтобы

$$p^2 = \frac{c_2}{m_2},$$

то окажется, что

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{H}{c_2} \sin pt.$$

Амплитуда вынужденных колебаний первого груза оказывается равной нулю. Этот результат можно объяснить так: в любой момент времени реакция второго груза уравнивает приложенную к первому грузу возмущающую силу. Однако не следует думать, что указанным способом можно успокоить колебания большой массы m_1 при помощи массы m_2 , произвольно малой, если надлежащим образом подобрать жесткость c_2 . Действительно, при малой массе m_2 и данной частоте p амплитуда колебаний массы m_2 , равная $\frac{H}{(m_2 p^2)}$, может оказаться очень большой, что приведет к соударению первого и второго грузов. Следует отметить,

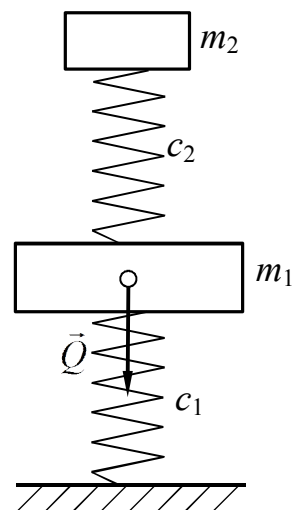


Рис. 25.11

что применение динамического гасителя допустимо лишь при строго фиксированной частоте возмущающей силы, так как при малом изменении этой частоты не исключен случай резонанса с одним из главных колебаний системы, т. е. совпадение частоты p с одной из частот k_1 и k_2 .

Вопросы для самопроверки

1. Какое положение равновесия называется устойчивым? Дайте определение устойчивости положения равновесия и сформулируйте теорему о его устойчивости.
2. Покажите, при каких значениях параметров системы, рассмотренной в примере 25.1, положение равновесия будет устойчивым. Для этого вычислите $\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, проверив при этом знак $\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right|_{x=0}$.
3. Приведите вычисления кинетической и потенциальной энергии системы с одной степенью свободы, учитывая, что $\vec{r}_s = \vec{r}_s(q)$ ($s = 1, 2, \dots, n$).
4. Приведите вычисления кинетической и потенциальной энергии системы с двумя степенями свободы. Составьте дифференциальные уравнения свободных колебаний в среде без сопротивления.
5. Получите уравнение частот для системы с двумя степенями свободы.
6. Какой вид имеют дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы в среде без сопротивления? Как записываются уравнения вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы, если возмущающие силы имеют вид

$$Q_1^B = H_1 \sin pt, \quad Q_2^B = H_2 \sin pt ?$$

Библиографический список

1. Митюшов Е. А. Теоретическая механика / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. – М.: Академия, 2006. – 320 с.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М.: Наука, 2005. – 416 с.
3. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.
4. Яблонский А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб.: Лань, 2006. – 768 с.
5. Тимошенко С. Инженерная механика / С. Тимошенко, Д. Юнг. – М.: Машгиз, 1960. – 508 с.
6. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. – 608 с.
7. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики: в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

Учебное издание

Денисов Юрий Викторович
Клинских Николай Андреевич

Теоретическая механика

Редактор *Л. Ю. Козяйчева*

Подписано в печать 28.08.2013. Формат 60х90 $\frac{1}{16}$.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 29,6.
Уч.-изд. л. 26,0. Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
E-mail: rio@ustu.ru

Ризография НИЧ УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19